הנושא: מתרגול אלגוריתמי להוראה הדורשת הבנה באמצעות 'היפוך' של שאלות

הוכן ע"י: רותי רייז.

תקציר: במאמר מוצעת דרך הוראה המזמנת לתלמיד אפשרות של העמקת ההבנה של הנושא הנלמד. הגישה מבוססת על בניית שאלות חדשות מתוך שאלות קיימות, באמצעות 'היפוכן'. במאמר מובאות דוגמאות להפעלת אמצעי זה בתחומי תוכן שונים מתכנית הלימודים, המתאימות לחטיבת הביניים או לחטיבה העליונה: מספרים מכוונים, שאלות מילוליות, פונקציה קווית ואנליזה – חקירת פונקציות.

מילות מפתח: הבנה אינסטרומנטלית, הבנה רלציונית, היפוך השאלה, מספרים מכוונים, מספרים חיוביים, מספרים שליליים, פעולות במספרים מכוונים, חיבור, סכום, אלגברה, פתרון מערכת משוואות לינאריות עם שני נעלמים, בעיות מילוליות, שאלות מילוליות, תורת המספרים, התחלקות, כפולות, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה קווית, שיפוע, ציור בעזרת פונקציות, אנליזה, חקירת פונקציה, נקודות אפס, נקודות קיצון.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 36, תשס"ו 2006, עמודים 32-22.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 11 עמודים.

זה רעיון

מתרגול אלגוריתמי להוראה הדורשת הבנה באמצעות 'היפוך' של שאלות

רותי רייז
reiz@oranim.ac.il
"קשר חם", מוסד הטכניון למחקר ופיתוח
אורנים – המכללה האקדמית לחינוך
משרד החינוך – מחוז חיפה

אחד המרכיבים המרכזיים והבלתי נמנעים בלמידת מתמטיקה הוא תרגול. תרגול מתבצע בדרך כלל באמצעות פתרון של מספר רב של בעיות דומות שפתרונן נשען על אלגוריתם ידוע מראש. התרגול החוזר מתבצע במטרה להקנות לתלמידים שליטה במיומנות של הפעלת האלגוריתם. השאלה המתבקשת היא האם תלמידים, שרכשו מיומנות כזו רכשו גם הבנה של האלגוריתם בפרט והבנה של הנושא שאליו הוא קשור, בכלל?

מהי אם כן הבנה? למשמעות של המילה 'הבנה' ניתן למצוא התייחסויות שונות בספרות המקצועית. אביטל (אביטל ושטלוורס 1968), מיין את רמות ההבנה במתמטיקה לאור תורתו של ב.ס. בלום, וקבע את ההבחנה בין חשיבה אלגוריתמית לבין מחקר פתוח, כאשר ההבדל הבסיסי ביניהן הוא מידת החידוש הנדרש מהלומד לצורך פתרון הבעיה שלפניו. סקמפ (Skemp 1978 ,1991), בהתייחסו למושג 'הבנה', מבחין בין הבנה אינסטרומנטאלית להבנה רלציונית. הבנה אינסטרומנטאלית מתבטאת בהצלחה של ביצוע פרוצדורה מסוימת (כלומר, הבנה במובן של ידיעת האלגוריתם או הכלל לפתרון– עונה על השאלה: איך?), והבנה רלציונית מתבטאת בהצלחה להסביר מדוע פרוצדורה מסוימת מתאימה או הגיונית לצורך השגת מטרה מסוימת. הבנה רלציונית מתייחסת גם ליכולת לזהות יחסים בין מרכיבים שונים של בעיה ולקשר ביניהם. גם נשר (Nesher, 1986) מבדילה בין 'ביצוע אלגוריתמי' לבין 'הבנה', למרות שלדעתה ייתכן שההפרדה ביניהם היא בלתי אפשרית בכל אחד משלבי הלמידה: ביצוע אלגוריתמי עשוי לשפר את ההבנה וההבנה עשויה לשפר את הביצוע האלגוריתמי. לטענתה, אלגוריתם מאופיין בכך שהוא סופי ומבוצע צעד אחר צעד בסדר המתואר; ואילו להשגת הבנה יש לפנות למערכת של רעיונות קודמים ידועים והיא אינה סופית ומושלמת, אלא פתוחה. להבנה במשמעות של בניית הקשרים מתייחסים גם הייברט וקרפנטר (Hiebert and Carpenter, 1992). לטענתם, ניתן לראות הבנה כיצירה או ביסוס של קשרים בתוך תחום ידע קיים או בין ידע קיים לבין ידע חדש.

