זיהוי וניתוח אירועים קריטיים ככלי להתפתחות מקצועית של מורים

שולה וייסמן וסיגל רותם

תקציר

אחד האתגרים המרכזיים בתוכניות להכשרת מורים בהוראת מתמטיקה הוא החיבור בין תיאוריה לפרקטיקה. במאמר זה יידון פיתוח שימת הלב של מורים ומתכשרים להוראה לאירועים קריטיים במהלך ההתנסות שלהם בשטח באמצעות שימוש בזיהוי האירועים וניתוחם בעזרת מסגרת אשר מנחה את ההתבוננות. "אירועים קריטיים" הם סיטואציות כיתה שבהן החשיבה המתמטית של התלמידים נחשפת, ובכוחם ליצור הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים ושל המורה. במאמר יוצגו דוגמאות שבהן זוהו ונותחו אירועים קריטיים ונדון הפוטנציאל של האירועים ללמידה של המורה ושל התלמידים. הניתוח שיוצג מלווה בשאלות מנחות שבעזרתן אפשר לדון באירועים ובכך לממש את הפוטנציאל שלהם ככלי להתפתחות מקצועית של מורים. נתאר גם את פרויקט אקלי"ם (אירועים קריטיים בהוראה ובלמידה של מתמטיקה) שבו אירועים קריטיים שימש כלי מרכזי בהכשרת המורים ובמחקר שליווה את הפרויקט.

הקדמה

אנו מזמינות אתכם, מורים, מורי מורים וגם מתכשרים להוראה, להיזכר בסיטואציית כיתה שבה אמירה מתמטית של תלמיד או תלמידה יצרה הזדמנות להרחיב ולהעמיק את הידע המתמטי שלו או שלה, של תלמידי הכיתה ואולי אפילו שלכם. מה אמרו או עשו התלמידים? כיצד הגבתם? ובמבט לאחור, איך עוד יכולתם להגיב? במאמר זה אנו מכנות סיטואציית כיתה כזו "אירוע קריטי". אנו מגדירות אירוע קריטי כסיטואציית כיתה שבה החשיבה המתמטית של התלמידים נחשפת, ובכוחה ליצור הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים ושל המורה (Stockero & Van Zoest, 2013).

השאלות לעיל מבוססות על מחקרן של ג'ייקובס ושותפותיה (Jacobs et al., 2010), שלדבריהן, כאשר עונים על שאלות אלו ודומות להן מפתחים מיומנות של שימת לב לחשיבה מתמטית של תלמידים. אנו מתבססות על הניסיון העשיר של המחקר המלמד שקידום מיומנויות שימת הלב של מורים ושל מתכשרים להוראה תורם להתפתחות מקצועית שלהם (Weyers et al., 2023). על סמך ניסיוננו בשנים האחרונות באוניברסיטת חיפה אנו מציעות לקדם את שימת הלב של מורים ומתכשרים להוראה במהלך ההתנסות שלהם בשדה באמצעות שימוש בזיהוי אירועים קריטיים וניתוחם. במאמר זה נשתף מניסיוננו בשימוש באירועים קריטיים, נביא דוגמאות מהשדה ומהספרות של התרחשויות שקרו בכיתה, נציג את פרויקט אקלי"ם (אירועים קריטיים להוראה ולמידה של מתמטיקה) יחד עם הפנִיָה לחומרים באתר. לבסוף, נדון בפוטנציאל של אירועים קריטיים ככלי להתפתחות מקצועית של מורים דרך מסגרת שאותה ניתן לאמץ בהשתלמויות מורים, בקורסים להכשרת מורים וגם בישיבות צוות.

שימת לב לאירועים קריטיים

מטרות תוכניות להכשרת מורים הן רבות וביניהן פיתוח ידע מתמטי וידע מתמטי להוראה, מיומנויות פדגוגיות וזהות מקצועית. אחת המטרות המרכזיות בתוכניות להכשרת מורים היא ללמד מתכשרים להוראה להיות מורים בעלי ידע תוכן מתמטי אשר יודעים להתאים את התוכן לצרכים ולהבנה של התלמידים באופן שעולה בקנה אחד עם מטרות תוכנית הלימודים (למשל, Grossman et al., 2009). כדי לעמוד במשימה זו המתכשרים להוראה נדרשים לשלב את הידע התיאורטי שלמדו באקדמיה עם הפרקטיקה בשדה. חיבור זה בין תיאוריה לפרקטיקה בהוראת מתמטיקה נתפס כאחד האתגרים המרכזיים בתוכניות הכשרת מורים למתמטיקה, בעיקר מכיוון שהוא דורש מהמתכשרים להוראה לשלב מרכיבים שונים של ידע ומיומנויות פדגוגיות ללא ניסיון מעשי (למשל, Leikin, 2008). אחת הדרכים להתמודד עם קושי זה היא בעזרת הכשרה מבוססת שדה המספקת למתכשרים להוראה התנסות כיתתית ממשית (למשל, Ball & Forzani, 2009), מאחר שסביבה זו מאפשרת להם לחוות סביבה דומה לפרקטיקה המקצועית העתידית שלהם (למשל, Feiman-Nemser, 2001).

סביבת הכיתה היא מורכבת ומלאת התרחשויות, ובעוד מורים בוחרים באופן מושכל לאיזו אמירה של תלמיד או תלמידה להגיב וממה להתעלם (van Es & Sherin, 2021), מתכשרים להוראה ומורים בתחילת דרכם המקצועית עלולים לא לשים לב לאירועים קריטיים בעלי פוטנציאל להעמקה במתמטיקה המוצגת בשיעור (Star & Strickland, 2008). לפיכך, כדי שמורים יוכלו לפתח מיומנויות הוראה המתאימות את ההוראה להבנה של התלמידים ובכך להרחיב את הידע המתמטי של התלמידים, יש לפתח את שימת הלב של המורים לאירועים קריטיים.

שימת לב של מורים לחשיבה המתמטית של תלמידים בעזרת ההתמקדות באירועים קריטיים נדונה רבות במחקר בחינוך מתמטי (למשל, Weyers et al., 2023). נמצא כי מיקוד ההתבוננות של המורים המלמדים או הצופים בשיעור באירועים קריטיים בעזרת מסגרת אשר מנחה את ההתבוננות, עוזרת להם לזהות אירועים קריטיים ולהתחקות אחר החשיבה של התלמידים (Santagata et al., 2007). יתרה מכך, שימת לב לאירועים קריטיים מתפתחת ככל שמתְרַגלים אותה (למשל, Rotem & Ayalon, 2023). לשם כך אנו מציעות להשתמש במסגרת התיאורטית של שימת לב (noticing) לחשיבה של תלמידים (Jacobs et al., 2010), שלפיה שימת הלב כוללת שלוש מיומנויות: 1) זיהוי האמירות המתמטיות של תלמידים כפי שבאות לידי ביטוי באינטראקציה מורה-תלמידים, 2) ניתוח ופירוש האמירות המתמטיות של התלמידים כדי להתחקות אחר דרכי החשיבה המתמטית העומדות בבסיס האמירות האלה ו־3) תגובה לאמירות התלמידים בהתאם לפרשנות שהוצעה קודם לכן. יישום הפרקטיקה מסייע למורים להתאים את התגובה להתרחשות וכפועל יוצא תומך בהעמקת הידע המתמטי של התלמידים (Jacobs et al., 2010).

