# מה חדש בתוכנית המתמטיקה החדשה

# תכנון לינארי – משימה במעבדה המתמטית
# חלק ב'


מאת **יהודית גל־עזר**, האוניברסיטה הפתוחה
**גדעון צבס**, אוניברסיטת תל־אביב



**תקציר חלק א'**

בחלק הראשון של המאמר הוצג הרקע התאורטי של פתרון בעיה כללית בתכנון לינארי ראינו, כי בשני משתנים קבוצת הפתרונות האפשריים מהווה מצולע קמור (פרט למקרה שזו הקבוצה הריקה), אשר קודקודיו הם קבוצת הפתרונות הבסיסיים האפשריים והפתרון האופטימלי מתקבל בקודקוד (לפעמים ביותר מאחד)

הקודקוד האופטימלי מאופיין על־ידי כך שבשני הקודקודים הסמוכים לו ערך פונקצית המטרה לא יותר גדול.

בחלק זה של המאמר נציג דוגמה אופיינית, אותה נפתור בשיטות שונות אשר יסללו בהדרגה את הדרך לבניית אלגוריתם כללי – שיטת הסימפלקס – לפתרון הבעיה בעזרת מחשב


## 5. פתרון בדרך גרפית, גאומטרית ואלגברית

כדי להציג את שיטות הפתרון השונות לבעיית תכנון לינארי – שיטות שיובילו אותנו בהדרגה לשיטה כללית וחזקה יותר – בחרנו בדוגמה שבה יש שני משתנים מקוריים וארבעה אילוצים מצא את המקסימום של

$$p = 2x+y \tag{31}$$

באילוצים

$$\begin{cases} x + 4y \le 24 \\ x + 2y \le 14 \\ 2x - y \le 8 \\ x - y \le 3 \end{cases} \tag{32}$$

כאשר דרוש גם

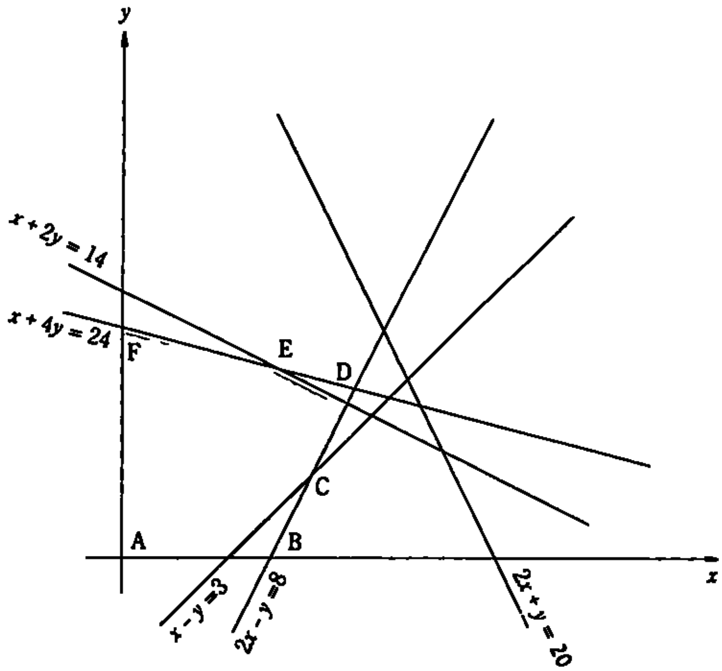
$$x, y \ge 0 \tag{33}$$

**(i) פתרון גרפי**

נתבונן בגרף המצורף (איור 5), בו משורטטים ארבעה ישרים המתאימים לארבעת האילוצים (32) יחד עם צירי המערכת מתקבל מצולע הפתרונות האפשריים ABCDEF, שהוא במקרה זה משושה. כמו כן רואים באיור (קו מרוסק) ישר מצורה $2x+y=k$ (בשרטוט $k=20$). אם משנים את $k$, נע ישר מרוסק זה במקביל לעצמו נשאל, אם כן, מה צריך להיות הערך של $k$ כך שלישר המתאים תהיה

לראשונה נקודה משותפת עם המצולע המכיל את כל הפתרונות האפשריים  מן האיור אפשר לראות שנקודה זו היא הנקודה D כלומר הנקודה (6,4) שהיא נקודת החיתוך של הישרים

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 8 \\ x + 2y = 14 \end{array}\right. \qquad (34)$$




איור 5

על־ידי הצבת שיעורי הנקודה D מקבלים שהערך של k הוא 16 קיבלנו כי הפתרון האופטימלי מתקבל ב x=6 ו y=4 וערכו המקסימלי של k הוא 16

כמובן שדרך גרפית זו, מוגבלת למקרים פשוטים במיוחד, ואינה ניתנת להכללה לבעיית תכנון ליניארי כללית. לכן, כצעד שני נפנה לקבלת הפתרון האופטימלי על־ידי מעבר מקודקוד לקודקוד במצולע הפתרונות האפשריים