מכאן, במהלך לימוד נושא מתמטי מסוים, רצוי לשאוף להשגה של הבנה רלציונית, בנוסף להבנה האינסטרומנטאלית, וליצור או לבסס קשרים מתמטיים בתוך תחום הידע. ניתן לעשות זאת באמצעות התנסויות מתאימות. במאמר זה תוצע דרך אחת לכך.

לפי דרך זו, העמקת ההבנה עשויה להיות תוצאה של משימה בה נבנות שאלות חדשות מתוך שאלות קיימות – באמצעות 'היפוך' השאלות האלו. ה'היפוך' נעשה באופן הבא:

לוקחים את התוצאה / התשובה הסופית לשאלה, ומבקשים מן התלמידים לקבוע מהם הנתונים של השאלה שהביאו לתוצאה / תשובה זו. לעיתים, יש צורך לשנות במעט את האופן שבו מנוסחת התוצאה, על מנת ליצור שאלה הדורשת הבנה. באופן כזה, ניתן גם ליצור שאלות ברמות שונות.

במאמר זה מובאות דוגמאות אחדות ל'היפוך' השאלה. הדוגמאות הן בנושאים מתמטיים שונים, הקשורים לתוכנית הלימודים של חטיבת הביניים ושל החטיבה העליונה. בכל דוגמא תוצג תחילה שאלה שגרתית ולאחר מכן השאלה המתקבלת ממנה באמצעות

'היפוכה'. כמו כן, יוסבר בכל דוגמא כיצד התמודדות עם פתרון השאלה 'ההפוכה' עשויה להצביע על כך שהתלמיד אכן מבין את הנושא הנלמד. בנוסף, יודגם כיצד ניתן לבצע 'היפוך' של שאלה ולקבל משימות הדורשות הבנה של הנושא הנלמד ברמות שונות.

דוגמא ראשונה – חיבור מספרים מכוונים

במהלך למידת הנושא: 'חיבור מספרים מכוונים', מתרגלים התלמידים חיבור של שני מספרים שכל אחד מהם יכול להיות חיובי או שלילי.

דוגמא לדף עבודה בנושא זה:

נא לחבר את המספרים המכוונים הבאים:

$(-9)+(+2)=$	$(+2)+(+3)=$	$(+5)+(-18)=$
$(+1)+(+4)=$	$(-1)+(-6)=$	$(+3)+(-10)=$
$(-2)+(+7)=$	$(-4)+(+9)=$	$(-1)+(-12)=$
$(-4)+(-9)=$	$(-20)+(+7)=$	$(+10)+(-5)=$
$(-4)+(-3)=$	$(-8)+(-5)=$	$(-5)+(-2)=$
$(-16)+(+3)=$	$(+6)+(-1)=$	$(+5)+(-12)=$

דף עבודה מס' 1

במקרים רבים, לאחר שהתלמידים מקבלים את התוצאה הסופית של פתרון התרגיל, הם אינם מתפנים לבדוק האם התוצאה שהם קיבלו מתקבלת על הדעת.

התרגילים המובאים בדף העבודה אינם אוסף מקרי. הם נבנו במכוון כך שהתוצאות של כולם הן: (-13), (-7), $(+5)$. זאת, במטרה לאפשר למורה להציג בפני תלמידים, שסיימו את העבודה על דף זה, שאלות מכוונות שתשובה מנומקת עליהן עשויה להוביל אותם להבנה עמוקה יותר של הנושא. דוגמאות לשאלות כאלו:

- מה מיוחד בתשובות שהתקבלו לדף עבודה זה?
- האם ייתכן שנקבל תוצאה זהה משני תרגילים שונים?
- האם תוכלו לתת דוגמא נוספת לשני מספרים שסכומם (-7)?
- האם בכל תרגיל חיבור הסימן של התוצאה זהה לסימן של שני המחוברים?
- האם ייתכן שהתוצאה של חיבור שני מספרים תהיה קטנה מכל אחד מן המחוברים?
- באילו מקרים התוצאה המתקבלת קטנה מאחד מן המחוברים?
- האם ייתכן שתתקבל תוצאה חיובית מחיבור של שני מספרים שליליים?

חשוב מאד להנחות את התלמידים להתייחס לתוצאה המתקבלת לכל תרגיל בפרט ולכל התרגילים ביחד, באמצעות שאלות מסוג זה, היות ומענה על שאלות אלו עשוי להעמיק את הבנתם ביחס למהות של חיבור של שני מספרים מכוונים.

