הנושא: מתוך שיקולים גרפיים

בעקבות מאמרו של יפים כץ ״עוד דרך לפתרון בעיות עם פרמטרים״ – על״ה 28

הוכן ע״י: קלרה זיסקין.

תקציר: במאמר מתוארת שיטה לפתרון בעיות בנושא 'חקירה של פונקציות ריבועיות עם פרמטרים', המסתמכת על הייצוג הגרפי ומעמיקה בכך את ההבנה של המושג פונקציה.

מילות מפתח: אלגברה, חקירת משוואה ריבועית, פרמטר, אי שוויון לינארי, אי שוויון ריבועי, פונקציה, משפחת פונקציות, פונקציה לינארית, קו ישר, פונקציה ריבועית, פרבולה, קדקד פרבולה, חיתוך ישר ופרבולה.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 36, תשס״ו 2006, עמודים 42-46.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

ale36-7

מתוך שיקולים גרפיים

בעקבות מאמרו של יפים כץ **"עוד דרך לפתרון בעיות עם פרמטרים" – על"ה 28**

קלרה זיסקין
claraz@research.haifa.ac.il
היחידה הקדם אקדמית של אוניברסיטת חיפה

בעיות חקירה של משוואה ריבועית עם פרמטרים מהוות מוקד קושי עבור תלמידים רבים. לדבריהם: "קשה לזכור מהם התנאים המתאימים לכל מצב" והם משתדלים "ללמוד בעל-פה". אלא שלימוד בעל-פה של רשימת תנאים מוכנה מראש, לא מבטיח פתרון נוח לכל השאלות. וכדי להצליח בפתרון ראוי לא להשתמש בזכירה, אלא בהבנה. שימוש מושכל בנוסחאות וייטא בוודאי מתאים לפתרון בעיות כאלה, אולם במידה זו או אחרת, הוא מחייב זכירה ופתרון של מערכת אי-שוויונים.

אציג במאמר דרך לא שגרתית, לפתרון בעיות חקירה של משוואות ריבועיות (ולאו דווקא ריבועיות) בעזרת שיקולים גרפיים. הדרך המוצעת מסתמכת על יצירת תיאור גרפי מתאים למרכיבי הבעיה.

להלן מספר דוגמאות לשאלות חקירה ופתרונן בדרך המוצעת.

דוגמה 1

נא להוכיח כי למשוואה: $(x-m)(x+3m)=2x$ יש שני פתרונות שונים לכל ערך ממשי של m.

פתרון

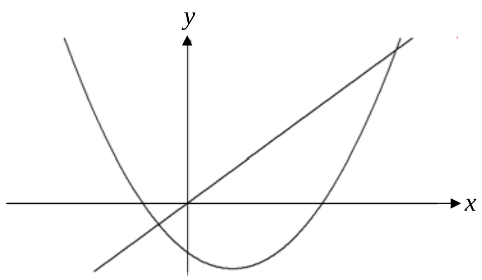
אין צורך בפתיחת הסוגריים, בסידור של משוואה ריבועית ובהוכחה שהדיסקרימיננטה חיובית לכל m ממשי.

נסמן שתי פונקציות: $f(x)=(x-m)(x+3m)$ ו-$g(x)=2x$.

הפונקציה $f(x)$ מייצגת משפחת פרבולות בעלות מינימום, אשר עבור כל $m\neq 0$, חותכות את ציר ה-x בשתי נקודות שונות: $(m,0)$ ו-$(-3m,0)$ הנמצאות משני צידי ראשית הצירים, וזאת ללא תלות בערכו ובסימנו של הפרמטר m.

הגרף של $g(x)$ הוא ישר העובר דרך ראשית הצירים והוא <u>בהכרח</u> יחתוך את הפרבולה <u>בשתי נקודות</u>.

בשרטוט מתואר מצב עבור m שלילי:



במקרה בו $m=0$ קדקוד הפרבולה נמצא בראשית הצירים והישר $g(x)$ חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות (מדוע?).

אפשר לשנות את הפונקציה $g(x)$ ל- $g(x)=k\cdot x$, וזאת אמנם כבר בעיה בשני פרמטרים, אך פתרונה אינו קשה יותר מהבעיה שהוצגה.