**(ii) מעבר מקודקוד לקודקוד**

הפעם נתחיל מכתיבת המערכת (32) כשוויונים, על־ידי הוספת ארבעה משתני עודף v,u,t ו w

$$\left\{\begin{array}{lllll} x + 4y + t & & & & = 24 \\ x + 2y & + u & & & = 14 \\ 2x - y & & + v & & = 8 \\ x - y & & & + w & = 3 \end{array}\right. \qquad (35)$$

במקרה זה יש סך־הכל 6 משתנים (שניים מקוריים וארבעה משתני עודף) בכל אחד משישת קודקודי משושה הפתרונות האפשריים, שניים (לפחות) מן המשתנים הם אפס. נתחיל מהקודקוד A (ראשית הצירים), עליו נכריז כהתחלה סטנדרטית לכל המקרים. אתחול סטנדרטי כזה יהיה חשוב בהמשך לשם אוטומטיזציה של חיפוש האופטימום

בקודקוד A $x=y=0$, $t=24$, $u=14$, $v=8$ ו $w=3$, וכן $p=0$ נבדוק את ערך פונקציית המטרה $p$ בשני הקודקודים הסמוכים B ו F

נמצא כי

$$\left\{\begin{array}{l} p_B=(2x+y)\Big|_{\substack{x=3\\y=0}} = 6 \\ p_F=(2x+y)\Big|_{\substack{x=0\\y=6}} = 6 \end{array}\right. \qquad (36)$$

אנו מעוניינים לעבור לקודקוד סמוך שבמעבר אליו הערך של $p$ גדל ככל האפשר, במקרה שלפנינו נוכל לבחור בין F לבין B באופן שרירותי, שכן הערך $p$ עולה באותה מידה אם בוחרים ב F או אם בוחרים ב B נבחר ב B

בקודקוד B $y=0$, $w=0$ (לפי (35), כי מתקיים חשוויון $x-y=3$) כמו כן, $x=3$, $t=21$, $u=11$, $v=2$ ו $p=6$ אנו רואים כי ערכו של $p$ עלה מ 0 ל 6. שוב שני משתנים הם אפס, ואילו $x$, שהיה קודם אפס הוא עתה חיובי

נעבור אם כן לקודקוד C, בקודקוד זה $w=0$ וכן $v=0$ (מתקיים $2x-y=8$) מתוך המשוואות (35) מקבלים $x=5$, $x=2$, $t=11$, $u=5$, וכן $p=12$ שוב עלה ערכו של $p$, ולכן נמשיך לקודקוד הבא D

בקודקוד D: $u=0$, $v=0$, $x=6$, $y=4$, $t=2$ ו $w=1$, וכן $p=6$ כאשר ממשיכים ועוברים לקודקוד E מתברר שהערך של $p$ יורד ל 13, ולכן (על־פי מודל הבקתה) הקודקוד D הוא נקודת האופטימום

הפתרון נתון אפוא על־ידי $x=6$, $y=4$ ואז $p=16$ בפתרון האופטימלי שמצאנו, האי־שוויונים השני והשלישי באילוצים (32) הם שוויונים, ואילו האי־שוויונים הראשון והרביעי מצביעים על עודפים המיוצגים על־ידי הערכים החיובים $t=1$ ו $w=2$
דרך זו היא דרך גאומטרית המתבססת על המשפטים שהבאנו, אך גם היא אינה מתאימה להכללה ולאוטומטיזציה נפנה, על כן, לחיפוש האופטימום בדרך אלגברית

**(iii) חיפוש אלגברי**

כפי שראינו, בכל פתרון בסיסי של בעיית תכנון לינארי בה יש 2 משתנים מקוריים ו $m$ אילוצים, 2 מתוך המספר הכולל של $m+2$ המשתנים הם אפס, ולהם מקובל לקרוא משתנים לא־בסיסיים את שאר המשתנים מכנים משתנים בסיסיים
נחזור לבעיה שלנו שבה $m=4$, ונתאר את החיפוש האלגברי שיוביל בהדרגה לפתרון האופטימלי **כאתחול סטנדרטי** נבחר כמשתני הבסיס את המשתנים הנמצאים במערכת (35) ב"מבנה אלכסוני", כלומר $t$, $u$, $v$ ו $w$ לפיכך, $x$ ו $y$ הם המשתנים הלא־בסיסיים ההתחלתיים ולכן ערכם אפס מכאן נקבל $t=24$, $u=14$, $v=8$ ו $w=3$ המשתנים הבסיסיים נבחרו על־פי "הכלל האלכסוני" לפיו **כל אחד מן המשתנים האלה נמצא רק באחת מן המשוואות וכל אחת מן המשוואות מכילה רק אחד מן המשתנים הבסיסיים.**

עתה, נבטא את המשתנים הבסיסיים ופונקציית המטרה, באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים כך נקבל

$$
(37) \qquad \begin{cases} t = 24 - x - 4y \\ u = 14 - x - 2y \\ v = 8 - 2x + y \\ w = 3 - x + y \end{cases}
$$

