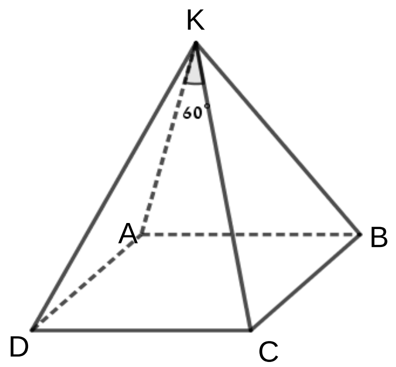
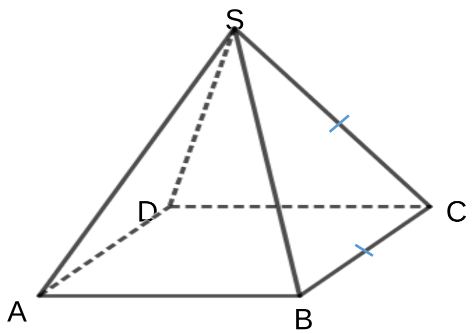
פירמידה ישרה עם בסיס מלבני

תכנון שלבי העבודה בדרך לפתרון

תרגילים מעורבבים



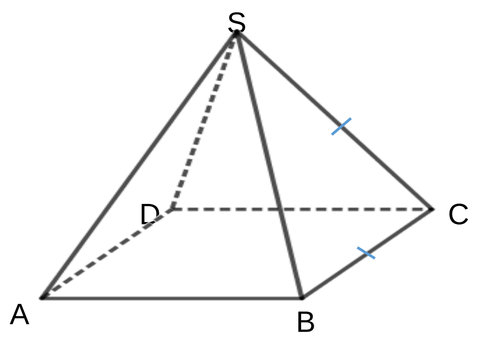
1. $KABCD$ פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור. $\measuredangle AKC = 60°$.
נסמן ב- a את אורך מקצוע הבסיס.
א. בטאו באמצעות a את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ב. בטאו באמצעות a את נפח הפירמידה.
ג. בטאו באמצעות a. את זווית הראש של הפאה הצדדית.



2. $ABCDS$ פירמידה ישרה עם בסיס ריבוע שכל מקצועותיה שווים באורכם. נסמן את אורך המקצוע ב- a.
א. הביעו את גובה הפירמידה באמצעות a.

נתון שנפח הפירמידה 300 סמ"ק.

ב. חשבו את שטח המעטפת של הפירמידה.

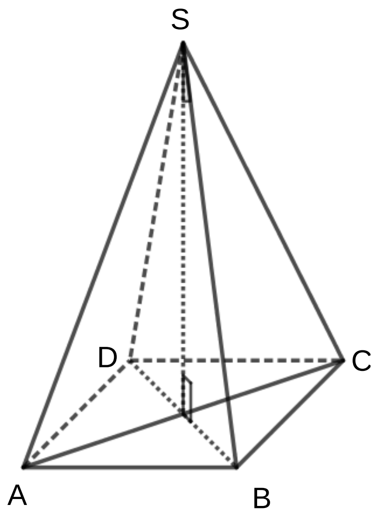


3. $ABCDS$ פירמידה ישרה עם בסיס ריבוע שכל מקצועותיה שווים באורכם. נתון ששטח מעטפת הפירמידה 80 סמ"ר.
א. חשבו את אורכם של מקצועות הפירמידה.
ב. חשבו את נפח הפירמידה.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.

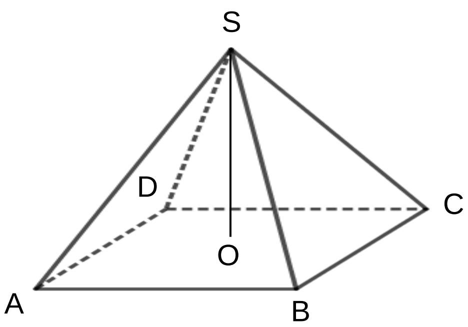
4. פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור.
נסמן ב- $2m$ את אורך אלכסון הבסיס.
הגובה לבסיס של הפאה הצדדית של הפירמידה שווה למקצוע הבסיס.

א. בטאו באמצעות m את אורך מקצוע הבסיס.
ב. בטאו באמצעות m את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה
ג. בטאו באמצעות m את גובה הפירמידה
ד. נתון שנפח הפירמידה הוא 600 סמ"ק. חשבו את m.
ה. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס.



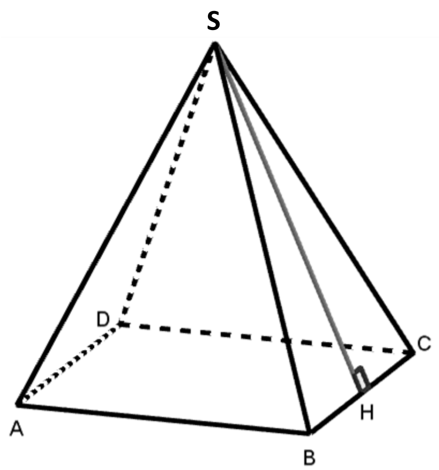
5. פירמידה ישרה $SABCD$ שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור. אורך הגובה לשוק של הפאה הצדדית הוא 12 ס"מ, ושטח הפאה הצדדית 78 סמ"ר.

א. חשבו את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ב. חשבו את אורך מקצוע הבסיס של הפירמידה
ג. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי של הפירמידה לבסיס.