למעשה, קיימת כאן שאילה של שאלות 'הפוכות', שכן הנושא בכל שאלה הוא התוצאות של התרגילים בדף העבודה וכדי לענות עליהן יש לקבוע את המחוברים, כלומר צריך לנסות להבין את התוצאה. הצגת השאלות ההפוכות היא חלק מרצף ההוראה, ואינה דורשת ביצוע של פעילות נוספת שתוביל להבנה של הנושא.

ניתן לשאול שאלות 'הפוכות' גם ללא התייחסות לדף עבודה ספציפי כמו זה שהוצג לעיל. הנה מספר הצעות ל'היפוך' השאלה, שמתאים להציגן לתלמידים בסיום ההוראה של הפרק: חיבור מספרים מכוונים (גרסאות א-ד מתייחסות לקבלת תוצאה מסוימת וגרסא ה היא כללית):

<u>גרסא א – ייחודית לתוצאה (+5)</u>

1. נא לתת דוגמא **לשני מספרים** שסכומם (+5).
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים שסכומם (+5).
3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (+5) קיימים?

<u>גרסא ב – ייחודית לתוצאה (+5)</u>

1. נא לתת דוגמא **לשני מספרים חיוביים** שסכומם (+5).
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים חיוביים שסכומם (+5).
3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (+5) קיימים, בהנחה ששני המספרים חיוביים?

<u>גרסא ג – ייחודית לתוצאה (+5)</u>

1. נא לתת דוגמא לשני מספרים שסכומם (+5), כך **שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי**.
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים שסכומם (+5), כך שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי.
3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (+5) קיימים, בהנחה שאחד מהמספרים חיובי ואחד מהמספרים שלילי?

<u>גרסא ד – ייחודית לתוצאה (+5)</u>

האם יש שני מספרים שליליים שסכומם (+5)? אם כן, נא לתת דוגמא. אם לא, נא להסביר מדוע לא.

דף עבודה מס' 2

ניתוח גרסאות א-ד: גרסא א היא גרסא פתוחה, המאפשרת קבלת תשובות שונות: הן מחוברים ששניהם חיוביים והן מחוברים שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי. אחת המטרות של גרסא א היא לאפשר שאלה פתוחה לחלוטין, שעשויה להצביע על כיוון החשיבה של התלמיד. מטרה נוספת היא לאפשר לתלמידים ברמות שונות להיות שותפים לפעילות זו. יש לשים לב לכך שבשאלות מן הסוג שמופיעות בגרסא א, קיימת נטייה טבעית לתת דוגמאות של תרגילים שבהם שני המחוברים הם מספרים חיוביים [למשל: $(+2)+(+3) = +5$]. לכן, חשובות גרסאות ב ו-ג של אותה השאלה, המאפשרות למקד את התלמידים בעובדה שאמנם ייתכן כי שני המחוברים יהיו חיוביים (כמו בדוגמא), אבל בהחלט ייתכן גם שאחד המחוברים יהיה חיובי ואחד המחוברים יהיה שלילי [למשל: $(+7)+(-2) = +5$ וגם $(-2)+(+7) = +5$].

בנוסף, קיימת נטייה לתת דוגמאות של מחוברים שהם מספרים שלמים. כתוצאה מכך, ייתכן שחלק מן התלמידים יענו באופן שגוי על השאלה השלישית, בכל גרסא, לגבי מספר הדוגמאות שניתן לתת. הדבר עשוי לבלוט במיוחד בגרסא ב, בה שני המחוברים חיוביים – במקרה זה עלולים התלמידים לטעון שמספר האפשרויות הוא סופי. לכן, קיימת חשיבות לדון בשאלה השלישית בכל אחת מן הגרסאות, על מנת שתלמידים ייחשפו לאפשרות ששני המחוברים יהיו שברים ובכל זאת התוצאה תהיה מספר שלם [למשל:
$(-3.25)+(+8.25) = +5, (+2.3)+(+2.7) = +5$]
או לחילופין להוסיף שאלה שתמקד אותם בעובדה זו.