במשך חמש השנים האחרונות עבדנו בפרויקט אקלי"ם עם מתכשרים להוראה ומורים סביב אירועים קריטיים, וחלק מהם אנו מציגות במאמר זה. המתכשרים והמורים התבקשו לזהות אירועים קריטיים מתוך שיעורי צפייה או שיעורים שלימדו, לנתח בקהילת עמיתים את האירועים הללו, ולהציע דרכי תגובה אלטרנטיביות. עבודה זו נעשתה בפרויקט אקלי"ם בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. במחקר שליווה את הפרויקט נמצא כי ההשתתפות בו שיפרה את מיומנות שימת הלב של המתכשרים להוראה, והדבר בא לידי ביטוי בכך שהם שמו לב לפרטים רבים יותר מאשר בעבר של האירועים הקריטיים שאותם הם זיהו, וכן הציעו פרשנות להיבטים רבים מאוד של האירוע (Rotem & Ayalon, 2023). נראה שהדיון והעיסוק באירועים קריטיים בהכשרת מורים הם בעלי פוטנציאל לתמוך בהתפתחות מקצועית של מורים. כאמור, בהצגת הדוגמאות הבאות נשתף בניסיוננו ונדון

בפוטנציאל של אירועים קריטיים ככלי להתפתחות מקצועית של מורים.

על ההקשר המחקרי: פרויקט אקלי"ם

פרויקט אקלי"ם (אירועים קריטיים בהוראה ובלמידה של מתמטיקה) החל לפעול ב־2016 בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה בראשותה של ד"ר מיכל איילון והייעוץ האקדמי של פרופ' רוזה לייקין. מטרת התוכנית הייתה להכשיר מורים להוראה של ארבע וחמש יחידות לימוד במתמטיקה, בהתאם לתיאוריות העדכניות בהוראת מתמטיקה, ותוך כדי יצירת קשרים משמעותיים בין התיאוריה לפרקטיקה. הכלי המרכזי שהשתמשנו בו כדי לעזור למשתתפים בפרויקט ליצור את הקשרים הללו הוא שימת לב לאירועים קריטיים. ביקשנו מהמשתתפים לזהות ולנתח אירועים קריטיים שהתרחשו בכיתתם (בצפייה במורה מנוסה או במהלך ההוראה שלהם, כפי שמתואר מטה) ואירועים קריטיים המופיעים בגיליונות על"ה שאותם נביא בהמשך.

המתכשרים להוראה התלוו למורים מנוסים בהוראת "5 יחידות לימוד" פעם בשבוע למשך יום לימודים מלא, במהלכו הם צפו במורה ולימדו שיעורים בעצמם בכיתות הלומדות 4 ו־5 יחידות לימוד. הם התבקשו לזהות אירועים קריטיים בעת הצפייה במורים המנוסים, בחבריהם או בשיעורים שלימדו בעצמם. לאחר הצפייה, ההתנסות בהוראה וזיהוי האירועים התקיימה סדנא בבית הספר שבה קיימו המורים המנוסים שיח רפלקטיבי בהתאם למסגרת ייעודית (איור 1) המבוססת על המסגרת של ג'ייקובס (Jacobs et al., 2010). אחת לחודש התקיים מפגש של המתכשרים להוראה יחד עם המורים המנוסים וצוות הפרויקט באוניברסיטה לדיון נוסף באירועים הקריטיים שזוהו, והפעם כלל השיח הפרשני חיבור וקישור ההיבטים השונים של האירוע עם תיאוריות העוסקות בהוראה ולמידה של המתמטיקה. נוסף לכך, כללו המפגשים באוניברסיטה גם ניתוח של אירועים קריטיים מהספרות, למשל אירועים מגיליונות על"ה, שמובאים בהמשך המאמר. לאחר כארבע שנים של עבודה עם מתכשרים להוראה, התרחבה התוכנית וצורפה אליה גם קהילת מורים במסגרת השתלמות לפיתוח מקצועי. גם בהשתלמות זו זיהו המורים אירועים קריטיים שהתרחשו בשיעורים שלימדו, ולאחר מכן במפגשים באוניברסיטה הם ניתחו את האירועים המזוהים על פי המסגרת של הפרויקט, ודנו בהם ובניתוח שלהם כמרכיב מרכזי המסייע לקשר בין התיאוריה לפרקטיקה. נציין כי המטרה לא הייתה לבחון אם המתכשרים להוראה והמורים מזהים אירועים שנתפסים כאירועים קריטיים, אלא לסייע בידם לפתח מיומנויות של זיהוי אירועים המעוגנים בחשיבה המתמטית של התלמידים, ולתמוך בפיתוח רפרטואר של דרכי הוראה דרך חשיבה על דרכי הוראה אלטרנטיביות לאירועים קריטיים אותנטיים שזיהו מתוך ההוראה. איור 1 מציג מסגרת ובה השאלות שנשאלות בכל שלב בהתאם למסגרת הייעודית ואנו ממליצות להשתמש בה לחשיבה ודיון באירועים קריטיים.

האירועים הקריטיים שהצטברו מוינו (לפי נושא מתמטי, כיתה ורמה), נותחו ואוגדו באתר אקלי"ם (https://aklim.haifa.ac.il/) והם משמשים במסגרות שונות של התפתחות מקצועית.

נציג להלן שלוש דוגמאות להתבוננות באירועים קריטיים. נפתח באירוע שדווח על מורה שהשתתפה בפרויקט ונמשיך בהצגת שתי דוגמאות מגיליונות קודמים של על"ה ששימשו אותנו כדי לעזור למשתתפים לפתח את שימת הלב שלהם לאירועים קריטיים. בכל אחת מהדוגמאות נתחיל בתיאור האירוע, לאחר מכן נציע ניתוח אפשרי לפי המסגרת של הפרויקט המתוארת באיור 1, ולבסוף נציין את הפוטנציאל ללמידה של המורה ושל התלמידים בזמן אמת מהאירוע. יש דרכים רבות לנתח את האירועים. ההצעות המובאות במאמר זה מבוססות על ניסיוננו בפרויקט ומטרתן לעודד ולפתח את שימת הלב לאירועים קריטיים של המתכשרים להוראה והמורים המשתתפים בהשתלמויות הפרויקט, לאחר שהאירוע קרה.