6. פירמידה ישרה $ABCDS$ שבסיסה ריבוע כמתואר בציור.
EH הוא הגובה לבסיס של הפאה הצדדית SBC. אורך EH הוא 13 ס"מ ושטח המעטפת 260 סמ"ר.

א. חשבו את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה
ב. חשבו את נפח הפירמידה

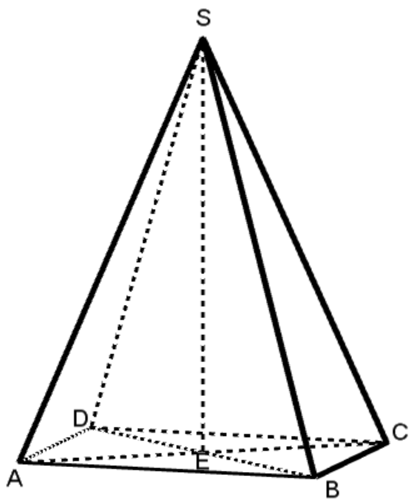


7. פירמידה $SABCD$ ישרה שבסיסה $ABCD$ הוא מלבן, גובה הפירמידה SO גדול פי 2 מאורך האלכסון.

א. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.

נתון גם: הזווית COB שבין אלכסוני הבסיס היא בת $30°$.

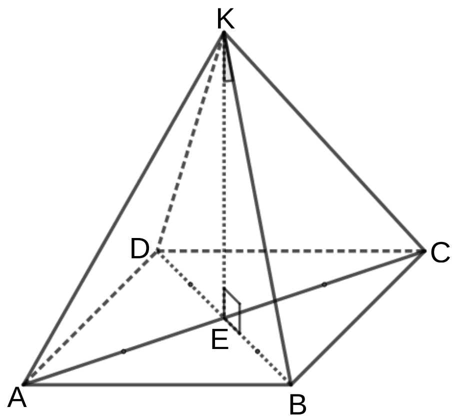
ב. נסמן ב- $2m$ את אורך אלכסון הבסיס. מצאו את m אם ידוע שנפח הפירמידה הוא 36 סמ"ק



8. פירמידה $KABCD$ ישרה שבסיסה מלבן כמתואר בציור. נתון: $AB=8$ ס"מ $BC=6$ ס"מ, E מפגש אלכסוני הבסיס של הפירמידה.

$\measuredangle BKE = 35°$.

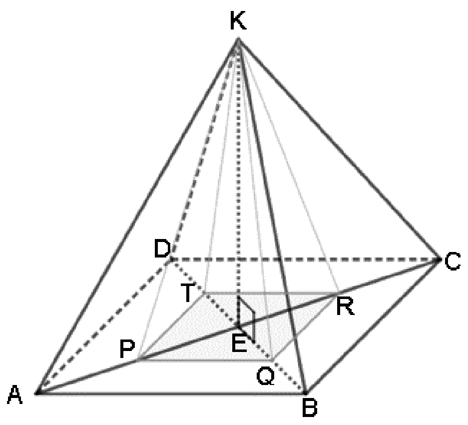
א. חשבו את נפח הפירמידה



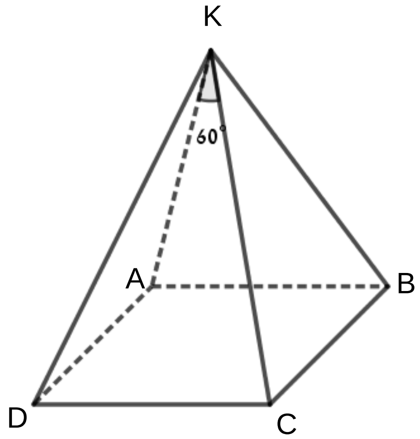
הנקודות P, Q, R ו- T הן בהתאמה אמצעי הקטעים EA, EB, EC, ו- ED.

ב. הסבירו מדוע גם הפירמידה $KPQRT$ היא פירמידה ישרה.

ג. חשבו את נפח הפירמידה $KPQRT$.



תרגילים מעורבים – פתרונות מלאים



1. פירמידה ישרה $KABCD$ שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור. $\measuredangle AKC = 60°$.

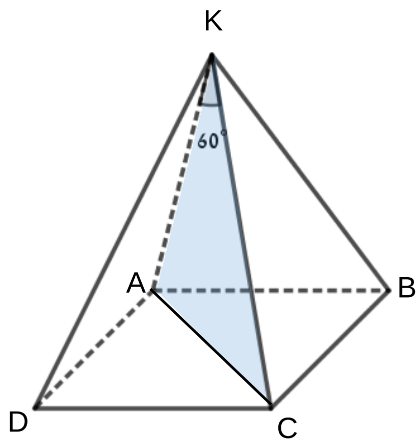
נסמן ב- a את אורך מקצוע הבסיס.

א. בטאו באמצעות a את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

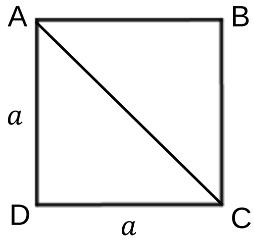
ב. בטאו באמצעות a את נפח הפירמידה.

ג. בטאו באמצעות a את זווית הראש של הפאה הצדדית.

פתרון



א. המשולש DKB הוא משולש שווה שוקיים עם זווית ראש בת $60°$. לכן זהו משולש שווה צלעות ומכאן שאורך המקצוע הצדדי שווה לאורך אלכסון הבסיס AC.