<u>גרסא ה – כללי</u>

1. נא לתת מספר דוגמאות לשני מספרים **שהאחד חיובי והשני שלילי**, כך **שסכומם יהיה חיובי**. כמה דוגמאות כאלו ניתן לתת? אילו תנאים צריכים לקיים שני המספרים?
2. נא לתת מספר דוגמאות **לשני מספרים שסכומם חיובי**.
כמה דוגמאות כאלו ניתן לתת? האם ייתכן ששני המחוברים יהיו חיוביים? שניהם שליליים? אחד חיובי ואחד שלילי?
3. נא לתת מספר דוגמאות **לשני מספרים שסכומם שלילי**.
כמה דוגמאות כאלו ניתן לתת? האם ייתכן ששני המחוברים יהיו חיוביים? שניהם שליליים? אחד חיובי ואחד שלילי?
4. האם ניתן לחבר שני מספרים מכוונים ולקבל תוצאה הקטנה מכל אחד מן המחוברים?

המשך דף עבודה מס' 2

ניתוח גרסא ה: השאלות בגרסא זו הן ברמה גבוהה יותר מן השאלות שבגרסאות הראשונות, היות והן שאלות כלליות שאינן ממוקדות בתוצאה בעלת ערך מספרי מסוים. שאלות מסוג זה הן מטבען קשות יותר לתלמידים. יחד עם זאת, חשוב מאוד להביאן בפני התלמידים על מנת לאפשר להם 'חשיבת על' / 'הסתכלות מלמעלה' על הנושא הנלמד ובכך לזמן להם אפשרות להעמיק את הבנתם ביחס למהות של חיבור מספרים מכוונים.

הגרסאות שהוצגו יכולות לקדם את השגת המטרות הבאות:

א. חזרה נוספת על כללי החיבור של מספרים מכוונים, שכן על מנת לענות על השאלות, התלמיד צריך להשתמש בכללים אלה.

ב. העמקת ההבנה של כללי החיבור של מספרים מכוונים על ידי 'ראיית על' של הנושא. משימת היצירה של דוגמאות על-פי דרישות נתונות, עשויות להעמיק את ההבנה של חיבור מספרים מכוונים. למשל: על מנת לקבל כסכום של שני מספרים, מספר הקטן מן המחובר הראשון, יש צורך לחבר אליו מספר שלילי. דוגמא נוספת: לא ייתכן שנחבר שני מספרים שליליים ונקבל תוצאה חיובית.

ג. התאמה של שאלות לתלמידים ברמות שונות, בהיותן שאלות פתוחות המאפשרות לכל תלמיד להביא לפחות דוגמא אחת. בנוסף, שאלות פתוחות מעין אלו מאפשרות תשומת לב לכך שבחלק מן המקרים יש אינסוף אפשרויות.

ד. יצירה של כלי המאפשר לעמוד על תפיסות נכונות או תפיסות שגויות שיש לתלמידים בהקשר לנושא הנלמד. למשל, התפיסה המוטעית שסכום של שני מספרים גדול בכל מקרה מכל אחד משני המחוברים. השאלות ה'הפוכות' עשויות להביא למודעות לכך שייתכן בהחלט לחבר שני מספרים ולקבל תוצאה הקטנה משניהם. או התפיסה המוטעית שאם הסכום הוא מספר חיובי אז בהכרח שני המחוברים הם חיוביים.

הערה: שאלות דומות ניתן כמובן לשאול גם לגבי פעולות החשבון האחרות: חיסור / כפל / חילוק של מספרים מכוונים.

דוגמא שנייה – פתרון מערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים

במהלך הוראת הנושא 'פתרון מערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים', נחשפים התלמידים לשלושה מקרים שונים: מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד, מערכת משוואות שאין לה פתרון, ומערכת משוואות שיש לה אינסוף פתרונות.

דוגמא לדף עבודה בנושא זה:

נא לפתור את מערכות המשוואות:

$\begin{cases}-x+3y=5\\2x-6y=1\end{cases}$ $\begin{cases}3x+2y=-1\\8x+3y=2\end{cases}$ $\begin{cases}7x-y=3\\14x-2y=6\end{cases}$

$\begin{cases}2x+4y=6\\-3x-6y=-9\end{cases}$ $\begin{cases}4x-2y=1\\-2x+y=2\end{cases}$ $\begin{cases}3x+2y=0\\-2x+5y=0\end{cases}$

$\begin{cases}-x+2y=7\\5x-3y=0\end{cases}$ $\begin{cases}-x+4y=2\\2x-8y=-4\end{cases}$ $\begin{cases}5x+y=3\\15x+3y=-1\end{cases}$

דף עבודה מס' 3

דף עבודה זה נבנה כך שיכלול את המקרים השונים שהוזכרו לעיל. ניתן כמובן להוסיף לדף העבודה מערכות נוספות מכל סוג.