כל מורה יכול ליצור מספר רב של תרגילים מסוג זה.

דוגמה 2[1]

נא למצוא לאילו ערכים של הפרמטר m יש למשוואה: $x^2+(m+1)x+2m-1=0$ שני שורשים ממשיים שונים בעלי סימנים מנוגדים.

[1] מתוך: בני גורן – "אלגברה 4-5 יח"ל", עמ' 204, תרגיל 27

פתרון

נרשום את המשוואה כך: $x^2+(m+1)x=1-2m$

נסמן: $f(x)=x^2+(m+1)x$ ו- $g(x)=1-2m$

הפונקציה $f(x)$ מייצגת משפחת הפרבולות בעלות מינימום, החותכות את ציר ה-x בנקודות: $(0,0)$ ו- $(-(m+1),0)$ הנקודות שונות זו מזו כאשר $m\neq -1$.

$g(x)$ היא משפחת ישרים המקבילים לציר ה-x.

נברר ראשית את המקרה בו $m\neq -1$:

על מנת שישר השייך למשפחת הישרים $g(x)$ יחתוך פרבולה מהמשפחה $f(x)$ (בעלת מינימום העוברת בראשית הצירים וחותכת את ציר ה-x בנקודה נוספת) בשתי נקודות, משני צידיו של ציר ה-y, הישר חייב להיות מעל ציר ה-x, כלומר, צריך להתקיים:

$1-2m>0$

ומכאן: $m<\frac{1}{2}$ וגם: $m\neq -1$.

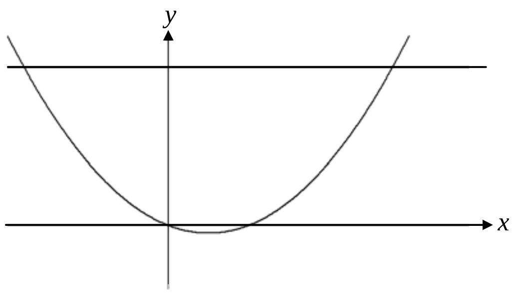
ומה קורה כאשר $m=-1$?

הפונקציות הן: $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=3$

ולהן שתי נקודות חיתוך כנדרש.

לסיכום, התשובה: $m<\frac{1}{2}$.

בשרטוט מתואר מקרה בו $m+1<0$.



דוגמה 3[2]

נא למצוא עבור אילו ערכים של הפרמטר m שורשי המשוואה: $x^2+(m-5)x+1=0$ הם שונים וחיוביים.

פתרון

ניצור למשוואה תיאור גרפי דומה לזה של השאלה הקודמת.

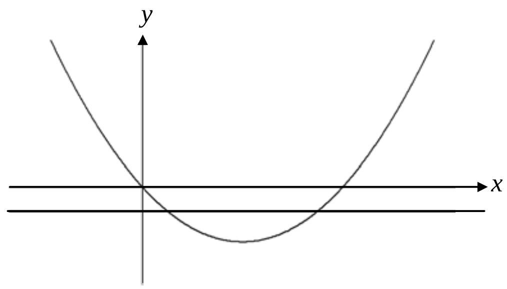
נרשום אותה כך: $x^2+(m-5)x=-1$

נסמן: $f(x)=x^2+(m-5)x$ ו- $g(x)=-1$

הפונקציה $f(x)$ מייצגת משפחת פרבולות בעלות מינימום, החותכות את ציר ה-x בנקודות: $(0,0)$ ו- $(-(m-5),0)$ הנקודות שונות זו מזו עבור $m\neq 5$. הגרף של הפונקציה $g(x)$ הוא הישר המקביל לציר ה-x: $y=-1$.

על מנת שהישר $y=-1$ יחתוך את הפרבולה בשתי נקודות, ששיעור ה-x שלהן חיובי צריכים להתקיים שני תנאים:

1. נקודת החיתוך השנייה של הפרבולה עם ציר ה-x (לא ראשית הצירים) צריכה להימצא בחלקו החיובי של הציר.
2. קדקוד הפרבולה צריך להיות מתחת לישר $y=-1$.
בשרטוט מוצג מצב המתאים לתנאים אלה.



