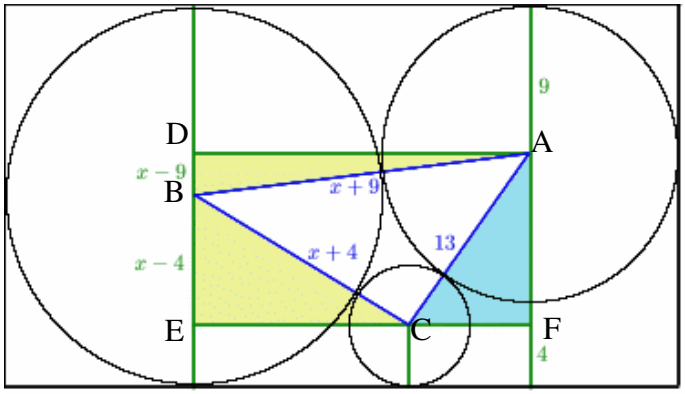
כנוז פיתגורס–חלול

1. صندوق الكنز



نرمز الى نصف قطر القطعة النقدية ب x.

اذا وصلنا بين المراكز الثلاثة للقطع النقدية نحصل على مثلث ABC بحيث اطوال اضلاعه $x+9, x+4$ ו 13. (لماذا؟)

بعد ذلك نبني ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية المرتكزة على أضلاع هذا المثلث (المثلثات الملونة –انظر الرسم) على النحو التالي: نرسم مستطيلا ADEF المار عبر مراكز الدوائر الثلاث.

نستعمل نظرية فيثاغورس في المثلثات الثلاثة ونحصل على:

ΔABDفي

BD= x-9 AB= x+9

$AD^2= AB^2-BD^2=(x+9)^2-(x-9)^2=x^2+18x+81-(x^2-18x+81) = 36x$

$AD=6\sqrt{x}$

ΔABD في

BE= x-4 BC= x+4

$EC^2= BC^2- BE^2+ =(x+4)^2-(x-4)^2=x^2+8x+16-(x^2-8x+16) = 16x$

$EC=4\sqrt{x}$

ΔAFC في

$CF=FE-EC=AD-EC= 6\sqrt{x} -4\sqrt{x} =2\sqrt{x}$

AF=BD+BE=(x-9)+(x-4)=2x-13

$CF^2+ AF^2=AC^2$

$(2\sqrt{x})^2+(2x-13)^2=13^2$

$4x+4x^2-52x+169=169$

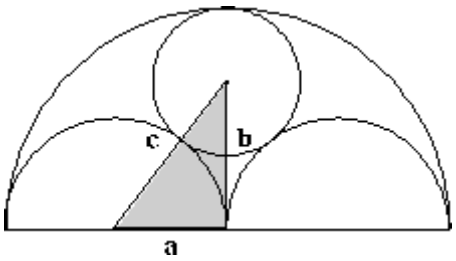
$4x^2-48x=0$

$4x(x-12)=0 \rightarrow x=12$

نصف قطر القطعة النقدية الكبيرة 12 سم.

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

2. قطعة النقود الذهبية



علينا ايجاد نصف قطر قطعة النقود-الدائرة الصغيرة. في البداية نوصل بين أحد مراكز أنصاف الدائرة مع مركز الدائرة الصغيرة. هذا الخط يمر عبر نقطة التماس بين الدائرتين (لماذا؟)

نرمز ب c الى طول القطعة التي تصل بين المركزين. ننزل عامودا من مركز الدائرة الصغيرة الى قطر (نصف) الدائرة الكبيرة. هذا العامود يمر عبر نقطة التماس بين أنصاف الدوائر (لماذا؟)

نرمز الى العامود ب b ولنصف قطر نصف الدائرة ب a.

من هنا نحصل على مثلث قائم الزاوية بحيث أطوال أضلاعه a, b, c .

نرمز الى نصف قطر قطعة النقود الذهبية –الدائرة الصغيرة –ب r.

