הצגת משפטים מתמטיים והוכחותיהם – הצמחה לעומת הצנחה[1]

מאת ניצה מובשוביץ-הדר[2]

1. מבוא

אחת המשימות המוטלות על כל מורה למתמטיקה היא הצגת משפטים המלווה לאחר מכן בהוכחתם. תכנון הביצוע של משימה זאת כולל קבלת החלטה בעניין הדרך להצגת אותו משפט, בחירת האמצעים לכך וכן בחינת האפשרויות השונות לבנייתה של סידרת הצעדים שממנה תורכב הדרך המחברת את הצגת המשפט להוכחתו. במה צריכים להתחשב כאשר עושים את שיקולי הדעת הללו? מה הן האפשרויות? ככל שמרבים לחשוב עליהן, כן גדל המבחר. במאמר זה נתאר דרכים אחדות להצגת משפטים ונדגימן באמצעות שני משפטים. שתי דרכים (אחת לכל משפט) הן דרכים המעוררות את התלמידים יותר מהדרכים האחרות, ולכן נטען שהן יוצרות תנאים יותר נוחים להצגת ההוכחות בהמשך. גם להצגתן של הוכחות נבדוק דרכים אחדות שתודגמנה על ידי הוכחתם של אותם שני המשפטים. נבחן את השפעתן של ההוכחות השונות מנקודת ראותם של התלמידים, וזאת בזוכרנו כי "הוכחה טובה היא הוכחה שעושה אותנו לחכמים יותר משהיינו" (Manin, 1977, עמ' 51).

בחלק זה נתמקד בהצגות של משפטים. נושא ההוכחות יידון בחלק השני, שיתפרסם בגיליון הבא של עליה.

2. הצגות שונות של המשפטים

2.1 הצגה מפתיעה של משפט על מטריצה ריבועית מיוחדת במינה.

המטריצה בטבלה 1 היא מסדר של 8×8. נניח שהשיעור מתחיל במטלה הבאה:

א. נא לבחור מטריצה חלקית מסדר 4×4 ולבחור ארבעה מספרים מתוכה כך שכל אחד נמצא בשורה ובעמודה שונות מאילו שבה נמצא כל אחד מהשלושה האחרים. יש לחבר את ארבעתם ולרשום את הסכום.

ב. נא לחזור על א' עבור רביעיות שונות.

טבלה 1
מטריצה מייצגת עבור המשפט הראשון

10	11	12	13	14	15	16	17
19	20	21	22	23	24	25	26
28	29	30	31	32	33	34	35
37	38	39	40	41	42	43	44
46	47	48	49	50	51	52	53
55	56	57	58	59	60	61	62
64	65	66	67	68	69	70	71
73	74	75	76	77	78	79	80

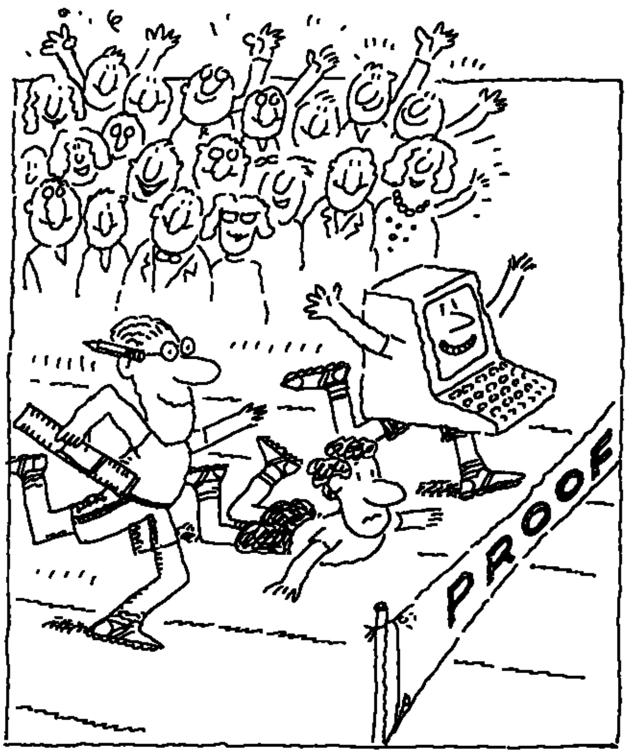
כעבור זמן קצר התלמידים יביעו את הפתעתם, שכן כל הסכומים יהיו שווים. כתוצאה מכך יהיו כאלה שיחליטו לנסות תת־מטריצה אחרת מסדר 4×4 או אולי מסדר אחר, על מנת לבדוק האם התופעה חוזרת על עצמה גם בהן. אחרים ירגישו צורך לבחון את המטריצה המקורית מסדר 8×8 ולחפש מהו הדבר אשר עושה את כל הסכומים הללו לשווים. כעבור עוד דקות אחדות הם יעמדו על כך ש־64 המספרים אינם אוסף מקרי של מספרים אלא קיים הפרש קבוע (של 1) בין כל שני איברים סמוכים שנמצאים באותה שורה, והפרש קבוע (של 9) בין כל שני איברים סמוכים שנמצאים באותה עמודה. אבל מה לזה ולסכום השווה של כל ארבעה איברים שכל אחד לקוח משורה ומעמודה השונים מאילו של חבריו?