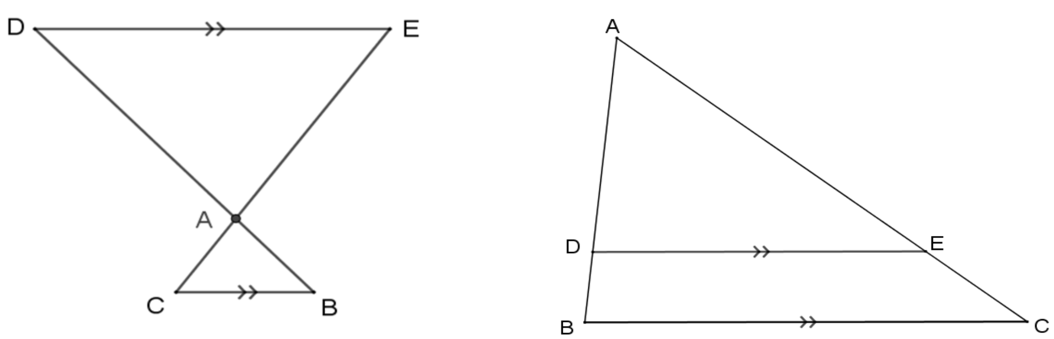
איור 1: מסגרת לחשיבה ודיון באירועים קריטיים

האם כל היפוך הוא משפט הפוך?

תיאור האירוע

האירוע המתואר התרחש בשיעור גיאומטריה בכיתה י' הלומדת חמש יח"ל מתמטיקה. בשיעור הקודם התלמידים למדו והוכיחו את ההרחבה למשפט תאלס (איור 2). בשיעור שבו התרחש האירוע התבקשו התלמידים לנסח את הטענה ההפוכה (אם ישר חותך שתי צלעות של משולש או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים אז הישר מקביל לאחת מצלעות המשולש). המורה שלימדה את השיעור תיארה את האירוע והעלתה אותו על הכתב לאחר התרחשותו. נציג כאן אמירות של ארבעה תלמידים. תיאור מלא של האירוע וניתוחו ניתן למצוא באתר אקלי"ם: https://aklim.haifa.ac.il/teaching-event/thales/

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים. כלומר: אם $DE \parallel BC$ אז $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$



איור 2: ההרחבה למשפט תאלס שלמדו התלמידים

מעיין (כל השמות בדויים), אחת התלמידות בכיתה, הציעה את הטענה ההפוכה הבאה:

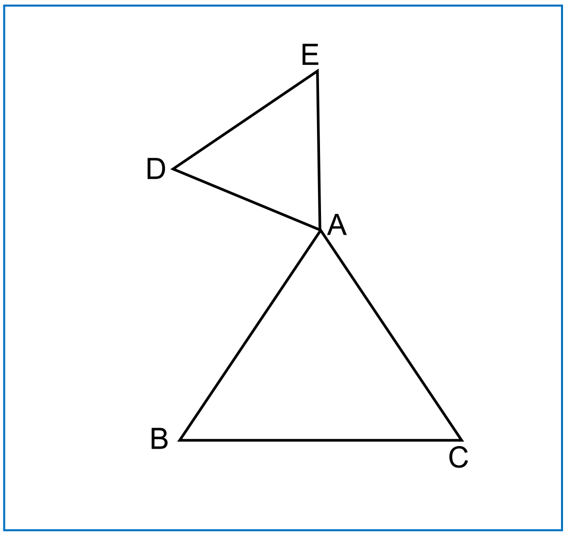
אם מתקיים היחס $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ אז הישרים מקבילים ($DE \parallel BC$).

המורה: כיצד נבדוק אם טענתה של מעיין נכונה? עלינו להוכיח או להפריך אותה.

התלמידים עבדו בזוגות בניסיון להוכיח או להפריך את הטענה של מעיין ולאחר מכן חזרו למליאה להצגת ממצאיהם.

הצעה של נויה: [ניגשת ללוח, מסרטטת ומסבירה] לדעתי אפשר להפריך את הטענה כך (איור 3):

במקרה המתואר באיור 3, המשולשים דומים, לכן היחס $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ מתקיים, אבל הישרים DE ו־BC לא מקבילים!

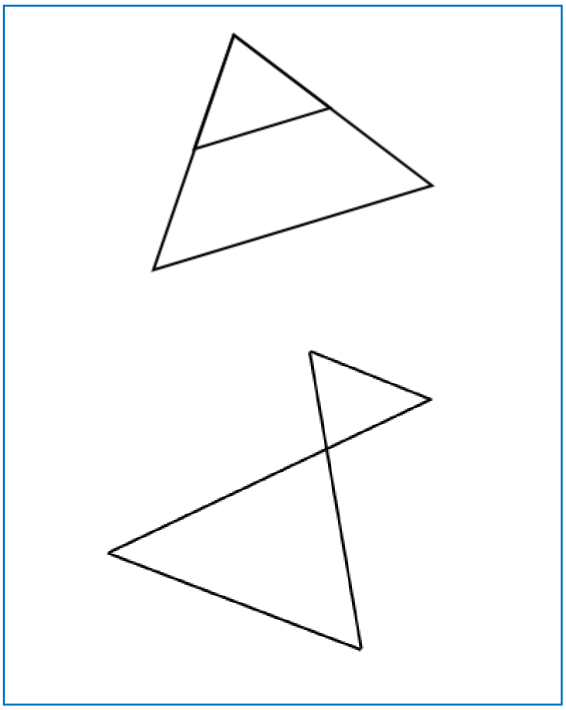


איור 3: ההצעה של נויה

המורה: יפה מאוד! רעיון מאוד יפה! [לכיתה], האם לדעתכם ההצעה של נויה מתאימה ומפריכה את הטענה שניסחה מעיין?

מיכאל: זו לא בדיוק טענה הפוכה למשפט שלנו.

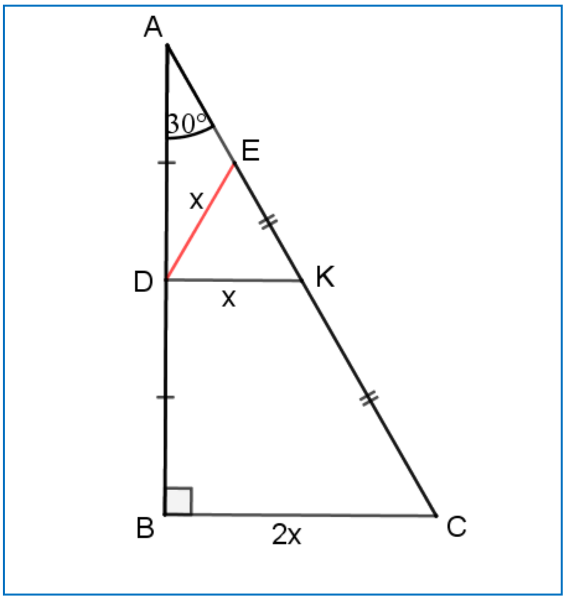
המורה: הכיוון שלך נכון, מיכאל. הטענה של מעיין היא לא בדיוק טענה הפוכה להרחבה של משפט תאלס. הטענה ההפוכה עוסקת בשני ישרים החותכים שוקי זווית או את ההמשך של שוקי הזווית. כלומר, על אחד משני המצבים באיור 4:



איור 4: שני המצבים שאליהם מתייחסת ההרחבה של משפט תאלס

המורה: יש הצעה נוספת?