קדקוד הפרבולה נמצא בנקודה:

$$\left(-\frac{(m-5)}{2},-\frac{(m-5)^2}{4}\right)$$

כדי שיתקיימו התנאים הדרושים יש לפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases}-(m-5)>0\\ -\dfrac{(m-5)^2}{4}<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-5<0\\ (m-5)^2>4\end{cases}\Leftrightarrow m<3$$

נותר לבדוק את המקרה בו: $m=5$. במקרה זה הפרבולה היא: $f(x)=x^2$, והישר $y=-1$ אינו חותך אותה.

לכן התשובה הסופית לשאלה היא: $m<3$.

בשלוש השאלות, שפתרנו עד כה, לא הופיע פרמטר במקדם של x^2. נניח כי המשוואה מסודרת באופן: $F(x)=0$. במקרה בו מופיע פרמטר במקדם של x^2 יש להבחין בין שני מקרים:

(i) המקדם מתאפס – מתקבלת משוואה ממעלה ראשונה;

(ii) המקדם לא מתאפס – במקרה זה ניתן לחלק בו את שני האגפים של המשוואה. כך מתקבלת, באגף

[2] מתוך: בני גורן – "אלגברה 4-5 יח"ל – עמ' 204 תרגיל 35

שמאל של המשוואה, פונקציה המתאימה למשפחת פרבולות בעלות מינימום, כבדוגמאות הקודמות.

נטפל להלן במספר בעיות בהן מופיע פרמטר במקדם של x^2 .

דוגמה 4[3]

נתונה המשוואה: $\frac{1}{m-1}\cdot x^2+3x+2m-3=0$

א. עבור אילו ערכים של הפרמטר m יש למשוואה לפחות שורש ממשי אחד?

ב. עבור אילו ערכים של הפרמטר m יש למשוואה לפחות שורש אחד חיובי?

פתרון

ראשית נציין כי במקרה זה לא קיים ערך של m עבורו מתאפס המקדם המוביל במשוואה הריבועית. יחד עם זאת הפרמטר לא יכול לקבל את הערך: 1.

א. עבור $m\neq 1$ ניתן לרשום את המשוואה בצורה:

$$x^2+3(m-1)x+(2m-3)(m-1)=0$$

או: $x^2+3(m-1)x=-(2m-3)(m-1)$

נסמן שתי פונקציות: $f(x)=x^2+3(m-1)x$

ו- $g(x)=-(2m-3)(m-1)$

הפונקציה $f(x)$ מייצגת משפחת פרבולות בעלות מינימום החותכות את ציר ה-x בשתי הנקודות השונות: $(0,0)$ ו- $(-3(m-1),0)$. הפונקציה $g(x)$ מייצגת משפחת ישרים המקבילים לציר ה-x.

על מנת שישר השייך למשפחה $g(x)$ יחתוך את הפרבולה המתאימה לו מהמשפחה $f(x)$ לפחות בנקודה אחת, הוא חייב לעבור דרך נקודת הקדקוד של הפרבולה או מעליה. (אפשר להתבונן בשרטוט הקודם). לצורך מציאת התנאי המדויק נמצא את שיעור ה-y של הקדקוד: $y_{\min}=-\frac{9}{4}(m-1)^2$.

עלינו, אם כן, לפתור את האי-שוויון:

$$-(2m-3)(m-1)\geq -\frac{9}{4}(m-1)^2$$

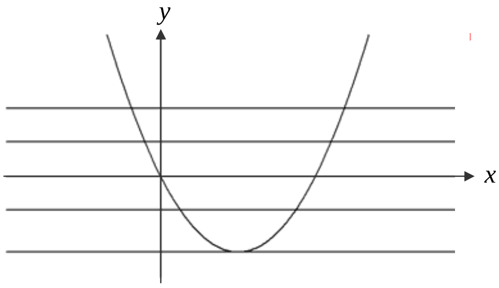
השקול לאי-שוויון: $(m-1)(m+3)\geq 0$

מכאן, *התשובה של סעיף א*: $m<1$ או $m\leq -3$.