נחשב את אורך האלכסון באמצעות משפט פיתגורס במשולש ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

ומכאן שגם:

$$KC = a\sqrt{2}$$

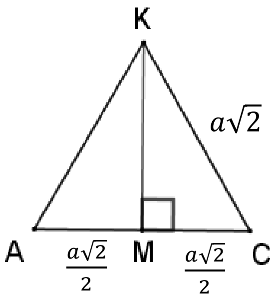
נוכל לרשום גם: $KC = 1.414a$

נסכם את שלבי הפתרון:

זיהוי משולש שווה צלעות KAC ⬅ חישוב AC באמצעות משפט פיתגורס במשולש ADC. ⬅ הסקת אורך המקצוע הצדדי.

ב. למציאת נפח הפירמידה נחשב תחילה את גובה הפירמידה.

מצאנו:



$$KC = 1.414a$$

$$MC = \frac{a}{2} = 0.707a$$

$$h^2 = AC^2 - MC^2$$

$$h^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{2} = 1.5a^2$$

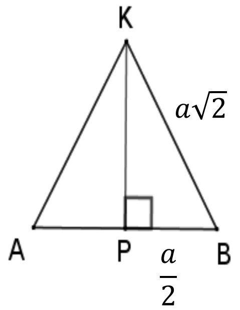
h מספר חיובי ולכן: $h = \sqrt{1.5}a \approx 1.225a$

במהלך הפתרון מצאנו:
$AC^2 = 2a^2$
נוכל גם להשתמש
בשבר העשרוני.

נפח הפירמידה:

$$V = 2a^2 - \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{1.5}a^3}{3}$$

ג. נתבונן במשולש ABK



$$\sin \measuredangle PKB = \frac{PB}{KB} = \frac{0.5a}{1.414a} = 0.3536$$

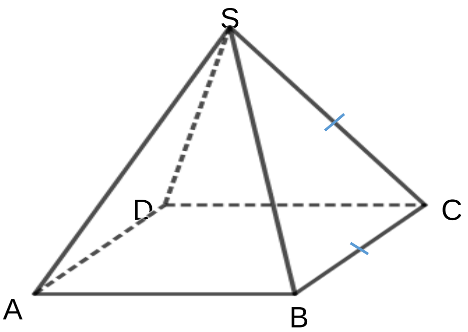
$\measuredangle PKB$ היא זווית חדה ולכן: $\measuredangle PKB = 20.71°$

הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים חוצה את זווית הראש:

$$\measuredangle AKB = 2\measuredangle PKB = 41.42°$$

גודל זווית הראש של הפאה הצדדית: $41.42°$.

.2 פירמידה $ABCDS$ ישרה עם בסיס ריבוע שכל מקצועותיה שווים באורכם. נסמן את אורך המקצוע ב- a.



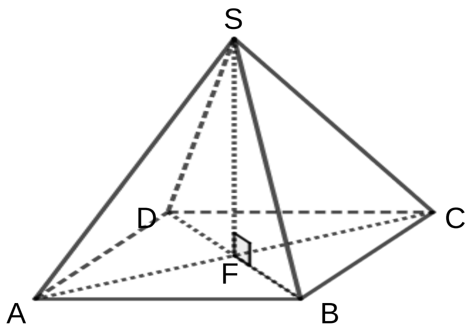
א. הביעו את גובה הפירמידה באמצעות a.

נתון שנפח הפירמידה 300 סמ"ק.

ב. חשבו את שטח המעטפת של הפירמידה.

פתרון

נסמן את מפגש האלכסונים ב- F.

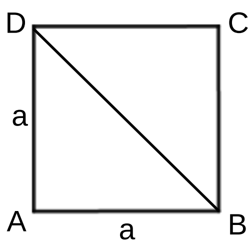


בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע עקב הגובה הוא במפגש האלכסונים.

א. למציאת גובה הפירמידה נתבונן במשולש SFB.

חישוב הגובה נחשב בשלבים:

נבטא את האלכסון BD	⟵	נמצא את FB.	⟵	נחשב את הגובה SF



חישוב BD:

באמצעות משפט פיתגורס במשולש ADB:

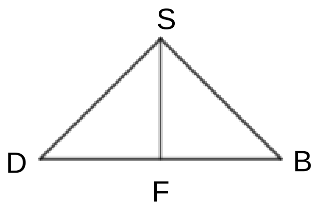
$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$$

$$BD = a\sqrt{2} \approx 1.414a$$

חישוב FB:

אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה. FB הוא חצי אלכסון.

$$FB = \frac{DB}{2} = 0.707a$$



חישוב SF:

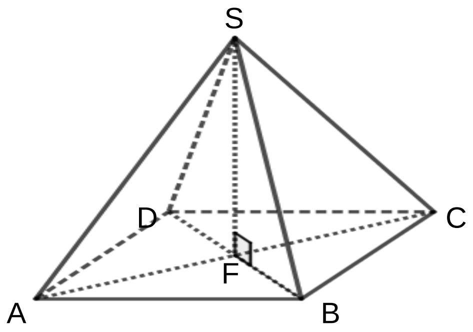
$$SF^2 = SB^2 - FB^2 = 0.5a^2$$

$$SF = 0.707a$$

ב. שלבי הפתרון:

נבטא את נפח הפירמידה באמצעות a ← נמצא את a. ← נחשב את שטח המעטפת

נפח הפירמידה:



$$V = \frac{\text{גובה} \cdot \text{שטח הבסיס}}{3}$$

הבסיס הוא ריבוע ולכן שטחו a^2.