ירון ניגש ללוח ומסרטט (איור 5):



איור 5: ההצעה של ירון

ירון: משולש ABC הוא משולש $30°, 60°, 90°$.

נסרטט את DK קטע אמצעים במשולש ונסמן אותו ב־x. מכאן נובע $BC = 2x$. במשולש ישר הזווית ABC, BC הוא הניצב שמול הזווית 30° ולכן הוא שווה למחצית היתר, כלומר, היתר $AC = 4x$ ומתקיים: $CK = AK = 2x$.

נוסף לכך, מהבנייה נובע $\Delta ADK \sim \Delta ABC$. כעת נבנה DE תיכון ליתר ב־ ΔADK. נקבל: $DE = x$ מכיוון שבמשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

כלומר קיבלנו:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

אבל $DE \nparallel BC$.

ניתוח האירוע

הבחירה של המורה לדווח על האירוע מרמזת על כך שהיא זיהתה סיטואציית כיתה זו כאירוע קריטי. נראה שהאמירה של מעיין ובעקבותיה אמירות התלמידים המשתתפים בדיון חושפות את חשיבתם, ומהוות הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של כלל תלמידי הכיתה. ננסה גם אנחנו להתחקות אחר החשיבה של התלמידים באירוע ("להיכנס לראש התלמידים") ואחר החשיבה של המורה ("להיכנס לראש של המורה"). לאחר מכן נציע אלטרנטיבות לתגובת המורה, וכך נרחיב את רפרטואר דרכי ההוראה שלנו. נתבסס על הדיווח של המורה וננתח את האירוע לפי המסגרת המוצגת באיור 1.

1. נתחקה אחר החשיבה של התלמידים: כיצד אפשר לפרש את אמירות התלמידים ופעולותיהם?

נשים לב לאלמנטים אחדים של ההתרחשות.

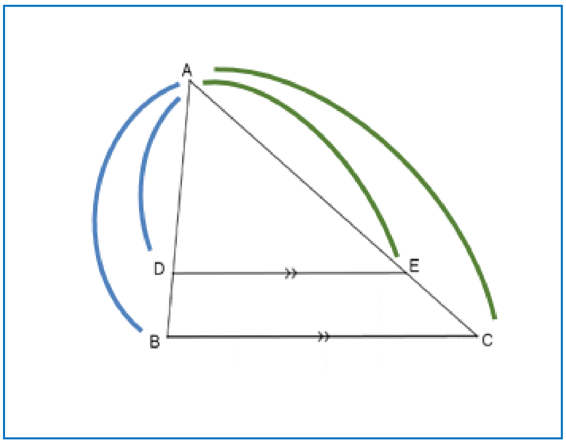
במשפט ההרחבה (איור 6) הטענה המקורית היא:

ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים. כלומר: אם $DE \parallel BC$ אז $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

על הלוח כתובה הטענה בקיצור:

אם $DE \parallel BC$ אז $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ללא החלק המילולי שבו נאמר שהנקודות D ו־E נמצאות על צלעות המשולש או על המשכיהן.

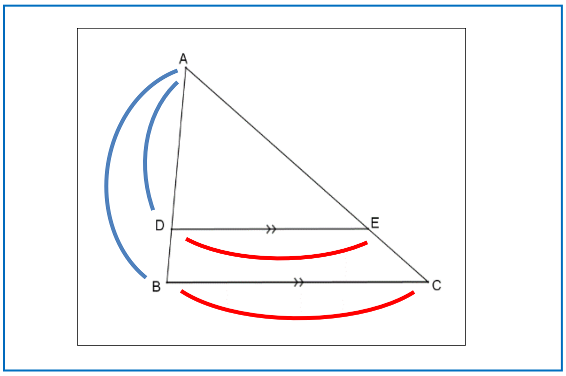


איור 6: איור של משפט ההרחבה

מעיין

הטענה של מעיין (איור 7) היא:

אם $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ אז $DE \parallel BC$.



איור 7: הטענה של מעיין

מעיין נוקטת סגנון כתיבה מקוצר שבו נכתבה הטענה המקורית על הלוח.

הקשר $DE \parallel BC$ ששימש כנתון בטענה המקורית משמש עכשיו תוצאה שאותה צריך להוכיח.

בטענה המקורית התוצאה שהוכחה הייתה הפרופורציה $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$.

גם בטענה של מעיין התנאי הנתון הוא פרופורציה בין קטעים, אבל זו אינה אותה הפרופורציה שהופיעה בתוצאה של הטענה המקורית.

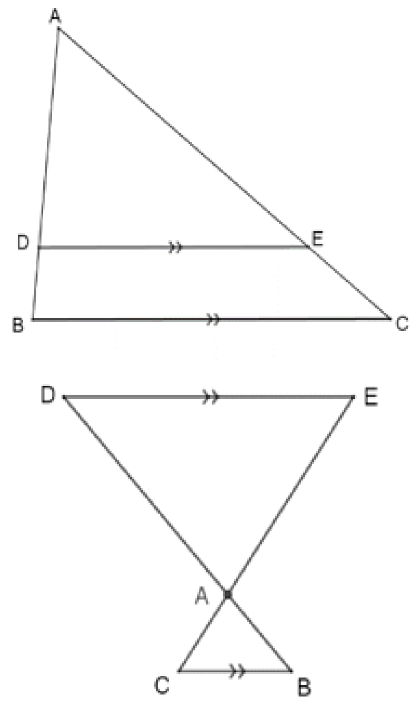
בניסיון "להיכנס" לראש שלה, נוכל להניח שמאחר שהיא מכירה את הפרופורציה של צלעות משולשים דומים בשני המצבים המתוארים באיור 8:

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

ייתכן שהיא משנה את הנתון מתוך מחשבה שאין חשיבות באיזה זוג צלעות של המשולש בוחרים לפרופורציה. לראייתה, כאשר יש שוויון יחסים בין שני זוגות של צלעות של משולש, אז אותה פרופורציה קיימת גם בזוג השלישי. לכן, מבחינתה, שוויון יחסים של שני זוגות של צלעות במשולשים מספיק כדי לקבוע ש־ $DE \parallel BC$.