תלמידים רבים, לאחר שהם מגיעים לתשובה הסופית של פתרון מערכת המשוואות, אינם מתפנים לבדוק האם התשובה שקיבלו נכונה ומלאה. כלומר האם למערכת שפתרו יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין לה פתרון כלל. האם קיימת דרך להוביל את התלמידים לכך שישאלו את עצמם: האם אכן זהו מספר הפתרונות המתאים למערכת המשוואות הנתונה? או לחילופין - להביא אותם להסתכלות על מערכת המשוואות כדי לדעת מראש מה מספר הפתרונות של המערכת. כל זאת תוך הכוונה להבנה של המקרים השונים, באמצעות מתן הסבר לתופעה המתקבלת כאן. ניתן לעשות זאת באמצעות 'היפוך' השאלות.

מערכות המשוואות, בדף עבודה מס' 3, ניתנו במכוון כולן בצורה: $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ על מנת לסייע לתלמידים להגיע להכללה ולהבנה, באמצעות שאלות מכוונות כגון:

- מה משותף לכל מערכות המשוואות שבהן התקבלו אינסוף פתרונות?
- מה משותף לכל מערכות המשוואות שאין להן פתרון?
- מה משותף לכל מערכות המשוואות שיש להן פתרון יחיד?

המטרה היא שהתלמיד יגיע להכללה ולתובנות הבאות:

למערכת משוואות מהצורה: $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

ייתכן שיהיה פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שלא יהיה פתרון. זאת בהתאם למקרים השונים הבאים:

- *למערכת יש אינסוף פתרונות* כאשר $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

  כלומר, קיימת פרופורציה בין המקדמים של הנעלמים, שנשמרת גם בין האיברים החופשיים.

  ההסבר לכך: במקרה זה יש למעשה רק משוואה אחת בשני נעלמים, היות ואחת מן המשוואות מתקבלת מן המשוואה השנייה על-ידי כפל/חילוק שלה במספר קבוע. למשוואה אחת בשני נעלמים יש אינסוף פתרונות, היות ולכל ערך של x ניתן למצוא ערך מתאים של y שיקיים את המשוואה הנתונה.

  כאשר עוסקים בפתרון גרפי של מערכת המשוואות, זהו המקרה שבו שני הישרים מתלכדים והפתרון הוא אוסף כל הנקודות הנמצאות על הקו הישר המתואר על-ידי כל אחת מן המשוואות.

- *למערכת אין פתרון כאשר* $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. כלומר, קיימת פרופורציה בין המקדמים של הנעלמים, אבל פרופורציה זו אינה נשמרת בין האיברים החופשיים.

  ההסבר לכך: אם נכפול / נחלק את אחת מן המשוואות בקבוע, נקבל ביטויים זהים באגף שמאל (בצורה שהמערכת הוצגה לעיל) של שתי המשוואות. אבל, היות ופרופורציה זו אינה נשמרת בין האיברים החופשיים, נקבל שבמשוואה הראשונה הביטוי שבאגף שמאל שווה לערך מסוים ואילו במשוואה השנייה אותו הביטוי שווה לערך אחר. לכן, מתקבלת כאן סתירה ומכאן שאין פתרון למערכת המשוואות.

  כאשר עוסקים בפתרון גרפי של מערכת המשוואות, זהו המקרה שבו הישרים הם מקבילים (בעלי שיפועים זהים עקב הפרופורציה הנ"ל) ולכן הם אינם נחתכים.

- *למערכת יש פתרון יחיד כאשר* $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

כאשר עוסקים בפתרון גרפי של מערכת המשוואות, זהו המקרה שבו הישרים נחתכים (יש להם שיפועים שונים) ונקודת החיתוך שלהם היא הפתרון של מערכת המשוואות.

למעשה, קיימת כאן שאילה של שאלות 'הפוכות', היות ומסתכלים על התוצאה של התרגיל (התשובה הסופית) ומנסים להבין אותה. השאלות ה'הפוכות' שנשאלות, בהקשר לדף העבודה, מהוות חלק מרצף ההוראה, אינן דורשות תכנון של פעילות ייחודית נוספת, ועשויות להעמיק את ההבנה של התלמידים בנושא.