פונקציית המטרה הנתונה $p = 2x + y$ כבר מוצגת באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים כדי להגדיל את הערך של $p$, נתחיל בהגדלת $x$, שהוא בעל המקדם הגדול יותר בפונקציית המטרה, ולכן סביר שהגדלתו תגדיל את $p$ יותר מאשר הגדלת משתנים אחרים נשאיר, אם כן, את $y = 0$, ונראה מה הן ההגבלות על $x$ כך ש $t$, $u$, $v$ ו $w$ ישארו אי־שליליים כנדרש נקבל

$$
(38) \qquad x \le 24, \quad x \le 14, \quad x \le 4, \quad x \le 3
$$

קיום מגבלות אלה מבטיח למעשה אי־חריגה ממצולע הפתרונות האפשריים ברור כי $x \le 3$ היא ההגבלה החמורה ביותר, ולכן ההגבלה המקסימלית של $p$ תושג אם נגדיל את $x$ ל 3, (כאשר ערכו של $y$ נשאר אפס) מ (37) נקבל $w = 0$, $v = 2$, $u = 11$, $t = 21$ ואילו ערך פונקציית המטרה היא עתה $p = 2x + y = 6$ נשים לב שכאשר $x$ קיבל ערך חיובי והוא הצטרף לבסיס, $w = 0$ יצא, כפי שצפוי מהפיכת אחד האי־שוויונים לשוויון

עתה שוב נבטא את פונקציית המטרה ואת המשתנים הבסיסיים החדשים באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים, שהם עתה $y$ ו $w$ את אשר מתקבל מקובל לרשום (מסיבות שנראה בסעיף הבא) בצורה

$$
(39) \qquad \begin{cases} \phantom{x -{}} 5y + t \phantom{{}+u+v} - w = 21 \\ \phantom{x -{}} 3y \phantom{{}+t} + u \phantom{{}+v} - w = 11 \\ \phantom{x -{}} y \phantom{{}+t+u} + v - 2w = 2 \\ x - y \phantom{{}+t+u+v} + w = 3 \end{cases}
$$

ופונקציית המטרה היא עתה

$$
(40) \qquad p = 2(3 - w + y) + y = 6 - 2w + 3y
$$

נשים לב, כי במערכת (39) נמצאים המשתנים הבסיסיים $t$, $u$, $v$ ו $x$ ב״מבנה אלכסוני״, כפי שהיו $t$, $u$, $v$ ו $w$ במערכת (35)

אם כן, הבסיס החדש שוב מציית לכלל האלכסוני אותו קבענו מדריך המעבדה יכול לציין ללומדים כי אם נחליף את העמודה הראשונה (בה נמצא המשתנה $x$) בעמודה הששית (בה נמצא המשתנה $x$), אפשר יהיה גם לראות את ״המבנה האלכסוני״

לפי (40), הרצון להגדיל את $p$ מנחה אותנו להגדיל את $y$ (בעל המקדם הכי גדול בביטוי ל $p$) המגבלות על $y$ מתקבלות מ (39), כאשר $w = 0$ והמשתנים האחרים אי־שליליים

$$
(41) \qquad y \le 21/5, \quad y \le 11/3, \quad y \le 2
$$

המגבלה הרביעית הושמטה, שכן היא היתה צריכה להיות $y \ge -3$, וממילא אנו מעוניינים רק ב $y$ אי־שלילי ברור כי $y \le 2$ היא המגבלה החמורה ביותר, ולכן נגדיל את $y$ ל 2 (כדי להגדיל את $p$ ככל האפשר) נקבל $v = 0$, $u = 5$, $t = 1$ וכאמור $y = 2$ ו $w = 0$ מאחר ש $v$ יצא מהבסיס ו $y$ נכנס לבסיס, עלינו עתה לשנות את (39) ו (40), כך שהמשתנים הבסיסיים ופונקציית המטרה יהיו מבוטאים באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים החדשים $v$ ו $w$ כלומר עלינו לשנות את מערכת (39) כך שהבסיס החדש יהיה ב״מבנה אלכסוני״ במלים אחרות עלינו לפעול עם השורה

השלישית (השורה ממנה התקבלה המגבלה החמורה ביותר) על שאר שורות המערכת, כך ש $y$ יוותר **רק** בשורה שלישית זו הפעלת השורה השלישית על השורה הראשונה, למשל, פירושה להכפיל את השורה השלישית ב $5$ ולהוסיפה לראשונה כדי לאפס את המקדם של $y$ באופן דומה תופעל השורה השלישית על השורה השנייה ועל השורה הרביעית ראה, פתרון מערכת משוואות אלגבריות, כפי שהוצג ב [4]

עתה נבטא גם את פונקציית המטרה באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים $v$ ו $w$ נשים לב, שפירוש הדבר הוא לפעול עם השורה השלישית על (40), כדרך שפעלנו על שורות המערכת (39) על פעולות אלה מבוסס תהליך החיפוש האוטומטי שיוצג בהמשך