איור 8: שני המצבים שאולי משמשים את מעיין כבסיס לטענה שלה

נויה

מההצעה של נויה ניתן להתרשם כי היא משתמשת בידע שלה מדמיון משולשים כדי להפריך את הטענה של מעיין על ידי הבאת דוגמה נגדית: היא מסרטטת שני משולשים דומים במנח המתואר באיור 3, כדי להראות שיחס פרופורציוני בין שני זוגות של צלעות של שני משולשים לא גורר הקבלה של אחד הזוגות האלה. עם זאת, נויה מתייחסת רק לתנאי הרשום על הלוח, ומתעלמת מנתון "סמוי" שהופיע בחלק המילולי של משפט תאלס: מדובר במצב שבו שני ישרים חותכים שוקי זווית, או את ההמשך של שוקי הזווית, ועקב כך הנקודות D ו־E צריכות להיות מונחות בהתאמה על הצלעות AB ו־AC או על המשכיהן.

כשמתעלמים מהתנאי "הסמוי" מתקבלת טענה שהרבה יותר קל להפריכה.

ירון

ההצעות של ירון ונויה מתייחסות לטענה של מעיין ומפריכות אותה על ידי דוגמה נגדית. ירון מציע דוגמה נגדית המתארת משולש ישר זווית עם זווית חדה של 30°. מהמשפטים המתקיימים במשולש זה הוא מסיק כי גם התיכון ליתר וגם הניצב מול הזווית 30° שווים למחצית היתר, ומוכיח כי הפרופורציה שהציעה מעיין $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ מתקיימת, אבל לא מתקיים $DE \parallel BC$.

הדוגמה של ירון מתייחסת גם לתנאי שלא נאמר עד כה, שנקודות הקצה של הקטעים שלגביהם רוצים לבדוק אם הם מקבילים נמצאות על שוקי הזווית. DK הוא קטע אמצעים במשולש ולכן מתקיים $DK \parallel BC$ כידוע, על פי אקסיומת המקבילים מנקודה מחוץ לישר קיים רק מקביל אחד לישר, ולכן לא ייתכן עוד מקביל דרך נקודה D, ולכן $DE \nparallel BC$. ירון, בדומה לנויה, מסיט את צלע המשולש הפנימי וכך יוצר דוגמה שמפריכה את הטענה. להבדיל מירון, נויה מתעלמת מתנאי זה שהיה סמוי בהצגת המשפט המקורי. ייתכן שאילו הייתה מעיין מנסחת נכון את הטענה ההפוכה להרחבה של משפט תאלס, לא היה מתפתח דיון.

2. נתחקה אחר החשיבה של המורה: כיצד אפשר לפרש את אמירות המורה ופעולותיה?

בדרך כלל התלמידים מוכיחים משפטים ידועים, ובאירוע הזה הייתה להם הזדמנות לבחון טענה של תלמידה, מעיין, שלא ידוע מראש אם היא נכונה או לא. טענה זו היא פרי סקרנותה הטבעית של מעיין ועוררה את המוטיבציה של התלמידים לחקירה. לדעתנו, המורה זיהתה את הטענה של מעיין כטענה שנראית הגיונית, אבל לא בהכרח נכונה, ולכן ביכולתה להוביל לחקירה בכיוונים שונים ולזמן הזדמנות ללמידת מתמטיקה. היא אפשרה לתלמידים להציע הצעות רבות בעקבות טענתה של מעיין, ובתהליך החקירה שהתרחש בכיתה עלו רעיונות שונים שחלקם שגויים. המורה אפשרה לתלמידים להגיב על הרעיונות השגויים ולדון בהם, כי כנראה היא מאמינה בכוחן של טעויות כמנוף להוראה. זאת ועוד, המורה כפי הנראה מעוניינת להנהיג בכיתה נורמות סוציו־מתמטיות כמו בקשת הנמקה, כל טענה דורשת הוכחה, פירוט דרך הפתרון וגיוון בדרכי הפתרון.

3. חשיבה על אלטרנטיבות: אִילו היית המורה בסיטואציה זו מה היית עושה?

כתיבה מקוצרת, שייתכן שהייתה טריגר לאירוע, נעשית הרבה פעמים מתוך רצון של המורה לא להעמיס או להכביר במילים, ויש לה יתרונות רבים. אך יש להיות מודעים לנתונים סמויים שמופיעים רק בניסוח המילולי, אך לא נרשמים על הלוח.

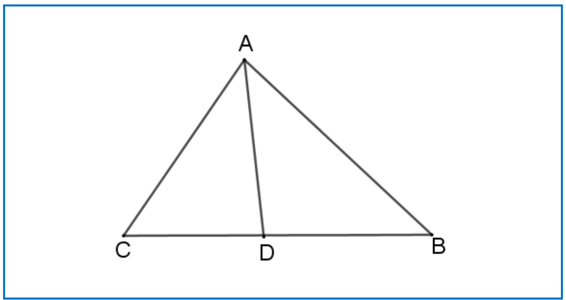
ניתן לבקש מהתלמידים לחשוב על משפטים נוספים שכדי לנסח את הטענה ההפוכה להם יש לכלול מצב מסוים שחייב להישמר בשני הכיוונים. פעילות מהסוג הזה מאמנת את התלמידים לזהות מהו הנתון הסמוי שלא כתוב באופן מפורש.

למשל במשפט חוצה הזווית הנוסח המלא הוא: חוצה הזווית במשולש מחלק את הצלע שאותה הוא חותך לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית.

חוצה הזווית הוא ישר והוא תמיד עובר דרך הצלע שממול, ולכן מקובל להציג את המשפט בניסוח מקוצר: (אם $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$ אז $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$).

כשמסתכלים רק על הנוסח הכתוב בקצרה עלולים להתעלם מהעובדה שהנקודה D נמצאת על הצלע BC.

כדי לנסח טענה הפוכה (אם $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ אז $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$), יש לציין שעוסקים בקטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו (איור 9). כאן מדובר בחוצה זווית, ולכן הנתון לא לגמרי סמוי, אבל הכתיבה המקוצרת היא שהופכת את הנתון לסמוי. מובן שאפשר לחשוב על הצעות נוספות, והקורא מוזמן להציע רעיונות משלו.



איור 9: איור למשפט חוצה זווית

הפוטנציאל של האירוע ללמידה

לאירוע זה הזדמנויות למידה רבות עבור התלמידים וגם למורה. ראשית, התלמידים מציעים בעצמם טענה הפוכה ולא מקבלים אותה מוכנה. בתהליך זה הם מתנסים בניסוח טענות, דיוקן, בדיקתן תוך כדי סימון מדויק של הנתונים הגלויים והסמויים. למורה מתאפשר ללמוד על אופן החשיבה של התלמידים, של מעיין, נויה, מיכאל וירון, לפתח דיון מתמטי שמדגים כיצד "עושים מתמטיקה".

