פתרונות

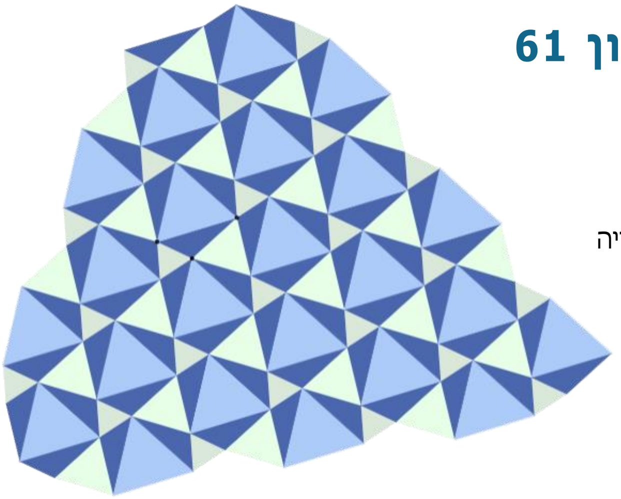
למשימת הפענוח מגיליון 61

משימת הפענוח

הריצוף שבתמונה מבוסס על משפט בגאומטריה שהוכחתו מוצגת בגיליון 61.

אתם מוזמנים לפענח:

- איך נבנה הריצוף?
- על איזה משפט הוא מבוסס?
- מה מבטיח שניתן להמשיך את הריצוף באופן שיכסה את המישור כולו?



איור 1

פתרון

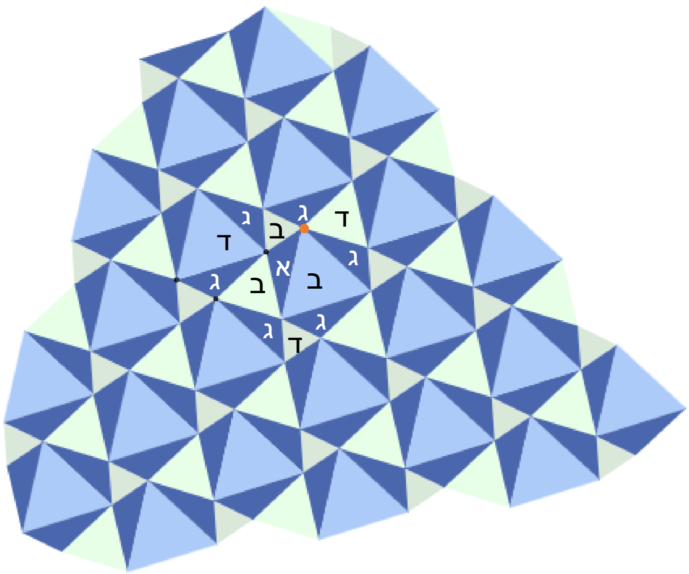
בניית הריצוף

א. נעתיק את המשולש המקורי (המשולש הכחול המסומן ב־א).

ב. נבנה משולש שווה צלעות על כל אחת מצלעות המשולש המקורי (המשולשים שווי הצלעות המסומנים ב־ב).

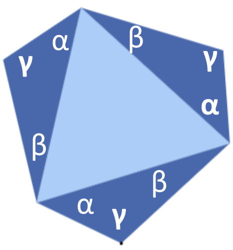
ג. על כל אחת מהצלעות של המשולשים שווי הצלעות נבנה משולש חופף למשולש המקורי.

בניית המשולשים בשלב זה (**ג**) נעשית באופן שכל אחד מהמשולשים המקיפים משולש שווה צלעות יכול להתקבל מסיבוב של משולש אחר, המקיף את אותו משולש שווה צלעות, ב־ 120° סביב מרכז המשולש שווה הצלעות (איור 3).



איור 2

ד. בכל אחד מהקודקודים של המשולש המקורי המסומן ב־א יש לאחר שלב ג שש זוויות (זרות). שלוש מהן הן זוויות שונות של משולשים חופפים למשולש המקורי ולכן סכומן 180°. שתיים מהזוויות בקודקוד זה (מסומנות ב־ב) הן זוויות של משולשים שווי צלעות ולכן סכומן 120°. מכאן נוכל להסיק שהמשולשים המסומנים ב־ד הם משולשים שווי צלעות כיוון שיש להם שתי צלעות שוות והזווית ביניהן בת 60°.