1 מאמר זה פורסם בעיתון הבינלאומי לחינוך מתמטי
For The Learning of mathematics, Vol 8 No 2 1988, pp 12 30
מהדורה מוקדמת של המאמר הוצגה בכנס השנתי של האיגוד למתמטיקה בישראל תל־אביב 1987

2 תודתי נתונה לד״ר דורית פטקין על עזרתה בהכנת המהדורה העברית של המאמר

בנקודה זאת, יהיו רק מעטים שיוכלו להשיב על השאלות שהפעילות עצמה העלתה, אולם רבים יותר יהיו אולי מוכנים להעלות את ההשערה **שלכל** מספר שלם חיובי n, ולכל מטריצה מסדר $n \times n$ מעל לממשיים בעלת התכונות של המטריצה בטבלה 1, הסכום של **כל** קבוצה בת n איברים שאף שניים מהם אינם בני אותה שורה וגם לא בני אותה עמודה — הוא קבוע

בעוד התלמידים עסוקים בחישוב הסכום של, נאמר, רביעיות המספרים השונות בתת־מטריצה מסדר 4×4 לפי בחירתם, יכול המורה להסתובב ביניהם ובזריזות מפתיעה לומר לכל תלמיד את



הסכום המתאים לתת־מטריצה שבה בחר הדבר נעשה בהעפת־מבט אל שני המספרים הנמצאים בשני הקצוות של אחד האלכסונים בתת־המטריצה כדי לקבל את הסכום הקבוע של כל רביעיה כנ״ל צריך פשוט לחבר אותם ואת התוצאה לכפול ב־2 לקבלת הסכום הקבוע המתאים ל n כלשהו, צריך לכפול את הסכום של שני מספרים הנמצאים. בפינות הנגדיות של אחד האלכסונים, בחצי המימד של תת המטריצה לדוגמא בטבלה 1, הסכום הקבוע של כל 8 איברים הנבחרים כנ״ל, הוא $360 = 8/2 \cdot (10+80)$
זוהי ואריאציה על התחבולה של לוח־השנה של מל סטובר, שתואר ע״י מרטין גרדנר (Gardner, 1956, עמ׳ 49) הטריק מרמז על כך שיש משהו מיוחד באלכסונים כאשר התלמידים מוכנים להעלות השערה כללית, אחדים מהם אולי ישימו לב לכך ש־n האיברים בכל אחד מהאלכסונים מהווים קבוצה המספקת את הדרישה שדרשנו בהתחלה אין בתוך קבוצה זו שניים מאותה שורה או מאותה

עמודה זה הזמן בו בשלים הלומדים למתן ההוכחה, אליה נחזור בהמשך

ההפתעות המתעוררות עם הצגת המשפט בדרך זאת, התמיהות שהיא מעוררת והפעילויות שהתלמידים יוזמים כתוצאה מכך בהמשך, מצביעות על סקרנות אינטלקטואלית המתעוררת בתהליך הצגת המשפט באורח זה הצגה זו מעוררת את התלמידים להתענין ולרצות לדעת משהו אודות מטריצות — משהו שלא ידעו קודם ואף לא היו מעוניינים לדעת

האם ההצגה הבאה של המשפט משיגה השפעה דומה?