הדוגמה שלעיל מציגה אירוע קריטי אותנטי שמורה זיהתה במהלך שיעור שאותו לימדה, והיא בחרה להעלות אותו על הכתב ולנתח אותו במסגרת פרויקט אקלי"ם. נוסף להזדמנויות הלמידה של המורה והתלמידים שאירועים בזמן אמת מזמנים, קיים

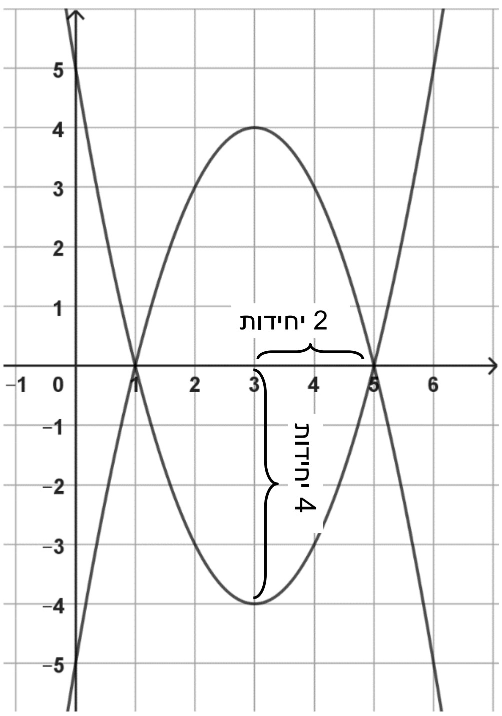
פוטנציאל ללמידה של מורים כאשר הם דנים ומנתחים אירועים קריטיים בתוכניות הכשרה. דוגמאות נוספות לאירועים קריטיים שיכולים להיות מוקד לשיחה עם מורים אפשר למצוא גם במאמרים המתפרסמים בכתבי עת. אנו נתאר בקצרה שני אירועים מתוך מאמרים שפורסמו בגיליונות על"ה, "המשפט של רון" (וייסמן, 2013: גיליון 49) ו"הזכות לפספס" (לבב-וינברג ולייקין, 2006: גיליון 36). בגיליונות על"ה ישנן דוגמאות רבות שניתן לזהותן כאירועים קריטיים. למשל, במאמר של סיגל יגרמן (יגרמן, 2005) מוצג אירוע קריטי בנושא סדרה חשבונית, ומתוארת תגובת המורה. בעקבות מאמר זה מיכל רהט ופסיה צמיר (רהט וצמיר, 2011) ראיינו מורים שהציעו דרכי תגובה אלטרנטיביות לתגובת המורה לאירוע זה, והשוו אותן לתגובה של סיגל יגרמן. אנו תופסות אירועים אלה כאירועים קריטיים, ורואות בהן פוטנציאל ללמידה ולהתפתחות מקצועית של מורים. בכל אחת מהדוגמאות נציג בקצרה את תיאור האירוע, ניתוח האירוע (איור 1) ואת פוטנציאל האירוע ללמידה.

המשפט של רון

תיאור האירוע: אירוע זה מתואר במאמר שפורסם בגיליון 49 (וייסמן, 2013). האירוע התרחש בכיתה ט' בשיעור על פונקציה ריבועית. המורה ביקשה למצוא פונקציה ריבועית שנקודות האפס שלה הן $(5,0)$, $(1,0)$. תשובתו של רון הפתיעה את המורה, שכן הוא הציע שמרחק שיעור ה־y של נקודת הקודקוד מציר ה־x שווה לריבוע המרחק של כל אחת מנקודות האפס מציר הסימטריה (איור 10). כאמור, המורה הופתעה מתשובה זו, התלמידים בדקו עבור מקרים נוספים של פונקציות ריבועיות ומצאו, כי אכן קשר זה מתקיים. המורה הציעה לנסח את ההצעה של רון כ־"ההשערה של רון". היא הפנתה את ההשערה לכיתה וביקשה להוכיח או להפריך אותה. התלמידים הוכיחו את ההשערה ולאחר מכן הכתירו אותה כ־"המשפט של רון".

ההשערה של רון:

מרחק שיעור ה-y של נקודת הקודקוד מציר ה-x שווה לריבוע המרחק של כל אחת מנקודות האפס מציר הסימטריה



איור 10: המשפט של רון

ניתוח האירוע: אנו מזהות את האירוע כאירוע קריטי, מאחר שהחשיבה המתמטית של רון נחשפה ובעקבותיה שונתה תוכנית השיעור, ונוצרה הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים. לדעתנו, פרשנות לדרך החשיבה המתמטית של רון יכולה להיות שהוא קושר את העיסוק בפונקציה הריבועית עם קיום קשר ריבועי גם בין מרחק נקודת האפס מציר הסימטריה לבין שיעור ה־y של הקודקוד. פרשנות אחרת יכולה להיות שרון ראה את המספרים ארבע ושתיים, ומכאן הסיק שהקשר הוא ריבועי.

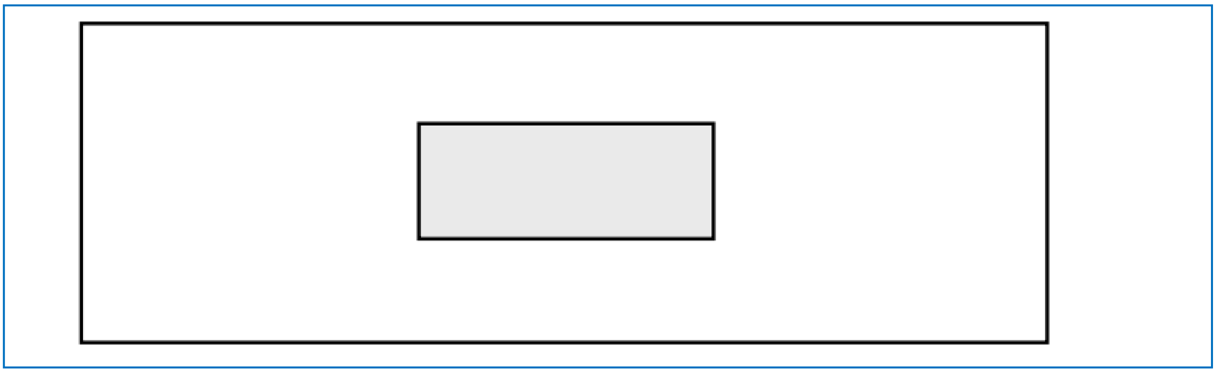
פרשנות לתגובת המורה יכולה להיות שהיא לא צפתה את הצעתו של רון ולא הכירה את הרעיון המקורי שלו, ולכן בחרה לחקור יחד עם התלמידים אם ההשערה נכונה תמיד, או רק במקרה הפרטי שבו נקודות האפס הן $(5,0)$, $(1,0)$. היא זיהתה כאן הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים לחקור טענה שגם הם וגם היא לא יודעים אם היא נכונה, ורצתה לעורר בהם הרגשה של מתמטיקאים ולא רק של תלמידים שבדרך כלל מוכיחים משפטים ידועים.