מכאן:

$$\frac{a^2 h}{3} = 300$$

נציב

$h = SF = 0.707$ כדי לקבל משוואה עם משתנה אחד: a.

$$V = \frac{a^2 h}{3} = \frac{a^2 \cdot 0.707a}{3} = \frac{0.707a^3}{3}$$

נפתור משוואה:

$$\frac{0.707a^3}{3} = 300$$

$$a^3 = 900 \cdot 0.707$$

$$a^3 = 900 \cdot 0.707$$

$$a = 10.84$$

שטח המעטפת הוא סכום שטחי ארבעת הפאות של הפירמידה. כיוון ששלושת הפאות הם משולשים שווי צלעות הרי ששטח כל פאה:

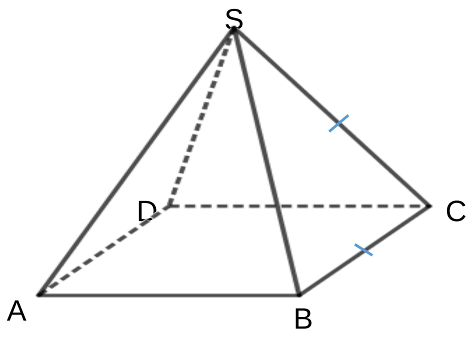
$\frac{1}{2}a^2 \sin 60° =$ שטח פאה צדדית.

כדי למצוא את שטח המעטפת נכפול ב- 4:

$$\text{שטח המעטפת} = 4 \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = 2 \cdot 10.84^2 \cdot 0.866 = 203.15$$

3. $ABCDS$ פירמידה ישרה עם בסיס ריבוע שכל מקצועותיה שווים באורכם.
נתון ששטח מעטפת הפירמידה 80 סמ"ר.

א. חשבו את אורכם של מקצועות הפירמידה.
ב. חשבו את נפח הפירמידה.



פתרון

נסמן את אורך המקצוע ב- a.

כמו בשאלה הקודמת נחשב את שטח הפאה לפי שתי צלעות והזווית ביניהן

$\frac{1}{2}a^2\sin 60 =$ שטח פאה צדדית.

כדי למצוא את שטח המעטפת נכפול ב- 4:

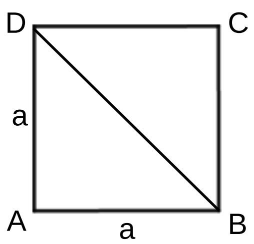
$$4\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 60° = 2a^2\sin 60° = \text{שטח המעטפת}$$

נציב את הנתון:

$$2a^2\sin 60° = 80$$

נקבל: $a \approx 6.79$

אורך המקצוע 6.79 ס"מ.



כדי לחשב את הנפח אנחנו זקוקים לגובה הפירמידה.

חישוב האלכסון BD באמצעות משפט פיתגורס במשולש ADB:

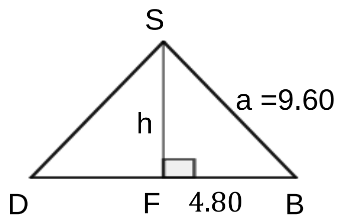
$$DB^2 = 6.79^2 + 6.79^2 = 92.21$$

$$DB = 9.60$$

$$FB = \frac{DB}{2} = 4.80$$

חישוב הגובה SF באמצעות המשולש SFB

$$SF^2 = SB^2 - FB^2$$



לאחר הצבה ופתרון מקבלים:

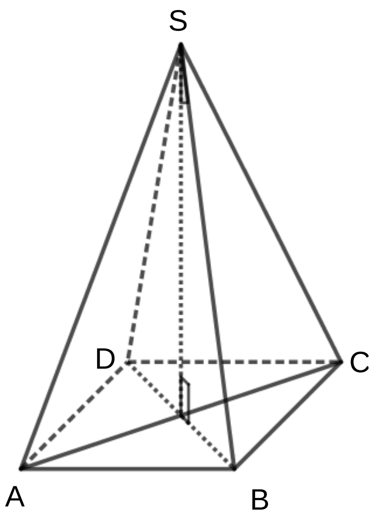
$h =$ 4.80 ס"מ

נציב בנוסחת הנפח ונקבל:

$$V = \frac{a^2\mathrm{h}}{3} = \frac{6.79^2 \cdot 4.8}{3} = 73.76$$

נפח הפירמידה: 73.78 סמ"ק.

4. פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור $SABCD$.
נסמן ב- $2m$ את אורך אלכסון הבסיס.
הגובה לבסיס של הפאה הצדדית של הפירמידה שווה לאלכסון הבסיס.

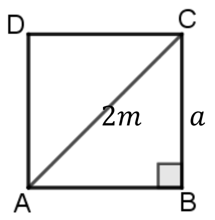


א. בטאו באמצעות m את אורך מקצוע הבסיס.
ב. בטאו באמצעות m את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה
ג. בטאו באמצעות m את גובה הפירמידה
ד. נתון שנפח הפירמידה הוא 600 סמ"ק. חשבו את m.
ה. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס.

פתרון

א. אורך מקצוע הבסיס הוא צלע הריבוע. משפט פיתגורס במשולש ABC:
לפנינו שתי דרכים לחישוב מקצוע הבסיס:

דרך א



נתבונן במשולש ABC.

נסמן את מקצוע הבסיס ב- a.