2.2 הצגה סימבולית

ההצגה שלהלן אופיינית לספרי לימוד ולכתבי עת רבים במתמטיקה הצגות כמו זאת מועתקות באופן אוטומטי מהלוח אל מחברות התלמידים עם השפעה קטנה, בדרך־כלל, על תהליכי החשיבה של התלמיד

משפט

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ מעל השדה R שאבריה $A_{i,j}$ מקיימים

$$\begin{cases} A_{i,j+1} - A_{i,j} = C_1 \\ A_{i+1,j} - A_{i,j} = C_2 \end{cases}$$

באשר C_2, C_2 הם קבועים ו־n, $i,j = 1,2,3, \quad$

אזי קיים מספר ממשי C_3 כך שעבור כל

$A_{i_1,j_1}, A_{i_2,j_2}, \quad , A_{i_n,j_n},$

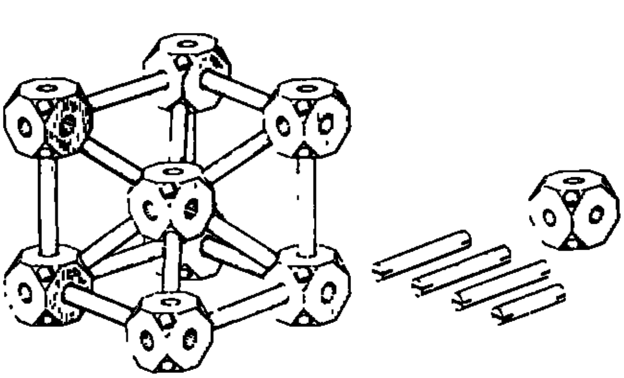
שמקיימים

$r \neq s \Rightarrow i_r \neq i_s, j_r \neq j_s$

לכל $r,s = 1,2,3, \quad ,n$

מתקיים $\sum_{k=1}^{n} A_{i_k,j_k} = C_3$

סביר להניח שרק תלמידים מעטים יצליחו אחרי ניסוח זה של משפט מיעוט קטן ירד לסוף משמעותו אם כך יוצג המשפט בפעם הראשונה עוד פחות סביר להניח שנוסח זה יעורר עניין ברבים



2.3 הצגה מילולית

מורים למתמטיקה שרגישים יותר לענין ההבנה, משלבים אינטרפרטציה מלולית, כאשר הם באים ללמד משפט, וזאת במטרה ל"האיר" במקצת את המשמעות של הסימבוליקה המתמטית הפורמלית. הצגה כזו עשוייה להראות בערך כך

המורה אומר(ת)	**המורה כותב(ת)**
המשפט שאותו אנו עומדים	תהי A מטריצה מסדר
להוכיח היום מאוד מעניין	$n\times n$ מעל הממשיים עם
הוא טוען שכאשר יש לנו	איברים $A_{i,j}$ כך ש
מטריצה ריבועית כלשהי	$A_{i,j+1} - A_{i,j} = C_1$
עם מקדמים ממשיים,	$A_{i+1,j} - A_{i,j} = C_2$
ובעלת שתי התכונות	באשר C_1, C_2 קבועים
האלה	ו $i,j = 1,2,3,\ldots,n$
השורות מהוות סדרות	אזי
חשבוניות שלכולן אותו	קיים מספר ממשי C_3 כך
הפרש, וגם הטורים מהווים	שעבור כל
סדרות חשבוניות בעלות	$A_{i_1,j_1}, A_{i_2,j_2}, \ldots, A_{i_n,j_n}$
אותו הפרש, **אזי** כל n	שמקיימים
איברים שאף שניים מהם	$r\neq s \Rightarrow i_r\neq i_s$ ו $j_r\neq j_s$
אינם באותה שורה או	לכל $r,s=1,2,3,\ldots,n$
באותה עמודה, סכומם	מתקיים
שווה	$\sum_{k=1}^{n} A_{i_k,j_k} = C_3$

עד כמה משכנעת טענה זו? כמה מהתלמידים ירגישו רצון להוכיח משפט זה אחרי "הצגתה" כזאת? אם תלמיד איננו "מתעורר" מהצגה מעין זו, האם בו האשמה? שאלות אלה הן שאלות מפתח, שיש להתייחס אליהן לפני שמתייאשים ומפסיקים לחפש אלטרנטיבה מתאימה להצגת המשפט

2.4 הצגה דרך חקירה אינדוקטיבית

הגישה של גילוי מודרך ראוייה לבחינה רצינית כאן. אופייני לגישה זאת מתן מערכת מטלות, בדרך כלל בעלת אופי של סידרה אינדוקטיבית של בעיות, המכוונת למטרה מסויימת (Zaslavsky & Movshovitz-Hadar, 1986). בדוגמה שלנו סידרת המטלות יכולה להראות כמו בדוגמה להלן