לאחר ביצוע פעולות אלה נקבל

$$\left\{\begin{array}{lllll} & & t & -5v+9w= & 11 \\ & & u & -3v+5w= & 5 \\ & y & & +v-2w= & 2 \\ x & & & +v-w= & 5 \end{array}\right. \tag{42}$$

וכן

$$p=12-3v+4w \tag{43}$$

בשביל $w=v=0$ ערכו של $p$ עלה ל $12$ בשלב הבא עלינו להגדיל את $w$ (בעל המקדם החיובי הגדול ביותר בביטוי ל $p$), כלומר להכניסו לבסיס. המגבלות הרלוונטיות על $w$ הן

$$\left\{\begin{array}{l} w\leq 11/9 \\ w\leq 1 \end{array}\right. \tag{44}$$

לכן נגדיל את $w$ ל $1$, ונקבל $u=0$, $t=2$, $y=4$, $x=6$, וכאמור $v=0$ $w$ נקבע לפי השורה השנייה ב (42), ולכן שורה זו תהיה עתה השורה הפועלת על שאר שורות (42) ועל (43). כאשר נעשה זאת נקבל

$$\left\{\begin{array}{lllll} & & t & -\frac{9}{5}u+\frac{2}{5}v & = 2 \\ & & & u -3v+5w & = 5 \\ & y & & +\frac{2}{5}u-\frac{1}{5}v & = 4 \\ x & & & +\frac{1}{5}u+\frac{2}{5}v & = 6 \end{array}\right. \tag{45}$$

תוצאה זו לא ניתנת לשיפור, שכן אין $u$ ו $v$ אי־שליליים היכולים להגדיל את ערכו של $p$ לכן הסתיים החיפוש והפתרון האופטימלי נתון על־ידי $x=6$, $y=4$ ו $p_{max}$ 16 מקבלים גם כן $t=2$, $w=1$ וכזכור $u=v=0$. פירוש הדבר שבפתרון האופטימלי האילוצים השני והשלישי הם שוויונים, בעוד האילוצים הראשון והרביעי נשארים באי־שוויון, ויש בהם עודפים חיוביים המתבטאים בגודלם של $t$ ושל $w$

נדגיש כי סיום תהליך החיפוש מאופיין על־ידי כך שמקדמי המשתנים הלא־בסיסיים המופיעים בפונקציית המטרה **אינם חיוביים** תהליך החיפוש האלגברי בכללותו נראה מפרך יותר מאשר התהליך הגרפי והתהליך הגאומטרי, אך הוא אשר סולל את הדרך לתהליך האוטומטי הידוע כשיטת הסימפלקס, ואשר יוצג בקטע הבא

## 6. פתרון באמצעות טבלאות סימפלקס

בהתבסס על שיטת החיפוש האלגברית שהוצגה בסעיף הקודם, מוצע לבצע את המעבר משלב לשלב בעזרת ניתוח טבלה. באמצעות טבלה זו אפשר להגיע לפתרון האופטימלי על־ידי אלגוריתם, אותו ניתן ליישם במחשב אלגוריתם זה נקרא בשם שיטת הסימפלקס.

לכל שלב בתהליך מתאימה טבלה בה מופיעים בעמודה הראשונה משמאל המשתנים הבסיסיים, בעמודות הבאות (במקרה שלנו 6 עמודות) רשומים מקדמי מערכת האילוצים, הכוללת את משתני העודף מימין להן עמודה המייצגת את האגפים הימניים במערכת זו ומימין לה העמודה האחרונה, שבה מופיעות המגבלות על המשתנה העומד להיכנס לבסיס בשלב הבא לטבלה המתוארת נוסיף שורה תחתונה המייצגת את פונקציית המטרה, באופן שיוסבר לאחר הצגת הטבלה המתאימה לשלב ההתחלתי (איור 6)

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 | $\frac{24}{1}=24$ |
| u | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 14 | $\frac{14}{1}=14$ |
| v | 2 | −1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 8 | $\frac{8}{2}=4$ |
| w | 1 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | $\frac{3}{1}=3$ |
| p | −2 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

**איור 6:** טבלת הסימפלקס ההתחלתית, שלב 1

בשורה התחתונה מיוצגת פונקציית המטרה p, כשהיא כתובה בצורה

$$p-2x-y=0 \tag{47}$$

כלומר, p מיוצגת באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים ההתחלתיים, וניתן לראות כי ערכה ההתחלתי הוא אפס. ערך זה מופיע בתחתית העמודה המייצגת את האגפים הימניים בעמודות הממוספרות מ 1 ועד 6 מופיעים המקדמים של המשתנים לפי הסדר x, y, t, u, v ו w. בעמודה השמאלית של הטבלה נמצאים t, u, v ו w שהם רכיבי הבסיס ההתחלתי, ואמנם רואים בטבלה את המבנה האלכסוני של המקדמים שלהם במערכת