לפי משפט פיתגורס:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

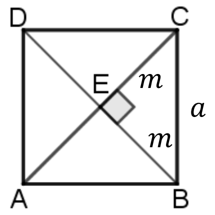
$$(2m)^2 = 2a^2$$

$$4m^2 = 2a^2$$

$$a^2 = 2m^2$$

$$a = \sqrt{2}m$$

דרך ב



נסמן את מפגש האלכסונים ב- E.

נתבונן במשולש BEC.

נזכור שאלכסוני הריבוע שווים זה לזה, חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. נסמן את חצי האלכסון ב- m.

נסמן את מקצוע הבסיס ב- a.

לפי משפט פיתגורס:

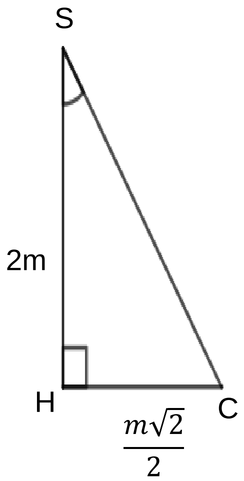
$$BC^2 = FB^2 + FC^2$$

$$a^2 = 2m^2$$

$$a = \sqrt{2}m$$

נשים לב שבדרך ב התבססנו על תכונות גיאומטריות של הריבוע ולכן יכולנו לקצר את החישוב האלגברי.

ב. נסמן ב- H את אמצע הפאה BC ונתבונן במשולש ישר זווית SHC:



הניצב SH הוא הגובה לבסיס בפאה הצדדית שהיא משולש שווה שוקיים, ולכן הוא גם התיכון לבסיס. על פי הנתון אורכו $2m$.

הניצב HC הוא חצי פאה צדדית ולכן אורכו $\frac{m\sqrt{2}}{2}$.

המקצוע הצדדי SC הוא היתר במשולש.

הניצב מחצית מקצוע הבסיס והגובה לבסיס הפאה הצדדית השווה על פי הנתון $2m$.

לפי משפט פיתגורס:

$$SC^2 = HC^2 + SH^2$$

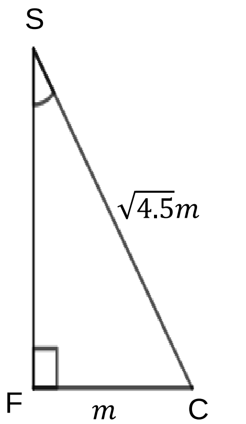
$$SC^2 = \left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2m)^2 = \frac{m^2 \cdot 2}{4} + 4m^2 = 4.5m^2$$

$$SC = \sqrt{4.5}m$$

אפשר לעבוד עם שברים עשרוניים:

$$\frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{1.41m}{2} = 0.71m$$

ג. גובה הפירמידה הישרה הוא האנך מקודקוד הראש לבסיס. עקב הגובה הוא בנקודת מפגש אלכסוני הריבוע. נסמן את עקב הגובה ב – F.



נתבונן במשולש ישר זווית SFC: היתר $SC = \sqrt{4.5}m$, הניצב FC שווה לחצי אלכסון הריבוע.

ממשפט פיתגורס

$$SF = \sqrt{4.5m^2 - m^2} = \sqrt{3.5}m$$

$$SF = \sqrt{3.5}m$$

ד. נציב את כל הידוע לנו עד כה בנוסחת נפח הפירמידה.

$$V = \frac{(BC)^2 \cdot SF}{3} = \frac{(m\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3.5}m}{3} = 600$$

$$\frac{2m^2 \cdot \sqrt{3.5}m}{3} = 600 \rightarrow m^3 \approx 481.07 \rightarrow \boxed{m \approx 7.83}$$

ה. נחשב את הזווית בין המקצוע SB לבסיס. הפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע לכן כל המקצועות הצדדיים יוצרים זוויות זהות עם הבסיס.

הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס היא הזווית בין המקצוע הצדדי לבין היטלו על הבסיס. SF גובה הפירמידה ולכן היטל SC על הבסיס הוא FC.

$\measuredangle SBF$ היא הזווית בין המקצוע לבסיס.

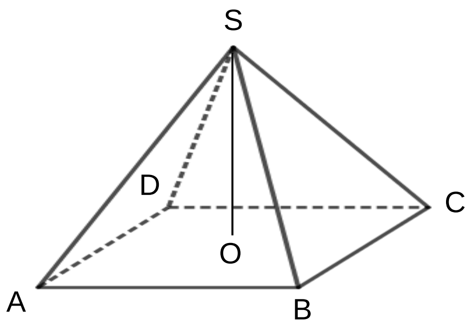
$$\tan\measuredangle SBF = \frac{SF}{FB} = \frac{\sqrt{3.5}m}{m} = \sqrt{3.5} \rightarrow \measuredangle SBF \approx 61.87°$$

5. $SABCD$ פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, כמתואר בציור. אורך הגובה לשוק של הפאה הצדדית הוא 12 ס"מ, ושטח הפאה הצדדית 78 סמ"ר.

א. חשבו את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

ב. חשבו את אורך מקצוע הבסיס של הפירמידה.

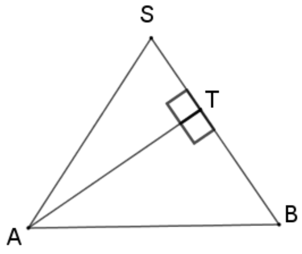
ג. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי של הפירמידה לבסיס.



פתרון

א. חישוב אורך המקצוע הצדדי:

נסמן ב- T את עקב הגובה לצלע SB.