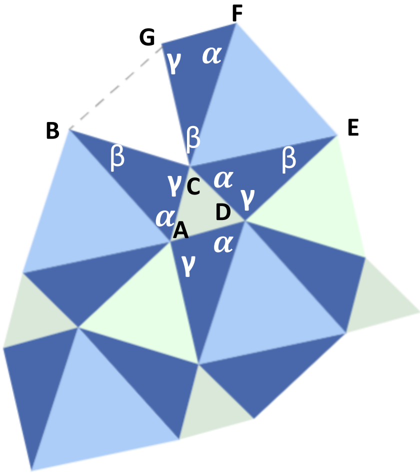
איור 3

ה. נמשיך לרצף באותו אופן: על כל צלע של המשולש המקורי, שעליה עדיין לא בנוי משולש, נבנה משולש שווה צלעות. על כל צלע של משולש שווה צלעות שעדיין לא בנוי עליו משולש נבנה משולש חופף למשולש המקורי באופן המתואר באיור 3.

נשים לב שבכל פעם שאנחנו מסיימים לבנות חמישה משולשים עם קודקוד משותף **נוצר בין שני משולשים מקום פנוי למשולש שישי שקודקודיו כבר נקבעו**. נראה שבמקרה כזה המשולש שקודקודיו נקבעו בתהליך הבנייה חופף למשולש שעלינו לבנות אותו על פי תהליך הריצוף.

קיימים שני מקרים כאלה:

מקרה א: שלושה מבין חמשת המשולשים שהונחו ראשונים חופפים למשולש המקורי, והונחו לפי תהליך הבנייה המתואר לעיל, והשניים האחרים הם משולשים שווי צלעות הבנויים על צלעות המשולשים האחרים.



איור 4

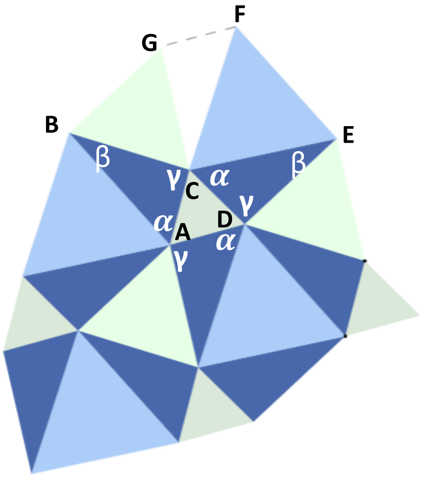
למשל: התחלנו מהמשולש ABC; על הצלע AC שלו בנינו (כלפי חוץ) משולש שווה צלעות ACD; על הצלע CD של המשולש ACD בנינו את המשולש CDE; על הצלע CE של המשולש CDE בנינו משולש שווה צלעות CEF; על הצלע CF של המשולש CEF בנינו משולש GFC כך ש-$\Delta FGC \cong \Delta ACB$;

נשים לב: הנקודה G התקבלה בתהליך הבנייה, ולכן כדי להראות שתהליך הבנייה לא נעצר, עלינו להראות שהמשולש GBC הוא המשולש שווה הצלעות הבנוי על הצלע GC, והוא גם המשולש שווה הצלעות הבנוי על הצלע BC. ואכן: חשבון זוויות מראה:

$$GC = BC\ ;\measuredangle GCB = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) - 2 \cdot 60° = 60°$$

ולכן המשולש GBC הוא אכן המשולש הדרוש להמשך תהליך הריצוף.

מקרה ב: שניים מתוך חמשת המשולשים בעלי הקודקוד המשותף שהונחו ראשונים, חופפים למשולש המקורי והונחו לפי תהליך הבנייה המתואר לעיל, ואילו השלושה האחרים הם משולשים שווי צלעות הבנויים על צלעות המשולשים האחרים.



איור 5

למשל: התחלנו מהמשולש ABC; על הצלע BC שלו בנינו (כלפי חוץ) משולש שווה צלעות BCG; על הצלע CD של המשולש ACD בנינו משולש CDE על הצלע CE של המשולש CDE בנינו משולש שווה צלעות CEF;

הפעם הנקודה F התקבלה בתהליך הבנייה, ולכן כדי להראות הפעם שתהליך הבנייה לא נעצר, עלינו להוכיח את חפיפת המשולשים $\Delta FGC \cong \Delta ACB$. חפיפה זו קלה להוכחה באמצעות משפט החפיפה צלע-זווית-צלע.