ב. כאן יש לחלק את הבעיה לשני מקרים לפי המיקום של נקודת החיתוך השנייה של הפרבולה עם ציר ה-x: $(m<1)$ לעומת $(m>1)$

(1) נבחן את המקרה בו: $(m<1)$. במקרה זה נקודת החיתוך, השונה מראשית הצירים, נמצאת בקרן החיובית של ציר ה-x. במצב זה כל ישר המקביל לציר ה-x ועובר מעל הקדקוד או בו, עונה על דרישת השאלה. בשרטוט מוצג גרף של פרבולה, המייצג את הפרבולות אשר במשפחה וחותכות את ציר ה-x בראשית הצירים ומימינה, יחד עם ישרים מקבילים לציר ה-x החותכים את הגרף של הפרבולה:

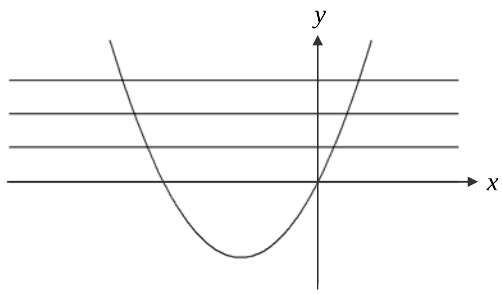
- בנקודת הקדקוד, ששיעור ה-x בה חיובי;
- או בשתי נקודות, ששיעורי ה-x שלהן חיוביים (הישר מעל הקדקוד ומתחת לציר ה-x);



- או בשתי נקודות, ששיעור ה-x של אחת מהן חיובי ושל השנייה: אפס (הישר מתלכד עם ציר ה-x);
- או בשתי נקודות, ששיעורי ה-x שלהן אחד חיובי והשני שלילי (הישר מעל ציר ה-x).

בכל אחד מהמצבים הנ"ל מתקיימת הדרישה שלמשוואה יהיה לפחות שורש חיובי אחד. כדי להבטיח מצבים אלה יש לפתור את מערכת האי-שוויונים: $m>1$ או $m\leq -3$ (הפתרון של סעיף א) וגם $m<1$ (התנאי). הפתרון המשותף: $m\leq -3$.

(2) נעבור לדון במקרה בו: $m>1$. במקרה זה נקודת החיתוך, השונה מראשית הצירים, נמצאת בקרן השלילית של ציר ה-x.



[3] מבחן בגרות 5 יח"ל– חורף תשנ"ד שאלה 3

כאן, כדי לחתוך גרף של פרבולה מהמשפחה $f(x)$ בשתי נקודות, שהאחת מהן נמצאת מימין לציר ה-y, הישרים מהמשפחה $g(x)$ חייבים לעבור מעל ציר ה-x.
כדי להבטיח מצב זה יש לפתור את האי-שוויון:

$$-(2m-3)(m-1)>0 \Leftrightarrow 1<m<1\frac{1}{2}$$

שהוא גם הפתרון המשותף עם התנאי $(m>1)$.
כך, *התשובה של סעיף ב היא*:

$$m\le -3 \text{ או } 1<m<1\frac{1}{2}$$

דוגמה 5[4]

נתונה הפונקציה: $y=(m+1)x^2+x-m+1$

א. עבור אילו ערכים של הפרמטר m יש לגרף הפונקציה ולישר $y=1$ נקודה משותפת אחת בלבד? מהם שיעורי הנקודה?

ב. נא להראות שלכל ערך של הפרמטר m, גרף הפונקציה והישר $y=1$ נפגשים לפחות בנקודה אחת.

פתרון

א. נבחין בין שני המקרים:

(i) אם $m=-1$, גרף הפונקציה הוא הישר: $y=x+2$ הנחתך עם הישר $y=1$ בנקודה אחת בלבד $(x,y)=(-1,1)$.

(ii) אם $m\ne -1$, גרף הפונקציה הוא פרבולה. לפי תנאי השאלה הישר $y=1$ חייב לחתוך את הפרבולה בנקודה אחת, כלומר, למשוואה:

$$(m+1)x^2+x-m+1=1$$

חייב להיות פתרון אחד בלבד.

נרשום את המשוואה לפי הדרך בה רשמנו את המשוואות בבעיות שלעיל: באגף אחד נרשום פונקציה ריבועית, העוברת בראשית הצירים, ובאגף השני יופיע מספר חופשי, כלומר:

$$x^2+\frac{1}{m+1}\cdot x=\frac{m}{m+1}$$

כמו קודם, נסמן שתי פונקציות חדשות:

$$g(x)=\frac{m}{m+1} \text{ -ו } f(x)=x^2+\frac{1}{m+1}\cdot x$$

ושוב: הפונקציה $f(x)$ מייצגת משפחת פרבולות בעלות מינימום ו-$g(x)$ מייצגת משפחת ישרים המקבילים לציר ה-x.

