



קשר בין גרף פונקציה לגרף נגזרת

מדריך למורה

כיתה יוד 5 יח"ל

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية



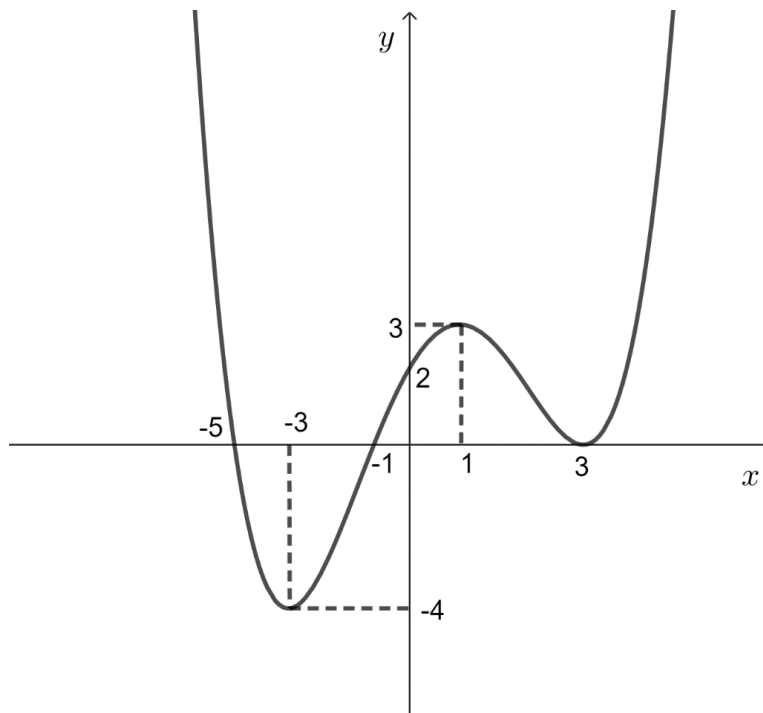
לפניכם שאלה קצרה העוסקת בקשר בין גרף פונקציה לגרף הנגזרת תוך התמקדות במציאת משיקים לפונקציה באמצעות גרף הנגזרת. הפונקציות בהן אנו עוסקים במשימה זו הן פונקציות רציפות וגזירות, שגם הנגזרת שלהן רציפה. בפונקציות כאלה, ערך הנגזרת הוא גם הערך של השיפוע של המשיק לגרף. בתוכנית הלימודים אנו לא עוסקים בפונקציות בהן ערך הנגזרת הוא לא ערך השיפוע של המשיק לגרף, אך, לנו כמורים, כדאי לדעת שאין הלימה מוחלטת בין שני המושגים.

תוך כדי הפתרון, מומלץ לחזור עם התלמידים קשרים בין פונקציה לנגזרתה:

- שיפוע המשיק לגרף של פונקציה בנקודה שעליו, הוא ערך הנגזרת של הפונקציה באותה נקודה.
- בנקודת קיצון שהיא פנימית לתחום, אם הפונקציה גזירה, אזי ערך הנגזרת בה הוא 0. אם הפונקציה לא גזירה בנקודה, מדובר ב-"חוד – שפיץ".
- בכל נקודה השייכת לתחום עלייה של פונקציה, שהוא תחום בו הפונקציה גזירה, הנגזרת אי-שלילית.
- בכל נקודה השייכת לתחום ירידה של פונקציה, שהוא תחום בו הפונקציה גזירה, הנגזרת אי-חיובית.
- אם ב- $x = a$ הפונקציה גזירה יש לפונקציה נקודת פיתול, אז לנגזרת יש ב- $x = a$ נקודת קיצון.

בנוסף, מומלץ לחזור (לפני הפתרון או תוך כדי) על מציאת משוואת ישר באמצעות שיפוע נתון ונקודה שעליו.

נתון גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . ידוע כי הגרף מתאים לנגזרת של פונקציה $g(x)$, כלומר: $g'(x) = f(x)$.