פתיחה

בפעילויות הבאות תלמדו על מטריצה ריבועית בעלת התכונות הבאות כל אחת מחשורות מהווה סדרה חשבונית, ולכולן אותו הפרש גם כל אחד מהטורים מהווה סידרה חשבונית ולטורים השונים אותו הפרש למטריצה כזאת נקרא "מטריצה עם הפרשים משותפים" או בקיצור מטריצה עם הפמ"ש

מטלה 1

א נא לבנות מטריצה עם הפמ"ש מסדר 2×2

ב נא למצוא את הסכום של כל שניים מאברי המטריצה

ג אם מצאת משהו מעניין?

ד עליך לבחון מקרים נוספים של מטריצות עם הפמ"ש מסדר 2×2, עד שתעלה בדעתך השערה כללית

ה לבסוף, עליך להוכיח או להפריך את השערתך

מטלה זו קלה ומבטיחה סביר להניח שאפילו תלמידים צעירים שיקבלו משימה זאת כמטלה בודדת יעבדו עליה ברצון, ואף יסיימו אותה בסיפוק בהוכיחם את התגלית העצמית שלהם

מטלה 2

נא לחזור על מטלה 1 עבור מטריצה עם הפמ"ש מסדר 3×3, ולחקור את הסכומים של הצרופים השונים של שלושה מאבריה

הבעיה פה מורכבת יותר בכל מטריצה מסדר 3×3 יש עשרים ואחת אפשרויות שונות לצרף שלושה איברים רק שש מהאפשרויות נותנות אותו סכום שש האפשרויות האלה הן של שלושת אברים שנלקחו כל אחד משורה אחרת ומטור אחר התהליך של זיהוי כל עשרים ואחת האפשרויות מצריך שיטתיות ושליטה במעקב אחרי בחירתן, כדי להימנע מחזרה על שלשה שכבר נבדקה מחד, וכדי לוודא מיצוי כל האפשרויות, מאידך בנוסף לכך, זיהוי של שש השלשות שסכומיהן שווים בקרב עשרים ואחת האפשרויות, מצריכה הבחנה לגמרי לא פשוטה, גם אם נניח שלא נעשתה בדרך שום טעות חשבון לבסוף מציאת תכונה משותפת לששת הצירופים המיוחדים אשר מבחינה ביניהם לבין יתר הצירופים, היא אתגר בפני עצמו כל זה, עד כאן, כשמדובר במטריצה אחת מסדר 3×3 לאור העבודה הרבה הכרוכה בחקירת מקרה אחד, יש סיכוי לא מבוטל שהתלמידים יסתפקו בבדיקה כזאת, ולמרות הסיכון שיש בביסוס השערה על בדיקת מקרה יחיד, יתפתו לעשות זאת ההשערה לגבי החוקיות במטריצה עם הפמ"ש מסדר 3×3 ניתנת להוכחה על ידי הצגת הביטויים האלגבריים המתאימים לשש הקומבינציות, ובדיקה שסכומיהן אכן שווים נחזור בהמשך אל ההוכחות של מקרים פרטיים ושל קשריהן עם ההוכחה הכללית

מטלה 3

עכשיו נחזור על מטלה 1, אבל עבור מטריצה עם הפמ"ש מסדר 4×4 ועבור הצירופים של כל ארבעה מאבריה

במקרה זה יש לבחון 364 צרופים בכל מטריצה בנוסף לכך התלמידים אמורים להבחין בכך שלעשרים וארבעה מהצרופים, המהווים רק 7%, יש אותו סכום אפילו נשנה את המטלה ונציע שתבחנה רק רביעיות שאין בהן שני אברים מאותו טור או מאותה שורה, גם אז יצטרכו התלמידים להתמודד עם 24 צרופים במקרה של מטריצה מסדר 5×5 יש כבר 125 צירופים כאלה

האם יש צורך להמשיך כדי לשכנע את עצמנו שסיכויי הגילוי, ויהיה מושך ומרתק ככל שיהיה, אינם עומדים בהתחרות עם השיעמום ותחושת בזבוז הזמן המעורבים בתהליך המייגע של החיפוש אחריו? מצד שני, אם ברצוננו לספק לתלמידים בסיס מספיק כדי להעלות השערה כללית, לכל מטריצה עם הפמ"ש מסדר $n\times n$, האם אנו יכולים להרשות לעצמנו לנטוש את התהליך האינדוקטיבי כבר אחרי המטלה השניה?