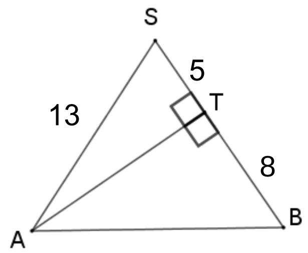
בעזרת הנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$S_{ABS} = \frac{SB \cdot AT}{2}$$

$$78 = \frac{SB \cdot 12}{2}$$

$AS = 13$ ס"מ

ב. חישוב מקצוע הבסיס:



השלב בפתרון	חישוב	הסברים והערות
חישוב ST	$ST^2 = AS^2 - AT^2$ $ST = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$	משפט פיתגורס במשולש AST
חישוב TB	$TB = 13 - 5 = 8$ ס"מ	הפרש קטעים

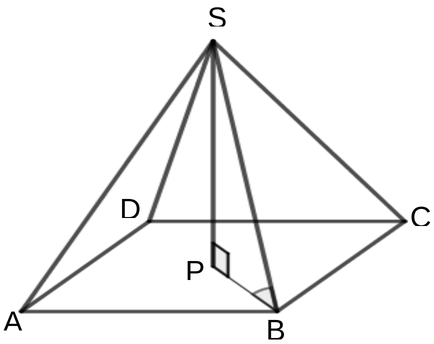
חישוב AB	$AB^2 = TB^2 + AT^2$ $AB = \sqrt{TB^2 + AT^2} =$ $= \sqrt{8^2 + 12^2} \approx 14.42$ ס"מ	משפט פיתגורס במשולש ATB

אפשר לחשב גם בדרך אחרת:

חישוב $\measuredangle AST$ במשולש AST	חישוב $\measuredangle ASM$ (במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס חוצה את זווית הראש)	נסמן ב- M את אמצע AB ונחשב את AM במשולש ASM	$AB = 2AM$

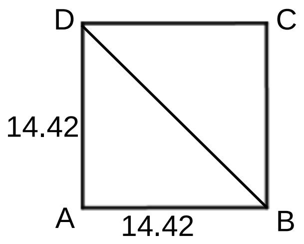
ג. חישוב הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס.

נסמן ב- P את מפגש האלכסונים.



הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס היא הזווית בין המקצוע הצדדי לבין היטלו על הבסיס ($\measuredangle SBP$).

נחשב את אורך האלכסון בעזרת משפט פיתגורס במשולש ABD.



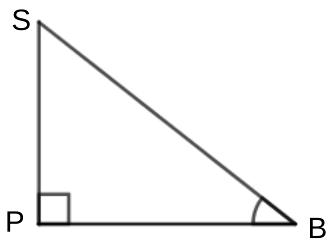
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 14.42^2 + 14.42^2$$

$$BD^2 = 416$$

$$BD = 20.40$$

בריבוע האלכסונים חוצים זה את זה ולכן הנקודה P נמצאת באמצע האלכסון DB.

$$BP = 10.20$$

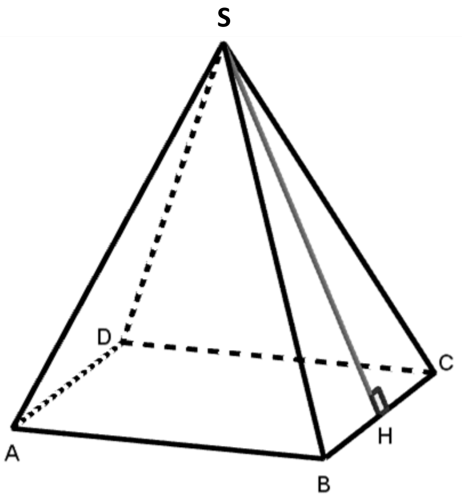


נתבונן עכשיו במשולש SPB:

$$\cos\measuredangle SBP = \frac{10.20}{13} = 38.31°$$

הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס: $38.31°$.

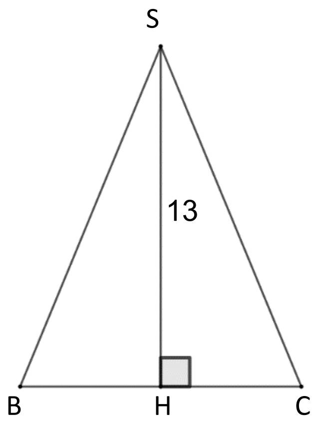
6. פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע $ABCDS$ כמתואר בציור. EH הוא הגובה לבסיס של הפאה הצדדית SBC. אורך EH הוא 13 ס"מ ושטח המעטפת 260 סמ"ר.



א. חשבו את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה
ב. חשבו את נפח הפירמידה

פתרון

א. כדי לחשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה נתבונן בפאה SBC.



שטח המעטפת הוא 260 סמ"ר, בסיס הפירמידה הוא ריבוע לכן כל הפאות הן משולשים חופפים, ושטח כל פאה הוא רבע משטח המעטפת. מכאן: שטח כל פאה צדדית הוא 65 סמ"ר.

$$S_{SBC} = \frac{BC \cdot SH}{2} = \frac{BC \cdot 13}{2} = 65$$

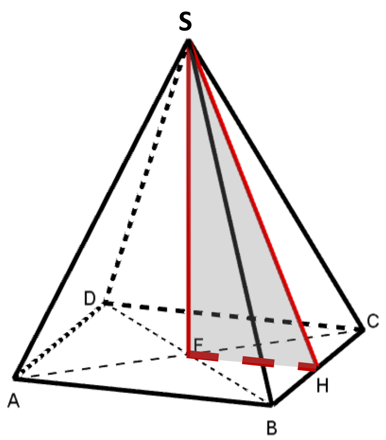
$$BC = 10 \text{ ס"מ}$$

הפירמידה ישרה לכן המשולש SBC שווה שוקיים והגובה לבסיס הוא גם תיכון לבסיס.