לפי תנאי הבעיה הישר השייך למשפחה $g(x)$ חייב לחתוך את הפרבולה המתאימה לו מהמשפחה $f(x)$ בנקודה אחת בלבד. מצב זה יתקיים רק כאשר הישר יעבור דרך קדקוד הפרבולה.
שיעורי הקדקוד הם:

$$y_{\min}=-\frac{1}{4(m+1)^2} \text{ -ו } x_{\min}=-\frac{1}{2(m+1)}$$

יש לפתור את המשוואה: $\frac{m}{m+1}=-\frac{1}{4(m+1)^2}$

כלומר: $(2m+1)^2=0$

נקבל: $m=-\frac{1}{2}$

במקרה זה הנקודה המשותפת לפרבולה: $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ ולישר $y=1$ היא $(-1,1)$.

ב. נתבונן בשתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. לפי הדרישה בבעיה, הישר מהמשפחה $g(x)$ חייב לחתוך את הפרבולה מהמשפחה $f(x)$ בנקודה אחת או בשתי נקודות.
כלומר, יש למקם את הישר כך שיעבור דרך קדקוד הפרבולה או מעליו. לשם כך יש לפתור את האי-שוויון:

$$\frac{m}{m+1}\ge -\frac{1}{4(m+1)^2} \quad \text{לפיכך:} \quad \frac{(2m+1)^2}{4(m+1)^2}\ge 0.$$

אי-שוויון זה מתקיים לכל $m\ne -1$, אבל לפי המקרה (i) הבעיה מתקיימת גם עבור $m=-1$.
לכן, לכל ערך של הפרמטר m, גרף הפונקציה והישר נפגשים לפחות בנקודה אחת.

דוגמה 6[5]

עבור אילו ערכים של הפרמטר m הגרף של הפונקציה: $f(x)=(m-2)x^2+4x+m$ נמצא כולו מתחת לישר $y=-1$?

פתרון

ברור, כי $m=2$ אינו מקיים את תנאי הבעיה: הישר $f(x)=4x+2$ לא נמצא כולו מתחת לישר $y=-1$.
לכן, יש לפתור את המערכת:

$$\begin{cases}(m-2)x^2+4x<-m-1\\ m\ne 2\end{cases}$$

---

[4] מבחן בגרות 5 יח"ל – קיץ תשס"ב, שאלה 2

[5] מבחן בגרות 5 יח"ל – קיץ תשס"א, שאלה 2

נסמן את שתי הפונקציות: $h(x)=(m-2)x^2+4x$ ו- $g(x)=-m-1$ כעת, יש למצוא את הערכים של m שעבורם כל אחת מהפרבולות ממשפחת הפונקציות $h(x)$ תהיה מתחת לישר המתאים לה ממשפחת הפונקציות $g(x)$.

ברור שהדבר לא יתכן לגבי פרבולות עם מינימום. לכן, הדרישה היא: $m-2<0$.

על מנת שכל הפרבולות בעלות מקסימום במשפחה $h(x)$ תימצאנה מתחת לישרים המתאימים להן ב- $g(x)$ חייב להתקיים: $y_{\max}<-m-1$, כלומר:

$-\frac{4}{m-2}<-m-1$ בידיעה ש- $m<2$.

לסיכום, התשובה היא: $m<-2$.

סיכום

בכדי לפתור את הבעיות בעזרת שיקולים גרפיים יש להגדיר שתי פונקציות (או משפחת הפונקציות) שניתן בקלות לצייר את סקיצות עבור הגרפים שלהן. בדרך כלל (במקרה של חקירת פונקציה ריבועית, משוואה ריבועית) אלה הן פרבולות העוברות בראשית הצירים וקווים ישרים המקבילים לציר ה-x. תוך התבוננות בתיאור הגרפי, יש לאפיין את הקשר הנדרש בין שני הגרפים על-פי תנאי הבעיה. אפיון הקשר דורש תהליך של פתרון משוואה או אי-שוויונים.