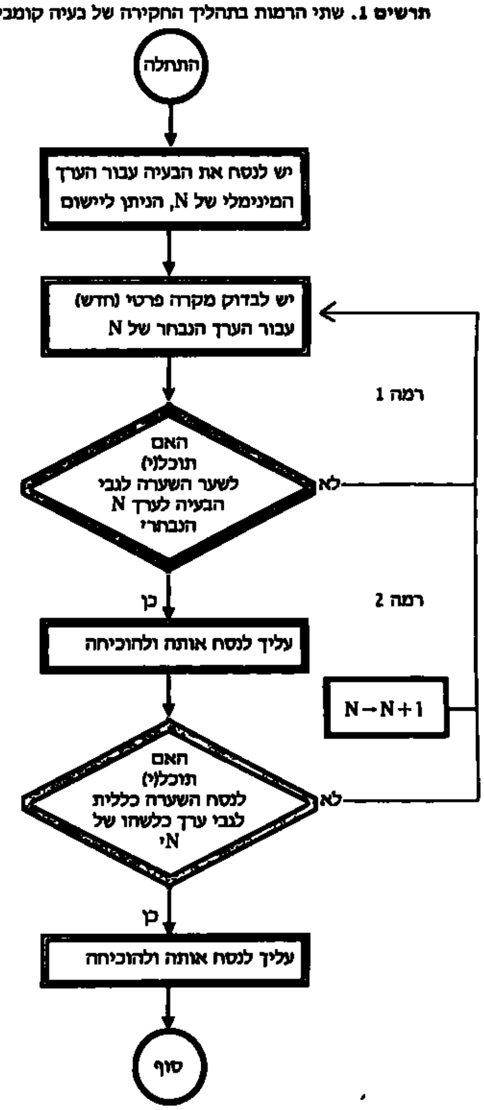
הצגת משפטים בדרך הגילוי, כפי שהדגמנו לעיל, מורכבת למעשה מחקירה אינדוקטיבית בשתי רמות שונות הראשונה היא הרמה של המקרה הפרטי, והשניה היא רמת המקרה הכללי ברמת

המקרה הפרטי, החקירה האינדוקטיבית מיועדת לפתרון הבעיה עבור ערך מסוים של n למשל, בדיקה של כמה שיותר מקרים של מטריצות עם הממ״ש מסדר 3×3 מתבצעת לצורך העלאת השערה לגבי **כל** מטריצה עם הממ״ש מסדר 3×3 בדוגמא שלפנינו, רמת המקרה הכללי היא הניסוח של השערה עבור המקרה הכללי של מטריצה עם הממ״ש מסדר m אנו נשענים כאן על הוכחות של מקרים פרטיים של מטריצות עם הממ״ש מסדר 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 הוכחות של המקרים הפרטיים האלה הן, בתורן, תוצאה מהעבודה ברמת המקרה הקונקרטי

תרשים 1 מתאר את שתי הרמות

ההכללה הדו־שכבתית הזאת, המאפיינת במקרים רבים את תהליכי החקירה האינדוקטיבית, היא מקור הקושי העיקרי בהצגת משפטים בשיטת הגילוי המודרך לפני שנעבור לדיון יותר מעמיק בענין זה, נעיין בעוד משפט ובדרכים שונות להצגתו

תרשים 1. שתי הרמות בתהליך החקירה של בעיה קומבינטורית



2.5 ״הנחתה״ מדהימה של משפט על תכונה מיוחדת של המספרים הראשוניים

הונסברגר (Honsberger, 1970) מספר על נפה שהומצאה ב 1934 ע״י סטודנט הודי בשם סאנדארם (Sundaram) כמכשיר לניפוי המספרים הראשוניים מבין השלמים החיוביים
הנפה מתבססת על המטריצה האינסופית המוצגת בטבלה 2

טבלה 2

הנפה של סאנדארם

4	7	10	13	16	19	22	25
7	12	17	22	27	32	37	42
10	17	24	31	38	45	52	59
13	22	31	40	49	58	67	76
16	27	38	49	60	71	82	93