בשורה התחתונה בטבלה, רואים כי המקדם של x בפונקציית המטרה הוא השלילי ביותר (שלילי ולא חיובי בגלל צורת הרישום של פונקציית המטרה) לפיכך, נבחר ב x כמשתנה שייכנס לבסיס (וערכו יוגדל) לאחר הכרעה זו, ניתן ליצור את עמודת המגבלות, על־ידי חלוקה של רכיבי ה b־ים במקדמים של x (במקרה שלנו ברכיבי העמודה הראשונה) אם המספר המציין את המגבלה הוא שלילי, נשמיט אותו (שכן אין הוא מייצג מגבלה כלל) כאן, המגבלה החמורה ביותר מתקבלת בשורה של w, לכן w הוא המשתנה היוצא מן הבסיס, וערכו של x ייקבע כ 3

עתה נעבור לשלב הבא המיוצג על־ידי הטבלה באיור 7 נדגיש כי כל הפעולות שביצענו אינן אלא הצעדים שנעשו בחיפוש האלגברי, כשעתה הם ניתנים בצורה טבלאית, שהיא נוחה לעיבוד אוטומטי

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 1 | 5 | 1 | 0 | 0 | −1 | 21 | $\frac{21}{5}=4$ |
| u | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | −1 | 11 | $\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$ |
| v | 0 | −1 | 0 | 0 | 1 | −2 | 2 | $\frac{2}{1}=2$ |
| x | 1 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | — |
| p | 0 | −3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | |

**איור 7:** טבלת הסימפלקס, שלב 2.

נדגיש שוב כי פונקציית המטרה p מיוצגת בשורה התחתונה בצורה

$$p-3y+2w=6 \quad (48)$$

כלומר, p מבוטאת באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים ועלתה לערך 6

הטבלה השנייה התקבלה על־ידי צירוף העמודה הראשונה (המתאימה ל x) למבנה האלכסוני, "על חשבון" העמודה הששית המתאימה ל w דבר זה נעשה על־ידי הפעלת השורה הרביעית על האחרות, כולל שורת המטרה, כדי לאפס את רכיבי העמודה הראשונה, שהם המקדמים של x בשלוש המשוואות הראשונות ובפונקציית המטרה משמעות הדבר היא, שבטאנו את משתני הבסיס ואת פונקציית המטרה באמצעות המשתנים הלא־בסיסיים y ו w, כפי שעשינו בחיפוש האלגברי נדגיש שוב כי הפעלת השורה הרביעית על האחרות, היא בדיוק כמו אחד השלבים בפתרון n משוואות ב n נעלמים על־ידי שיטת גאוס, שהוא נושא למשימת מעבדה קודמת (ראה [4])

רואים בבירור מן השורה התחתונה, שהמשתנה שייכנס לבסיס הוא y יוצרים את עמודת המגבלות, וממנה משתמע כי v יוצא מן הבסיס הטבלאות המתאימות לשני השלבים הבאים נתונים באיור 8 ובאיור 9

| בסיס | 1 2 3 4 5 6 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|
| t | 0 0 1 0 −5 9 | 11 | $\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$ |
| u | 0 0 0 1 −3 5 | 5 | $\frac{5}{5}=1$ → |
| y | 0 1 0 0 1 −2 | 2 | — |
| x | 1 0 0 0 1 −1 | 5 | — |
| p | 0 0 0 0 3 −4 | 12 | |

**איור 8:** טבלת הסימפלקס, שלב 2

| בסיס | 1 2 3 4 5 6 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|
| t | 0 0 1 $-\frac{9}{5}$ $-\frac{2}{5}$ 0 | 2 | |
| w | 0 0 0 $\frac{1}{5}$ $-\frac{3}{5}$ 1 | 1 | |
| y | 0 1 0 $-\frac{2}{5}$ $-\frac{1}{5}$ 0 | 4 | |
| x | 1 0 0 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ 0 | 6 | |
| p | 0 0 0 $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ 0 | 16 | |

**איור 9:** טבלת הסימפלקס, שלב 4

השלב הרביעי הוא האחרון מאחר שהמקדמים בשורה התחתונה כולם חיוביים, ואי־אפשר להגדיל את p למעלה מערכו הנוכחי שהוא 16 דבר זה נובע מן העובדה ש $p+4u/5+3v/5=16$ ואילוץ האי־שליליות אינו מאפשר להקטין את ערכם של u ושל v שהוא עתה אפס ערכי משתני הבסיס הסופיים הם $x=6$, $y=4$, $w=1$ ו $t=2$ שהם הרכיבים המתאימים בעמודת ה b־ים רכיבי עמודת ה b־ים נותנים את ערכי משתני הבסיס גם בכל שלב משלבי הביניים של תהליך הסימפלקס בשלב זה מתבקשים משתתפי המעבדה לכתוב אלגוריתם ותכנית מחשב, בדיוק לפי התאור דלעיל בכל שלב של האלגוריתם יש להדפיס את הטבלה ולעצור לעצירה זו יש יתרון פדגוגי והיא מאפשרת לתלמידים לבחון את תוצאת השלב הזה, לראות מי ייצא מהבסיס ומי ייכנס לבסיס, ואחר־כך לעבור