הפוטנציאל של האירוע ללמידה: לאירוע קריטי זה הזדמנויות למידה רבות עבור התלמידים וגם למורה. לתלמידים ניתנת הזדמנות לבצע פעילות חקר בעקבות הצעה של תלמיד, לבדוק מקרים פרטיים, להעלות השערה ולהוכיח אותה. עבור המורה יש באירוע הזה הזדמנות ללמוד על אודות תכונה של פונקציות ריבועיות שלא הכירה קודם לכן, ללמוד על אופן החשיבה של רון, וליצור בכיתה אווירה של למידה מתוך עניין, סקרנות והנאה.

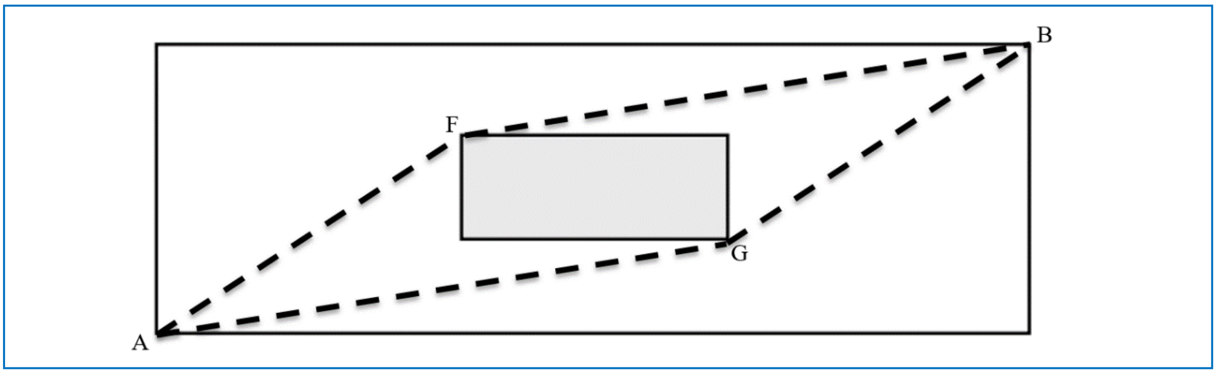
הזכות "לפספס"

במאמר "הזכות לפספס" המופיע בגיליון 36 (לבב-וינברג ולייקין, 2006), מתואר אירוע שקרה בשיעור של מורה שנחשבת כמומחית. האירוע התרחש בכיתה י"א בשיעור מתמטיקה ברמה של 3 יחידות לימוד. במהלך העבודה על פתרון בעיה עם התלמידים מתרחש האירוע הקריטי המתואר מטה, והמורה נותנת לו מענה בשיעור לאחר מכן. מדובר באירוע ייחודי, כי הוא מאופיין בלמידה משמעותית של המורה יחד עם תלמידיה. התכנון של השיעור העוקב מתבסס על האירוע שהתרחש בשיעור שקדם לו ובמהלכו המורה מנתחת את הבעיה בשני אופנים - מתמטית ודידקטית. במהלך הניתוח המתמטי היא לומדת על קשרים בין נושאים מתמטיים שונים, ובמהלך הניתוח הדידקטי היא מתאימה את המתמטיקה שהעמיקה בה לידע של תלמידים הלומדים ברמה של 3 יחידות לימוד. אנו השתמשנו באירוע כדי ללמד את המשתתפים בפרויקט לזהות ולנתח אירועים קריטיים, כמו גם לחשוף אותם לכך שמורים לומדים תוך כדי ההוראה. כדי למצות את הפוטנציאל של האירוע, טרם קריאת המאמר, ביקשנו מהמשתתפים לפתור את הבעיה המתמטית ואת גלגוליה השונים. לאחר מכן תיארנו את האירוע וניתחנו אותו לפי המסגרת של הפרויקט, מבלי להכיר את הניתוח של המורה המתואר במאמר. לבסוף, קראו המשתתפים את המאמר ונחשפו למה שקרה בפועל ולניתוח של האירוע על ידי המורה. הסיפור מתואר בהרחבה במאמר "הזכות 'לפספס' ", ואילו במאמרנו אנו מציגות את האירוע בקצרה בהתאם לאופן עבודתנו עם האירוע בפרויקט כדי להראות את הפוטנציאל שלו לפיתוח שימת הלב לאירועים קריטיים: זיהויים, ניתוחם והלמידה מהם.

תיאור האירוע: המורה הציגה לתלמידיה את בעיית המלבנים והם התבקשו "למצוא את הדרך הקצרה ביותר מהפינה השמאלית התחתונה ועד לפינה הימנית העליונה של המלבן הגדול, מבלי לעבור דרך המלבן הקטן (האפור)" (איור 11). תוך כדי הפתרון הניחו התלמידים שהמסלולים שווים באורכם ($AF + FB = AG + GB$, ראה איור 12).

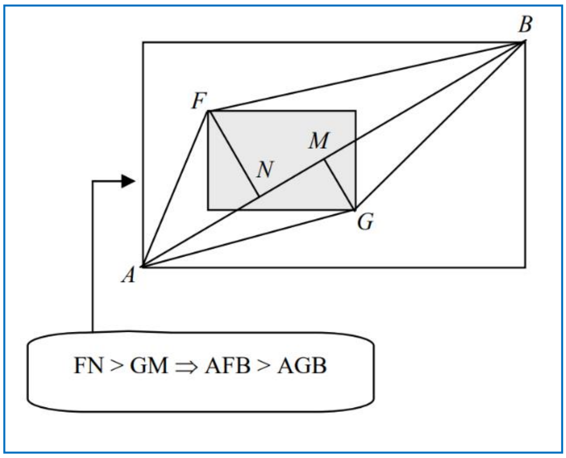


איור 11: בעיית המלבנים



איור 12: מסלולים בבעיית המלבנים

במהלך העבודה התפתחה הבעיה, והתלמידים ניסו למצוא דרכים להשוות בין אורכי המסלולים ללא חישוב וללא קשר למיקום של המלבן הפנימי.



איור 13: ההצעה של עופר

ואז עופר צעק בהתרגשות: "כמובן, הקודקוד הזה (הצביע על קודקוד G) קרוב יותר לאלכסון AB ולכן המסלול הזה קצר יותר" (כמוצג באיור 13).

כל תלמידי הכיתה וגם המורה התרשמו מאוד מהרעיון של עופר. במבט ראשון כולם חשבו כי השערתו נכונה ואילו בהמשך אחרי בדיקה וחקירה התברר כי היא שגויה.