من هنا: $a=\frac{1}{2}, b=1-r, c=\frac{1}{2}+r$.

حسب نظرية فيثاغورس: $a^2+b^2=c$.

$$(\frac{1}{2})^2+(1-r)^2=(\frac{1}{2}+r)^2$$

$$\frac{1}{4}+1-2r+r^2=\frac{1}{4}+r+r^2$$

$$3r=1$$

$$r=\frac{1}{3}$$

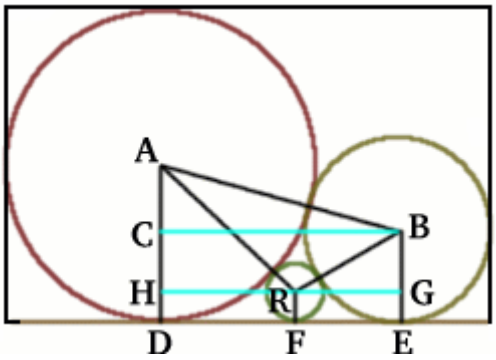
لذلك نصف قطر قطعة النقود الذهبية هو $\frac{1}{3}$.

من هنا $a=\frac{1}{2}, b=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ או $a=\frac{3}{6}, b=\frac{4}{6}, c=\frac{5}{6}$

لذلك العلاقة بين a, b, c . هي 3:4:5 (أضلاع المثلث).

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

3. برونز, فضة وذهب



أ.علينا ايجاد كبر قطعة النقود الذهبية, أي ايجاد نصف قطر الدائرة.

الدوائر الثلاث تمس ضلع المستطيل.

نرمز الى المماس المشترك ب DFE .

نرمز الى نصف قطر قطعة النقود الذهبية ب-r .

نصف قطر قطعة النقود الفضية يساوي $BE=1$

نصف قطر قطعة النقود البرونزية يساوي $AD=2$.

$AB=2+1=3$, $AH=2-r$, $AR=2+r$, $BR=1+r$, $BG=1-r$ (انظر الرسم).

$$AC=AH-CH$$
$$BG=CH$$
$$BG=1-r$$
$$AC=2-r-(1-r)=1$$
$$AC=1$$

نستعمل نظرية فيثاغورس ب ΔRGB ו ΔAHR

$$RG^2+BG^2=BR^2$$
$$RG^2+(1-r)^2=(1+r)^2$$
$$RG^2+1-2r+r^2=1+2r+r^2$$
$$RG^2=4r$$
$$RG=2\sqrt{r}$$

$$HR^2+AH^2=AR^2$$
$$HR^2+(2-r)^2=(2+r)^2$$
$$HR^2+4-4r+r^2=4+4r+r^2$$
$$HR^2=8r$$
$$HR=2\sqrt{2r}$$

في ΔABC , $CB=2\sqrt{2}$ لأن

$$3^2=AC^2+CB^2$$
$$9=1^2+CB^2$$
$$8=CB^2$$
$$CB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

من جهة أخرى

$$CB=DE=HR+RG$$
$$CB=2\sqrt{2r}+2\sqrt{r}$$

نساوي بين الاثنين

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

$$2\sqrt{2r}+2\sqrt{r}=2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2r}+\sqrt{r}=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{r}+\sqrt{r}=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{r}(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{r}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

נריבע הגיהנים: $r=\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2}{3+2\sqrt{2}}$. נכפיל ב $\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ כלומר:

$r=\frac{2}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\frac{6-4\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{6-4\sqrt{2}}{9-8}=6-4\sqrt{2}$ הוא חצי קוטר הבסיס של המטבע הזהבית.

ב. מידות התיבה:

$2\times AD=2\times 2=4cm$

ו $4+2+2\sqrt{r}+2\sqrt{2r}$ (CB+ קוטר בסיס המטבע הברונזית + קוטר בסיס המטבע הכסופה)

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il