לשלב הבא (על־ידי לחיצת מקש אחת) דבר זה מאפשר למשתתפי המעבדה לקבל פתרון אוטומטי ויחד עם זאת לעקוב אחרי שלבי הסימפלקס בפירוט

## 7. פתרון מעשי של הבעיה החקלאית

בסעיפים הקודמים הצגנו את המתמטיקה של תכנון לינארי כאשר מספר המשתנים המקוריים הוא 2 (x ו y) את התאוריה ואת שיטת הסימפלקס ניתן להכליל ל n משתנים מקוריים ו m אילוצים נפעיל עתה את שיטת הסימפלקס על הבעיה החקלאית, שהוצגה בסעיף הראשון, ובה 5 משתנים מקוריים (בוטנים, תפוחי־אדמה, עגבניות, כותנה ותירס) ו 4 אילוצים המתאימים למשאבים קרקע, מים, שעות טרקטור ושעות אדם

נזכור כי בטבלת הנתונים של הבעיה החקלאית, בחרנו את היחידות כך שכל נתוני הטבלה יהיו באותו סדר גודל (למעשה כל הנתונים הם בין 0 5 ל 3.1) פירושו של דבר זה, שהמשוואות הלינאריות הנלוות, המשתקפות בטבלה באיור 10 הן מכוילות עובדה זו חשובה למניעת אבדן דיוק בעת פתרון נומרי של מערכת אלגברית, כפי שהודגש במשימה הקודמת שעסקה בפתרון n משוואות ב n נעלמים (ראה [4])

בתאור הבעיה המקורית סופר גם על מטע האבוקדו, אותו לא נזכיר כאן במפורש, אבל צריכת המשאבים שלו נלקחת בחשבון כמו כן נזכור שלרווח p יש להוסיף 96 0 מליוני דולרים, המהווים את ההכנסה המובטחת מראש ממטע האבוקדו יכולנו, כמובן, גם להוסיף כמות זו לפונקציית הרווח, והיא היתה מתווספת למספר שבתחתית העמודה העשירית בכל חמש טבלאות הסימפלקס של בעיה זו

קבלת הפתרון האופטימלי במקרה זה מדגימה את הפעלת שיטת הסימפלקס על בעיית תכנון לינארי, אם כי את התאוריה הצגנו למקרה $n=2$ בלבד הפתרון האופטימלי של הבעיה החקלאית הנתונה התקבל באמצעות טבלאות הסימפלקס הבאות (שנוצרו על־ידי תכנית המחשב) שנכתבה והורצה במעבדה המתמטית־לימודית הטבלה הראשונה מייצגת את המצב ההתחלתי

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 00C | 1.000 | 1 000 | 1 000 | 1 000 | 1.000 | 0.000 | 0 000 | 0 000 | 2 7u0 | 2 700 |
| 7 | 0 700 | 0 760 | 0 800 | 0 950 | 0.900 | 0 000 | 1 000 | 0 000 | 0 000 | 2.360 | 2 484 |
| 8 | 2 100 | 2 000 | 0 500 | 0 800 | 1.200 | 0 000 | 0 000 | 1 000 | 0.000 | 3.100 | 3.875 |
| 9 | 2 000 | 1 900 | 0.500 | 1 200 | 0.920 | 0 000 | 0 000 | 0 000 | 1 000 | 3 000 | 2.500 |
| *p* | -2 100 | -2 300 | -2.200 | -2 500 | -2 400 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0 000 | |

**איור 10:** טבלת הסימפלקס ההתחלתית, שלב 1

בעמודה השמאלית רשומים המספרים הסידוריים של משתני הבסיס ההתחלתיים בשורה התחתונה רשומים המקדמים $c_i$ של פונקציית המטרה, כשהיא רשומה בצורה $p-\Sigma c_i x_i=0$ בעמודות 1-9 מקדמי המערכת הלינארית, בעמודה 10 האגפים הימניים המבטאים את הגבלות המשאבים השונים בעמודה האחרונה מופיעות ההגבלות על המשתנה העומד להכנס לבסיס בשלב הבא
הטבלאות הבאות מייצגות את שלבי הסימפלקס עד לקבלת הפתרון האופטימלי

