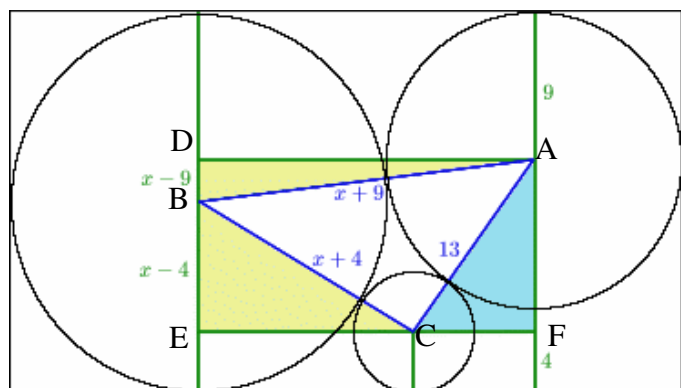


אוצרות פיתגורס - פתרונות

1. תיבת האוצר



נסמן את רדיוס המטבע הגדול ב x .
ראשית נחבר בין שלושת מרכזי המטבעות ונקבל משולש ABC בעל צלעות $x+9, x+4$ ו 13 .
(מדוע?)

לאחר מכן, ניצור שלושה משולשים ישרי זווית הנשענים על צלעות משולש זה, (המשולשים הצבועים באיור) באופן הבא:

נשרטט מלבן $ADEF$ העובר דרך שלושת מרכזי המעגלים.

כעת נוכל להפעיל את משפט פיתגורס בשלושת המשולשים ונקבל:

ב- $\triangle ABD$

$$BD = x-9 \quad AB = x+9$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (x+9)^2 - (x-9)^2 = x^2 + 18x + 81 - (x^2 - 18x + 81) = 36x$$

$$AD = 6\sqrt{x}$$

ב- $\triangle ABC$

$$BE = x-4 \quad BC = x+4$$

$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = (x+4)^2 - (x-4)^2 = x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 8x + 16) = 16x$$

$$BE = 4\sqrt{x}$$

ב- $\triangle AFC$

$$CF = FE - EC = AD - EC = 6\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$AF = BD + BE = (x-9) + (x-4) = 2x-13$$

$$CF^2 + AF^2 = AC^2$$

$$(2\sqrt{x})^2 + (2x-13)^2 = 13^2$$

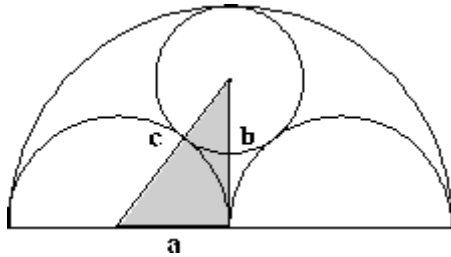
$$4x + 4x^2 - 52x + 169 = 169$$

$$4x^2 - 48x = 0$$

$$4x(x-12) = 0 \rightarrow x = 12$$

רדיוס המטבע הגדול הוא 12 ס"מ

2. מטבע הזהב



עלינו למצוא את רדיוס המטבע, המעגל, הקטן. ראשית נחבר את אחד ממרכזי חצאי המעגל עם מרכז המעגל הקטן. קו זה עובר דרך נקודת ההשקה בין שני המעגלים. (מדוע?)

נסמן את אורך הקטע המחבר שני המרכזים ב- c .

נוריד אנך ממרכז המעגל הקטן אל קוטר (חצי) המעגל הגדול.

אנך זה עובר דרך נקודת ההשקה בין שני חצאי המעגלים. (מדוע?)

נסמן את אורך האנך ב- b ואת רדיוס חצי העיגול ב- a . קיבלנו משולש ישר זווית בעל צלעו a, b, c .

נסמן את רדיוס מטבע הזהב, העיגול הקטן ב- r .

מכאן: $a = \frac{1}{2}, b = 1 - r, c = \frac{1}{2} + r$. על פי משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2 = \left(\frac{1}{2} + r\right)^2$$

$$\frac{1}{4} + 1 - 2r + r^2 = \frac{1}{4} + r + r^2$$

$$3r = 1$$

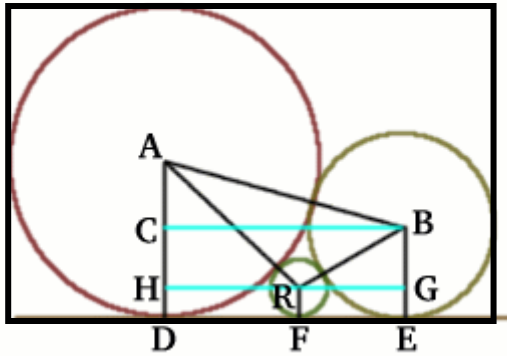
$$r = \frac{1}{3}$$

לכן רדיוס מטבע הזהב הוא $\frac{1}{3}$.

מכאן $a = \frac{3}{6}, b = \frac{4}{6}, c = \frac{5}{6}$ או $a = \frac{1}{2}, b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

לכן היחס בין a, b, c הוא 3:4:5 (צלעות המשולש).

3. ארד, כסף וזהב



א. עלינו למצוא את גודל מטבע הזהב, דהיינו את רדיוס המעגל.

שלושת המעגלים משיקים לצלע המלבן.

נסמן את המשיק המשותף ב DFE .

נסמן את רדיוס מטבע הזהב ב- r .

רדיוס מטבע הכסף שווה $BE=1$

רדיוס מטבע הארד שווה $AD=2$

$$AC = AH - BE = 2 - 1 = 1$$

$$BG = 1 - r, BR = 1 + r, AR = 2 + r, AH = 2 - r, AB = 2 + 1 = 3$$

נשתמש במשפט פיתגורס ב $\triangle AHR$ ו $\triangle RGB$

$$HR^2 + AH^2 = AR^2$$

$$HR^2 + (2 - r)^2 = (2 + r)^2$$

$$HR = \sqrt{8r} = 2\sqrt{2r}$$

$$RG^2 + BG^2 = BR^2$$

$$RG^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$$

$$RG = 2\sqrt{r}$$

$$3^2 = AC^2 + CB^2$$

$$9 = 1^2 + CB^2$$

$$8 = CB^2$$

$$CB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$CB = DE = HR + RG \quad \text{מצד שני} \quad 9 = 1^2 + CB^2 \quad \text{כי } CB = 2\sqrt{2}, \triangle ABC \text{ ב}$$

$$CB = 2\sqrt{2r} + 2\sqrt{r}$$

נשווה בין השניים:

$$CB = 2\sqrt{2r} + 2\sqrt{r} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2r} + \sqrt{r} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r}(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow r = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 = \frac{2}{3 + 2\sqrt{2}} = \dots = 6 - 4\sqrt{2}$$

ב. ממדי הקופסא: $2 \times AD = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$

$$(CB + \text{קוטר מטבע הארד} + \text{קוטר מטבע הכסף}) \quad 4 + 2 + 2\sqrt{r} + 2\sqrt{2r}$$