הנושא: **הצעה להוכחת המשפט:** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

הוכן ע״י: עלי עותמאן.

תקציר: בחומר מובאת הוכחה למשפט באמצעות אי שוויון הממוצעים.

מילות מפתח: אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, גבול, אלגברה, אי שוויון הממוצעים.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 36, תשס״ו 2006, עמוד 46.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

הצעה להוכחה למשפט: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (n מייצג מספר טבעי)

עלי עותמאן

נוכיח את המשפט בעזרת אי שוויון הממוצעים האומר:

אם $x_1, x_2, \ldots, x_n$ מספרים חיוביים אזי:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}$$

ברור כי: $n=1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$. ($n-2$ 'אחדים'). ברור גם כי: $\sqrt[n]{n}\ge1$.

לכן: $$1\le\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}\le\frac{1+1+1+\ldots+1+\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n}$$

כאשר מספר ה'אחדים' הוא $n-2$.

לכן: $$1\le\sqrt[n]{n}\le\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n}\Leftrightarrow1\le\sqrt[n]{n}\le1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

כאשר $n\to\infty$, נקבל:

$$1\le\sqrt[n]{n}\le1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{array}{ccc}\downarrow & & \downarrow\\ 1 & & 1\end{array}$$

ולכן, לפי 'משפט הסנדוויץ'', $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$