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.263 | 0 200 | 0.158 | 0.000 | 0.053 | 1.000 | -1 053 | 0.000 | 0.000 | 0.216 | 1.079 |
| 4 | 0.737 | 0.800 | 0.842 | 1.000 | 0.947 | 0.000 | 1.053 | 0 000 | 0.000 | 2.484 | 3.105 |
| 8 | 1.511 | 1.360 | -0.174 | 0 000 | 0.442 | 0 000 | -0.842 | 1.000 | 0.000 | 1.113 | 0.818 |
| 9 | 1.116 | 0.940 | -0 511 | 0.000 | -0.217 | 0.000 | -1.263 | 0.000 | 1.000 | 0.019 | 0.020 |
| *p* | -0.258 | -0.300 | -0.095 | 0.000 | -0.032 | 0.000 | 2.632 | 0.000 | 0.000 | 6.211 | |

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.026 | 0.000 | 0.267 | 0.000 | 0.099 | 1 000 | -0.784 | 0.000 | -0 213 | 0.212 | 0.795 |
| 4 | -0.213 | 0.000 | 1.277 | 1.000 | 1.132 | 0.000 | 2.128 | 0.000 | -0.851 | 2.468 | 1.933 |
| 8 | -0.104 | 0.000 | 0 565 | 0.000 | 0.756 | 0.000 | 0.985 | 1.000 | -1 447 | 1.085 | 1.921 |
| 2 | 1.187 | 1.000 | -0.543 | 0.000 | -0.231 | 0.000 | -1.344 | 0.000 | 1.064 | 0.020 | |
| *p* | 0.098 | 0 000 | 0.258 | 0.000 | -0.101 | 0.000 | 2.228 | 0.000 | 0 319 | 6.217 | |

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.097 | 0.000 | 1.000 | 0 000 | 0.371 | 3 752 | -2.941 | 0 000 | -0.798 | 0.795 | 2 144 |
| 4 | -0 336 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0 659 | -4.790 | 5.882 | 0.000 | 0.168 | 1 454 | 2 207 |
| 8 | -0.158 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.546 | -2.120 | 2 647 | 1.000 | -0.996 | 0.636 | 1.164 |
| 2 | 1.239 | 1 000 | 0.000 | 0.000 | -0 029 | 2.038 | -2.941 | 0.000 | 0.630 | 0.452 | |
| *p* | 0.123 | 0 000 | 0.000 | 0 000 | -0.05 | 0 967 | 1.471 | 0.000 | 0 113 | 6.421 | |

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים , |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.204 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 5.190 | -4 736 | -0.678 | -0 123 | 0 363 | 2.144 |
| 4 | -0.145 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | -2.234 | 2.691 | -1.206 | 1.369 | 0.687 | 2.207 |
| 5 | -0.290 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | -3.879 | 4.844 | 1.830 | -1.822 | 1.164 | 1 164 |
| 2 | 1.123 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.924 | -2.799 | 0.054 | 0.577 | 0.486 | |
| *p* | 0.122 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0 946 | 1.496 | 0.010 | 0.104 | 6.427 | |

**איור 11:** טבלת הסימפלקס שלבים 5-2

כאמור, הטבלה האחרונה מאופיינת על־ידי כך, שכל המקדמים בשורה האחרונה אינם שליליים, כלומר, אי־אפשר להגדיל יותר את הרווח. הפתרון האופטימלי שהתקבל הוא 0 363 אלפי דונם לעגבניות, 0.687 אלפי דונם לכותנה, 1 164 אלפי דונם לתירס ו 0.577 אלפי דונם לתפוחי־אדמה. בפתרון אופטימלי זה מנוצלים כל המשאבים עד תומם, דבר המתבטא בכך שכל ארבעת משתני העודף הם בעלי ערך אפס. הרווח האופטימלי הוא · 6.427 מליוני דולרים. יש לציין שהפתרון האופטימלי שהתקבל מצביע על כך שבתנאים הנתונים יש לוותר לחלוטין על גידול הבוטנים.

כיוון, שלרשות משתתפי המעבדה עומדת עתה תוכנה מוכנה, שהם הכינו, הם יכולים לנצל אותה לחקירות "כלכליות" שונות, כמו למשל איך יושפע הפתרון האופטימלי על־ידי שנוי מחיר הבוטנים כדי להדגים זאת, נניח שמחיר הבוטנים עלה, ומתקבלים עתה 2.6 מליוני דולרים מ־1000 דונם. הפעלת שיטת הסימפלקס במקרה זה נותנת כעבור 5 שלבים את טבלת הסימפלקס הסופית הבאה

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.000 | -0.166 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 4.871 | -4.272 | 0.687 | -0.219 | 0.282 | |
| 5 | 0.000 | .0235 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | -3.426 | 4.185 | 1.843 | -686 | | |
| 1 | 1.000 | 0.812 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.563 | -2 274 | 0.044 | 0.468 | 0.395 | |
| 4 | 0.000 | 0.118 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | -2.007 | 2.361 | -1.99 | 1.437 | 0.744 | |
| *p* | 0.000 | 0.307 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.538 | 0 636 | 0.026 | 0.281 | 6.577 | |

**איור 12:** טבלת הסימפלקס הסופית לאחר העלאת מחיר הבוטנים

כפי שרואים, הפתרון האופטימלי עכשיו מצביע על כדאיות לגדל עגבניות, תירס, בוטנים וכותנה עם חלקות קרקע מוקצבות המופיעות בעמודה 10. הרווח האופטימלי המתקבל הוא 6 577 מליוני דולרים, ובתנאים חדשים אלה, כדאי לותר לחלוטין על גידול תפוחי־אדמה.