נתון:

$$g(3) = 4$$

$$g(0) = 1$$

$$g(-1) = 0$$

$$g(-5) = 4$$

$$g(1) = 3$$

$$g(-3) = 2$$

- א. רישמו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ב. רישמו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות הקיצון שלה.
- ג. רישמו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות הפיתול שלה.
- ד. סרטטו סקיצה לגרף של $g(x)$.
- ה. סרטטו סקיצה לגרף הנגזרת $f'(x)$.

פתרון:

א. בנקודת החיתוך של $g(x)$ עם ציר ה- y שיעור ה- x הוא $x = 0$. השיפוע בנקודה זו לפי הסרטוט הנתון של הנגזרת הוא: $g'(0) = f(0) = 2$
יחד עם הנתון $g(0) = 1$, נקבל את משוואת המשיק (נקבל מיידית את האיבר החופשי במשוואת הישר כי הוא שיעור ה- y של נקודת החיתוך עם ציר ה- y): $y = 2x + 1$. ניתן לבצע חישוב לפי נוסחה של משוואת ישר עם שיפוע $m = 2$ ונקודה שעליו $(0,1)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1$$

ב. שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ הם שיעורי ה- x בהם $g'(x) = f(x)$ שווה ל-0 ומחליפה סימן. זה קורה לפי הסרטוט עבור: $x = -5, -1$.
יחד עם הנתונים $g(-5) = 4$, $g(-1) = 0$, נקבל:
משוואת ישר עם שיפוע $m = 0$ ונקודה שעליו $(-1, 0)$: $y = 0$
משוואת ישר עם שיפוע $m = 0$ ונקודה שעליו $(-5, 4)$: $y = 4$

ג. שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של $g(x)$ הם שיעורי ה- x בהם ל- $g'(x) = f(x)$ יש נקודת קיצון פנימית. זה קורה לפי הסרטוט עבור: $x = -3, 1, 3$.
שיעורי ה- y בנקודות אלו בסרטוט הנתון של $g'(x) = f(x)$ הם שיפועי המשיקים בנקודות אלו.

יחד עם הנתונים $g(3) = 4$, $g(1) = 3$, $g(-3) = 2$ נקבל:

משוואת ישר עם שיפוע $m = g'(3) = f(3) = 0$ ונקודה שעליו $(3, 4)$:

$$y = 4$$

משוואת ישר עם שיפוע $m = g'(1) = f(1) = 3$ ונקודה שעליו $(1, 3)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x$$

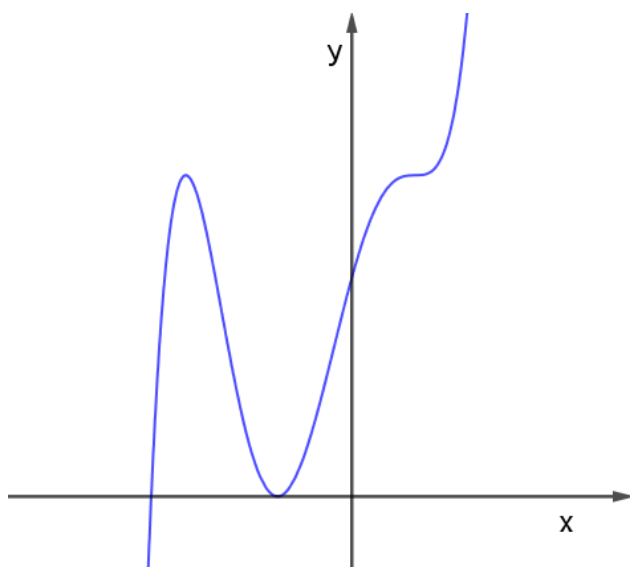
משוואת ישר עם שיפוע $m = g'(-3) = f(-3) = -4$ ונקודה שעליו $(-3, 2)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -4(x + 3)$$

$$y = -4x - 10$$

ד. להלן סקיצה אפשרית:



ה. **סקיצה אפשרית לגרף הנגזרת** $f'(x)$ (משיקולי תחומי עלייה/ירידה ונקודות קיצון של $f(x)$) והקשר שלהם לגרף הנגזרת (תחומי חיוביות ושליליות ונקודות אפס):