הונסברגר מוסיף ומסביר כי לטבלה זאת יש תכונה מיוחדת והיא **אם n אינו מופיע בה, אז $2n+1$ הוא מספר ראשוני** (שם, עמוד 75) זה באמת מפתיע למרות שקל לראות שבין המספרים שבטבלה יש קשרים חיבוריים, לא נראה לעיין שניתן לקשרן עם ראשוניות, שהיא בעיקרה תכונה כפלית יתרה מזאת, ידוע שהמספרים הראשוניים הם בעלי מופע בלתי סדיר לא קיימת עבורם שום נוסחה היוצרת את כולם ורק אותם, והאמצעי היחיד המוכר היטב לאיתורם הוא הנפה של ארטוסתנס, שזכורה בדרך כלל כתהליך מגושם ודי מוזר המוגבל למציאת ראשוניים בתת־קבוצות חסומות מלעיל של המספרים הטבעיים לכן הטענה של סאנדארם, המוצגת לעיל אינה זקוקה לשום תבנייה כדי להשיג אפקט של הפתעה רבה. עצם הצגת הטענה עושה זאת, על אף היותה כה פורמלית ו״מוצנחת״ מיד עם קריאת ההצהרה על התכונה של הטבלה, נוצר איזה שהוא צורך פנימי לראות הוכחה שאכן התכונה הזאת מתקיימת אנו נביא אותה בחלקו השני של המאמר את החלק הזה נסיים בדיון קצר בהצגות השונות של שני המשפטים

2.6 דיון בהצגות השונות של משפטים

ג׳ון מייסון ואחרים (Mason et al, 1985) סבורים שהחשיבה המתמטית מתעוררת כאשר התרשמויות חדשות מתנגשות עם דעות קיימות (עמ׳ 151) ובין השתיים נוצר פער מובן מאליו שפער כזה נוצר בשתי ההצגות המפתיעות שהבאנו למשפטים שלעיל במקרה של המטריצה, הפער הוא בין קיומו של הסכום המשותף לבין קיום מספר רב של אפשרויות שונות לצרף n מאברי המטריצה, שלכאורה אין ביניהן שום דבר משותף במקרה של המספרים הראשוניים — הפער הוא בין אוסף של סדרות חשבוניות שיש בהן חוקיות חיבורית ברורה לבין המספרים הראשונים המוגדרים על בסיס כפלי, וידועים ככאלה שלהופעתם אין חוקיות קבועה לאף אחת מדרכי ההצגה האחרות שהבאנו לעיל אין הפוטנציאל ליצור פער כזה, שכאמור, מעורר לחשיבה מתימטית לפי מייסון

נתייחס עתה לתגובה הצפויה של הקהל להצגות האחרות ההצגה הפורמלית או ההצגה המלולית של המשפט הראשון וההצגה המפתיעה של המשפט השני בשלושת המקרים "מוצנחים" על השומעים משפטים הצהרתיים אולם, הניסוח של המקרה האחרון הוא יחסית קל להבנה, משמעותי ומפתיע קרוב לוודאי תתעורר תמיהה אצל הקורא או השומע "היתכן?" המשפט הראשון, לעומת זאת, מצריך עבודת פיענוח לא מעטה לשם הבנת משמעותו, שעלולה להעלות עם סיומה את השאלה "נו, אז מה?" התגובות להצגת המשפטים יכולות להתהפך כשמשתמשים בהצגות שונות לאותם משפטים עצמם למשל, ההצגה המפתיעה של המשפט הראשון יכולה לעורר את השאלה "הכיצד?" ואילו, הצגה שונה של המשפט השני יכולה להשאיר את הקורא כמעט אדיש ושואל "אז מה?" נראה הצגה כזאת בהמשך בסעיף "פיתוח מלמטה־למעלה של ההוכחה (והמשפט)"

אם מורים למתמטיקה יסכימו לתת עדיפות ראשונה להצגות משפטים אשר מעוררות מחשבה, צריך יהיה להעניק את העדיפות לאלה ביניהן שגורמות לסוג מסויים של הפתעה יש אומרים שכל מורה טוב הוא למעשה שחקן מתוסכל הפתעות מתמטיות הן כלי ביטוי נהדר לאותם שחקנים "סימן השאלה" שניבט מעיני התלמידים הסקרנים הוא תענוג שלא כדאי לאף מורה להחמיץ ולוותר עליו אם לא בעבור היתרון של המוטיבציה המתעוררת כתוצאה מהצגות מהסוג המפתיע, כדאי להביאן ולו רק בגלל הפוטנציאל הטמון בהן להוות אמצעי־מנע לשחיקה מקצועית של המורה

המשך המאמר בגיליון הבא.