כדי להדגים את שלל האפשרויות ל"חקירות כלכליות" נוספות, נביא דוגמה נוספת בה נחזיר את מחיר הבוטנים ל 2.1 אבל נעלה את מחיר הכותנה מ 2.5 ל 2.6. הפעלת שיטת הסימפלקס במקרה זה נתנה כעבור ארבעה שלבים את טבלת הסימפלקס הסופית הבאה

| בסיס | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | אגף ימין | אילוצים |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.097 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.371 | 3 752 | -2.941 | 0.000 | -0.798 | 0.795 | |
| 4 | -0 336 | 0.000 | 0.000 | 1.000 | 0 659 | -4.790 | 5.882 | 0 000 | 0 168 | 1.454 | |
| 8 | -0.158 | 0.000 | 0.000 | 0 000 | 0 546 | -2.120 | 2.647 | 1 000 | -0.996 | 0.636 | |
| 2 | 1.239 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | -0.029 | 2.038 | -2.941 | 0.000 | 0.630 | 0.452 | |
| $p$ | 0.0089 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.061 | 0.488 | 2.059 | 0.000 | 0.130 | 6.567 | |

**איור 13:** טבלת הסימפלקס הסופית לאחר העלאת מחיר הבוטנים

הפתרון האופטימלי הפעם מצביע על כדאיות לגדל **שלושה גידולים בלבד**: עגבניות, כותנה ותפוחי־אדמה הפעם ערכו של $x_8$ בפתרון האופטימלי הוא 0 636 ופירושו שאין מנצלים את כל המשאבים עד תום, במשאב הטרקטורים נשאר עודף של 6 63 שעות טרקטור בשבוע משמעות הדבר שהתכנון הנותן את הרווח המקסימלי, אינו דורש את ניצול כל שעות הטרקטור העומדות לרשות המשק, ולכן אפשר, למשל, להשכיר את אחד הטרקטורים למשק שכן לרוב ימות השבוע

בשלב זה, מוצע לאפשר למשתתפי המעבדה לבדוק שינויי מחירים נוספים או שינויים אחרים, ולקבל פתרונות אופטימליים עם יותר מעודף משאבים אחד מובן שבחקירות אלה, אין הכוונה עדיין לעסוק בנושא הרגישות, אבל הן יכולות לשמש כנקודת התחלה לפיתוח נושא זה בהמשך במעבדה המתמטית

לסיכום נאמר, כי בכל הדיון התרכזנו במקרה הנאיבי, ולא היתה לנו כל יומרה לכסות את נושא התכנון הליניארי בכללותו (כולל מקרים חריגים) מטרתנו היתה להציג את נושא התכנון הליניארי בפני הלומדים הצגה ראשונית, בצורה מוחשית ומתאימה למעבדה נומרית יתירה מזו, כאשר מספר המשתנים המקוריים גדול מ 2, התנהגות הפתרון היא מעבר לגבולות האינטואיציה הגאומטרית הפשוטה, וחשיבותם של המשפטים הכלליים תהיה ברורה למשתתפי המעבדה באמצעות משימה זו, יכולים התלמידים לקבל תחושה ראשונית לבעיות "מן החיים", בהם עשויים לחיות מעורבים עשרות אם לא מאות משתנים במקרים אלה מתעוררת כמובן גם השאלה, האם אפשר למצוא שיטה חלופית לשיטות הסימפלקס, שתגיע לפתרון האופטימלי **לאו דווקא** באמצעות מעברים על שפת הקבוצה הקמורה של הפתרונות האפשריים, ותוך צמצום **ניכר** של מספר שלבי הביניים

**רשימת ספרות**


1 Blackwell D. and Henkin L., AAAS Project 2061 — **Report of the Mathematics Panel**, Dec. 1986
2 Breuer S. and Zwas G., Area Approximations in the Mathematical Laboratory, **Int. J. Math. Edc. Sci. Technol.**, 1983, 14, 373.
3. Breuer S., Gal/Ezer J. and Zwas G., Microcomputer Laboratories in Mathematics Education, **Computers and Mathematics with Applications**, Pergamon Press, 1990, 19, 13-34
4. Gal/Ezer J., Zwas G., An Algorithmic Approach to Linear Systems, **Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.**, 1984, 15, 501
5. Wagner H.M., **Principles of Operation Research**, Prentice-Hall International Inc., London, 1975.
6 Albers, D.J. Reid, C., An Interview with George B. Dantzig: The Father of Linear Programming **College Math. J.**, 1986, 17, 293.

הערה: Int. J Math Educ Sci. Technol. שמו הוא קצור של International Journal of Mathematics Education in Science and Technology