ניתוח האירוע: אנו מזהות את האמירה של עופר כאירוע קריטי.

האמירה של עופר מצביעה על החשיבה המתמטית שלו שהשפיעה על מהלך השיעור. פרשנות לאמירה של עופר יכולה להיות שהוא הכליל מהמקרה שבו המלבן הפנימי נמצא במרכז המלבן החיצוני, ואז אמירתו נכונה. יכול להיות שהוא הסתמך על האיור, ונראה לו ויזואלית כי מסלול זה קצר יותר.

פרשנות לתגובת המורה יכולה להיות שהיא לא ציפתה לרעיון שהציע עופר, וחשבה שהוא נכון. ייתכן גם שרצתה להעצים את עופר, התלהבה וכתגובה ספונטנית אישרה את תשובתו. המורה אולי רצתה להעביר את האחריות לבדיקת הטענה אל התלמידים ולחשוב עליה בעצמה.

הפוטנציאל של האירוע ללמידה: לאירוע קריטי זה הזדמנויות למידה רבות, לעופר, לשאר התלמידים ולמורה. לעופר ולתלמידים ניתנת הזדמנות להעלות השערות ולבדוק אותן. בפתרון בעיה זו הם מגייסים את הידע הקודם שלהם, ובכך מקשרים בין נושאים שלמדו בתחומים שונים ובכיתות שונות (למשל משפט פיתגורס ותכונות המלבן). עבור המורה יש באירוע הזה הזדמנות ללמוד על התוכן המתמטי, במקרה זה השוואה בין שני מסלולים כמתואר בבעיה, וזאת מבלי לערוך חישובים, וגם למצוא את המקרה שבו טענתו של עופר נכונה.

סיכום

כל שיעור רצוף אירועים שיכלו להיות אירועים קריטיים ולהשפיע על מהלך השיעור. המורים, לצד שימת הלב וזיהוי האירועים, צריכים להחליט באופן מושכל לאילו אירועים להגיב ומתי. לא כל אירוע שלא מטופל מעיד על חוסר שימת לב של המורים, אלא בעיקר מעיד על הבחירה שלהם אם להגיב או לא. הגדרת סיטואציות כאירועים קריטיים מאפשרת לשוחח עליהם וללמוד מהם.

במאמר זה הבאנו דוגמאות של אירועים קריטיים, תיארנו שאלות מנחות שבעזרתן אפשר לדון באירועים ובכך לממש את הפוטנציאל שלהם ככלי להתפתחות מקצועית של מורים. בדוגמאות שהוצגו ראינו שהמורות באירועים השתמשו במיומנויות שימת הלב שלהן, הן זיהו אירוע שבאמצעותו הן יכולות להבנות את הוראתן סביב החשיבה של התלמידים ולהעמיק את ההבנה המתמטית שלהם, הן הציעו פרשנויות לחשיבה של התלמידים בזמן אמת, ובנו את הדיון הכיתתי על הסוגיות המתמטיות שהתלמידים העלו. ואכן, מיומנויות אלה חיוניות בעבודתם של המורים כי הן מסייעות להם לבנות את הידע המתמטי של תלמידיהם על בסיס ההבנה המתמטית שלהם (Jacobs et al., 2010). יתר על כן, דיון בדיעבד באירוע וחשיבה על אלטרנטיבות לתגובת המורה באירוע מפתחים רפרטואר של תגובות אפשריות לאירוע. נוסף לכך, הדיון באירועי הוראה קריטיים המתרחשים בכיתת המתמטיקה מסייע לפתח "רפלקציה תוך כדי הוראה" (*reflection in action*), לשפר מיומנות של זיהוי אירועים, להציע פרשנות ותגובה אליהם, ואף להעמיק את הידע המתמטי של המורים.

לפיכך, אנו מזמינות את הקוראים לשים לב לאירועים קריטיים: לזהות אותם, לנתח אותם ולחשוב על אלטרנטיבות לתגובה. אנו מציעות את המסגרת לזיהוי וניתוח האירועים שהוצגה באיור 1 והודגמה במאמר כמסגרת שאותה ניתן לאמץ בהשתלמויות מורים, בקורסים להכשרת מורים וגם בישיבות צוות. את האירועים אפשר למצוא בשיעורים שאנו מלמדים, בצפייה בשיעורים של עמיתים, שיעורים מצולמים, מאמרים וגם באתר של פרויקט אקלי"ם.

תודות

הפרויקט נתמך בנדיבות על ידי קרן טראמפ (ישראל) (מענק מס' 213), אוניברסיטת חיפה ומרכז חמ"ה. אנו מודות לד"ר מיכל איילון על הובלת הפרויקט ולפרופ' רוזה לייקין על עזרתה בייעוץ אקדמי.

מקורות

וייסמן, ש' (2013). "המשפט של רון" – תלמיד כיתה ט' מצוינות. *על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 49*, עמ' 27-30. https://newhighmath.haifa.ac.il/images/data2/alle49/49-3.pdf.

יגרמן, ס' (2005). למידה משמעותית בעקבות טעות של תלמיד. *על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 35*, 38-40. https://newhighmath.haifa.ac.il/images/data2/alle35/ale35-8.pdf

לבב-וינברג, ע', ולייקין, ר' (2006). "הזכות 'לפספס' ": מורה לומדת עם כיתתה. *על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 36, עמ'* 38-41. . https://newhighmath.haifa.ac.il/images/data2/alle36/ale36-6.pdf

רהט, מ' וצמיר, פ' (2011). "בעקבות טעות של תלמיד" – לאן היית מוביל את השיעור? *על"ה: עלון למורי המתמטיקה, 44*, 17-23. https://newhighmath.haifa.ac.il/images/data2/alle44/44-3.pdf

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497-511.

Feiman-Nemser, S. (2001). From preparation to practice: Designing a continuum to strengthen and sustain teaching. *Teachers College Record*, *103(6)*, 1013–1055.

Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009b). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 15*(2), 273-289.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Leikin, R. (2008) Teams of prospective mathematics teachers: Multiple problems and multiple solutions. In T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volume Editor). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities, and networks* (pp. 63-88). Sense Publishers.

Rotem, S. H., & Ayalon, M. (2023). Changes in noticing multiple dimensions in classroom situations among pre-service mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education*, *121*, 103932.

Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 123-140.

Star, J. R., & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 107-125.

Stockero, S. L., & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(16), 125-147.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 17-27.

Weyers, J., Koenig, J., Scheiner, T., Santagata, R., & Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: A review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education,* 1-16.

ד"ר שולה וייסמן

אקדמית גורדון, החוג לחינוך מתמטי

אוניברסיטת חיפה, החוג לחינוך מתמטי

ד"ר סיגל-חוה רותם

אוניברסיטת אוטרכט, הפקולטה למדעים, מכון פרוידנטל