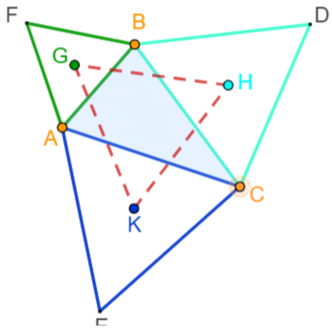
בזאת הראינו שבעזרת התהליך שתואר לעיל אפשר לכסות משטחים גדולים כרצוננו.[1]

[1] כיסוי המשטח יכול להיות גדול מהמשטח.

משפט נפוליאון והקשר לריצוף

משפט נפוליאון

בכל משולש, אם בונים משולש שווה צלעות על כל צלע שלו (כולם מהצד החיצוני של הצלע, או כולם מהצד הפנימי שלה), אז מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים האלה הם הקודקודים של משולש שווה צלעות.



איור 6

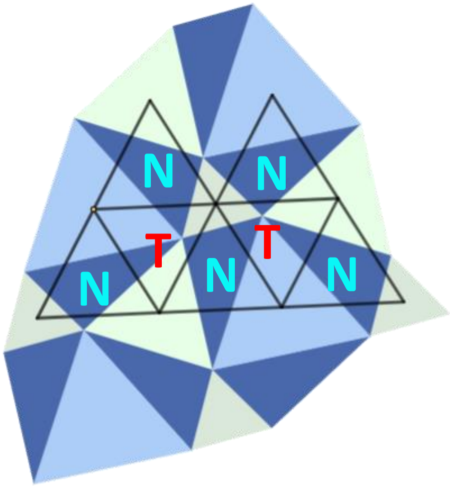
ההוכחה למשפט נפוליאון מוצגת בעל"ה גיליון 61 בעמ' 73.

הריצוף הנבנה בעזרת התהליך המתואר לעיל נקרא **ריצוף נפוליאון**.

ריצוף נפוליאון בנוי כולו ממשולשים (חופפים) שעל כל צלע שלהם בנוי משולש שווה צלעות. על פי משפט נפוליאון, מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים שווי הצלעות הבנויים על צלעות משולש הם קודקודים של משולש שווה צלעות.

נכנה את המשולשים שווי הצלעות המתקבלים על פי משפט נפוליאון משולשי נפוליאון.

נסמן ב־N משולשי נפוליאון אחדים בריצוף שבאיור 7.



איור 7

משולשי נפוליאון הבנויים סביב משולשים חופפים הם משולשים שווי צלעות חופפים.

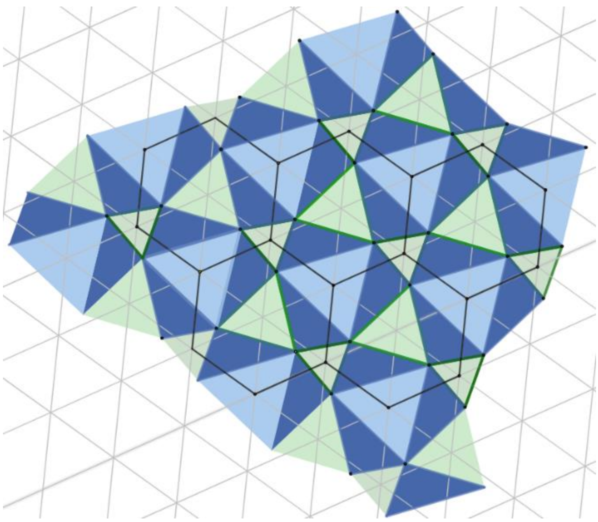
נתבונן במשולשים הכלואים בין משולשי נפוליאון (מסומנים ב־T).

מתהליך בניית הריצוף נוכל להסיק:

- כל קודקוד של משולש כזה הוא גם קודקוד משותף לשלושה משולשי נפוליאון.
- כל צלע של משולש כזה היא גם צלע של אחד ממשולשי נפוליאון. כיוון שכל משולשי נפוליאון בריצוף הם משולשים חופפים, הרי כל הצלעות של המשולשים המסומנים ב־T שוות זו לזו. לכן גם הם משולשים שווי צלעות חופפים.

מכאן שמרכזי המשולשים שווי הצלעות הבנויים על המשולשים החופפים למשולש שהיה ראשון בתהליך הריצוף, יוצרים רשת של משולשים שווי צלעות (איור 8).

באיור 8 ניתן גם לראות קבוצות של שישה משולשים בעלי קודקוד משותף המאוגדים למשושה משוכלל. ניתן להוכיח שכל משושה כזה משמש "אריח" של הריצוף.


איור 8