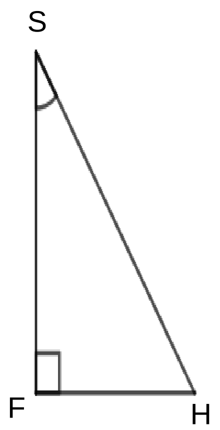
באמצעות משפט פיתגורס במשולש SHC נחשב את SC המקצוע הצדדי של הפירמידה:

$$SC = \sqrt{13^2 + 5^2} \approx 13.92 \text{ ס"מ}$$

ב. נחשב תחילה את גובה הפירמידה.



$BC = 10$ גובה הפירמידה הישרה הוא האנך לבסיס. עקב הגובה הוא במפגש אלכסוני הריבוע. נסמן נקודה זו ב – F.



$\mathrm{SF}=h$, h גובה הפירמידה. נתבונן במשולש SFH.
המשולש ישר זווית.

היתר SH שווה 13 על פי הנתון.

הניצב FH הוא קטע אמצעים במשולש ABC ולכן שווה
למחצית צלע הריבוע:

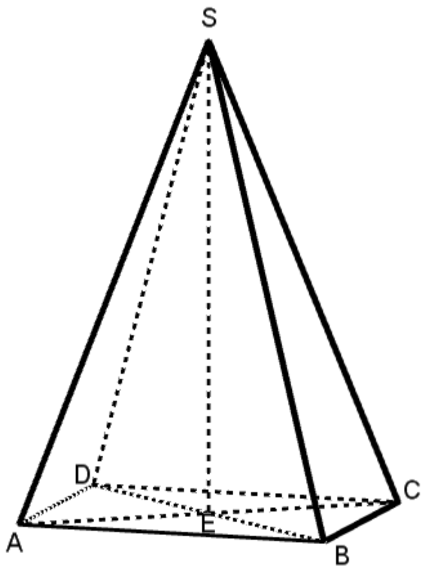
$FH=$ 5 ס"מ.

באמצעות משפט פיתגורס נחשב את h. $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$

ומכאן:

$$V=\frac{\text{שטח הבסיס}\cdot\text{גובה הפירמידה}}{3}=\frac{10^2\cdot 12}{3}=400 \text{ סמ"ק}$$

7. $SABCD$ פירמידה ישרה שבסיסה $ABCD$ הוא מלבן,
גובה הפירמידה SE גדול פי 2 מאורך האלכסון.



א. חשבו את הזווית בין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.

נתון גם: הזווית CEB שבין אלכסוני הבסיס היא בת $30°$.

ב. נסמן ב- $2m$ את אורך אלכסון הבסיס. מצאו את m אם ידוע שנפח הפירמידה הוא 36 סמ"ק.

פתרון

א. נתבונן במשולש SEC:

EC חצי אלכסון כי במלבן האלכסונים חוצים זה את זה.

נסמן $EC = m$.

$$ES = 2 \cdot 2m = 4m$$

$$\tan\alpha = \frac{4m}{m} = 4$$

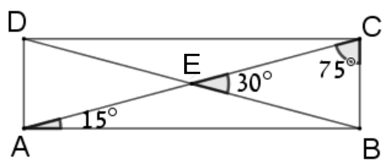
$$\alpha = \frac{4m}{m} = 75.96°$$

ב. שלבי הפתרון:

נבטא את שטח המשולש באמצעות m	← נבטא את נפח הפירמידה באמצעות m	← נחלץ את m

(1) נחשב תחילה את שטח הבסיס:

נעשה זאת בשתי דרכים:



דרך א

נחשב זוויות נוספות על בסיס הפירמידה, נבטא את צלעות הבסיס באמצעות m ונחשב את שטח המלבן.

$$\sin 15° = \frac{BC}{2m}$$

$$BC = 2m \cdot \sin 15°$$

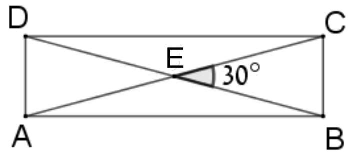
$$\cos 15° = \frac{AB}{2m}$$

$$AB = 2m \cdot \cos 15°$$

שטח הבסיס:

$$AB \cdot BC = 4m^2 \cdot \cos 15° \sin 15° = 4m^2 \cdot 0.25 = m^2$$

דרך ב



נחשב את שטח הבסיס כסכום של 4 משולשים. ניעזר בנוסחה לחישוב שטח משולש באמצעות שתי צלעות והזווית שביניהן:

שטח משולש: $s = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin a$ (a היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

$$S_{\Delta CEB} = S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} m^2 \sin 30° =$$

$$\frac{1}{2} m^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} m^2$$

$$S_{\Delta AEB} = S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} m^2 \sin 150° =$$

$$\frac{1}{2} m^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} m^2$$

סכום שטחי ארבעת המשולשים: m^2

(2) נבטא את נפח הפירמידה באמצעות m:

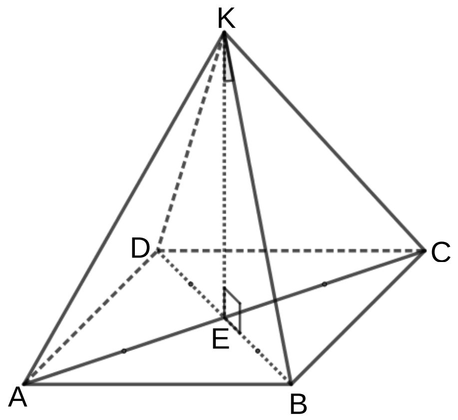
נפח הפירמידה שווה לשליש ממכפלת שטח הבסיס בגובה:

$$\frac{1}{3} m^2 \cdot 4m = \frac{4}{3} m^3$$

(3) נתון שנפח הפירמידה הוא 72 סמ"ק. נציב את הנפח בביטוי שקיבלנו בסעיף הקודם ונחלץ את m.

$$\frac{4}{3} m^3 = 36 \Longrightarrow m = 3$$

8. $KABCD$ פירמידה ישרה שבסיסה מלבן כמתואר בציור.



נתון: $AB =$ 8 ס"מ $BC =$ 6 ס"מ, E מפגש אלכסוני הבסיס של הפירמידה.

$\measuredangle BKE = 35°$.

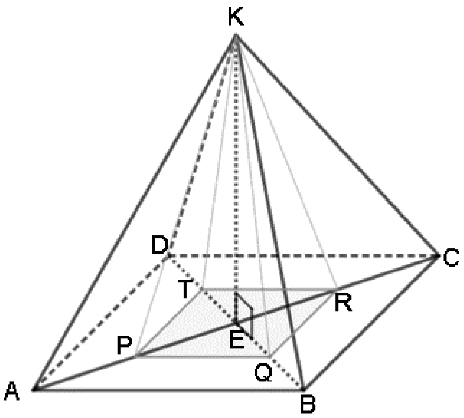
א. חשבו את נפח הפירמידה

הנקודות P, Q, R ו- T הן בהתאמה אמצעי הקטעים EA, EB, EC, ו- ED.

ב. הסבירו מדוע גם הפירמידה $KPQRT$ היא פירמידה ישרה.

ג. חשבו את נפח הפירמידה $KPQRT$.

פתרון



א. בפירמידה ישרה שבסיסה מלבן עקב הגובה הוא במפגש האלכסונים E.

הגובה מאונך לכל ישר העובר דרך הנקודה E.

נתבונן במשולש BKE. המשולש ישר זווית. היתר הוא BK, המקצוע הצדדי של הפירמידה, ניצב אחד הוא חצי אלכסון מלבן הבסיס וניצב שני הוא גובה הפירמידה KE.

נחשב את אורך האלכסון ובאמצעותו נמצא את גובה הפירמידה.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 36 = 100 \quad \rightarrow \quad AC = 10\text{ס"מ}$$

אלכסוני המלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה ולכן אורך כל חצי אלכסון הוא 5 ס"מ.

$$\tan\measuredangle BKE = \frac{BE}{KE}$$

$$\tan 35° = \frac{5}{KE}$$

$$KE = \frac{5}{\tan 35°} = 7.14\text{ ס"מ}$$

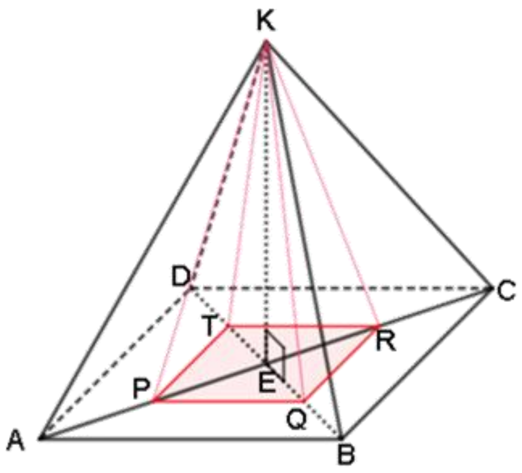
נפח הפירמידה:

$$V=\frac{\text{שטח הבסיס} \cdot \text{גובה הפירמידה}}{3}$$

$$V=\frac{AB\cdot BC\cdot KE}{3}=\frac{8\cdot 6\cdot 7.14}{3}=114.24$$

114.24סמ"ר נפח הפירמידה 114.24 סמ"ק

ב. כדי להראות שהפירמידה ישרה נראה שכל מקצועותיה שווים.
כיוון שבמלבן ארבעת קטעי האלכסון EA, EB, EC, ו- ED שווים זה לזה, גם החצאים שלהם שווים זה לזה ומכאן $EP=EQ=ER=ET$.
לכן נוכל להסיק $\Delta KEA\cong\Delta KEB\cong\Delta KEC\cong\Delta KED$ לפי צ.ז.צ, ולכן:
$KP=KQ=KR=KT$.
פירמידה שכל מקצועותיה הצדדיים שווים זה לזה היא פירמידה ישרה.



ג. כדי לחשב את נפח הפירמידה $KPQRP$ נחשב תחילה את שטח הבסיס. כיוון שאלכסוני הבסיס חוצים זה לזה ושווים זה לזה הבסיס הוא מלבן.
נמצא את אורכי הצלעות של המלבן:
PQ קטע אמצעים במשולש ABE לכן:

$$PQ=\frac{AB}{2}=4$$

QR קטע אמצעים במשולש BCE לכן: $RQ=\frac{BC}{2}=3$

$$V=\frac{\text{שטח הבסיס} \cdot \text{גובה הפירמידה}}{3}$$

$$V=\frac{4\cdot 3\cdot 7.14}{3}=\text{28.56 סמ"ק}$$