ניתן לשאול שאלות 'הפוכות' גם ללא התייחסות לדף עבודה ספציפי כמו זה שהוצג לעיל.
הנה למשל הצעות אחדות לכך:

<u>גרסא א</u>

1. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, שיש לה **פתרון יחיד.**
2. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, **שאין לה פתרון.**
3. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים שיש לה **אינסוף פתרונות**.

<u>גרסא ב</u>

1. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, שיש לה **פתרון היחיד** $(2,-1)$.
2. האם ייתכן שלמערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, **לא יהיה פתרון**? אם כן, נא לתת דוגמא למערכת כזו. אם לא, נא להסביר מדוע לא?
3. האם ייתכן שלמערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, יהיו **אינסוף פתרונות**? אם כן, נא לתת דוגמא למערכת כזו. אם לא, נא להסביר מדוע לא?

דף עבודה מס' 4

ההבדל בין שתי הגרסאות הוא שבגרסא א מציגים בפני התלמיד את כל האפשרויות שקיימות לגבי פתרון של מערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני נעלמים, ובגרסא ב התלמיד צריך לתת את הדעת האם בכלל ייתכנו שני המצבים של 'אין פתרון' ו'אינסוף פתרונות'. לכן, גרסא ב קשה יותר. קושי נוסף בגרסא ב קיים בשאלה הראשונה, בה התלמיד צריך לשים לב, בנוסף לעובדה שנדרשת דוגמא למערכת בעלת פתרון יחיד, גם לעובדה ששיעורי x ו-y הנתונים צריכים לקיים את מערכת המשוואות.

דוגמא שלישית – שאלות מילוליות

הדוגמא הבאה היא שאלה מילולית הלקוחה מתוך מבחן מחוזי במתמטיקה לכיתות ח – משרד החינוך, מחוז חיפה – שנה"ל תשי"ס:

מפעל מאחסן את תוצרתו בצנצנות גדולות ובצנצנות קטנות.
בחודש ינואר הזמין אחד הקונים 72 ליטרים של המוצר, והוא קיבל אותם ב-30 צנצנות קטנות וב-4 צנצנות גדולות.
בחודש פברואר הזמין הקונה שוב 72 ליטרים של המוצר, אך הפעם הוא קיבל אותם ב- 6 צנצנות קטנות, וב-20 צנצנות גדולות.
כל הצנצנות היו מלאות בשתי ההזמנות.

א. כמה ליטרים מכילה הצנצנת הגדולה וכמה ליטרים מכילה הצנצנת הקטנה?
ב. האם קיימות אפשרויות נוספות למילוי 72 הליטרים, בצנצנות העומדות לרשות המפעל? הצנצנות כולן צריכות להיות מלאות.
אם כן, נא לפרט אפשרויות נוספות. אם לא, נא לנמק מדוע לא.

דף עבודה מס' 5

סעיף א של השאלה המילולית הוא 'שגרתי'. כדי לפתור אותו נסמן:
x – מספר הליטרים שמכילה צנצנת קטנה
y – מספר הליטרים שמכילה צנצנת גדולה
לפי תנאי השאלה, נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 30x+4y=72 \\ 6x+20y=72 \end{cases}$$

שפתרונה: $x=2\ ,\ y=3$.

מכאן: צנצנת קטנה מכילה שני ליטרים, וצנצנת גדולה מכילה שלושה ליטרים.

סעיף ב של השאלה הוא דוגמא ל'היפוך' השאלה . כאן ידועה התוצאה הסופית, שהיא הכמות שהוזמנה (72

ליטרים), וידועה הכמות שניתן לארוז בכל אחד מסוגי הצנצנות (2 ליטרים בצנצנת קטנה ו-3 ליטרים בצנצנת גדולה). מחפשים אפשרויות שונות לאריזה במספר צנצנות קטנות ובמספר צנצנות גדולות.

סביר להניח כי ללא השאלה המוצגת בסעיף ב, חלק מן התלמידים לא ישימו לב לכך שהכמות הסופית שהוזמנה בשתי הפעמים (בחודש ינואר ובחודש פברואר) היא אותה הכמות. המטרה של סעיף ב היא להפנות את תשומת לבם לכך ולאפשר ניתוח של מצב זה. למעשה, מחפשים בסעיף ב, אפשרויות שונות לרישום של 72 כסכום של שני מספרים, והשאלה הופכת עתה לשאלה הקשורה לתחום של תורת המספרים. ניתן למצוא מספרים כאלה באמצעות ניסוי וטעייה. אולם, אפשר גם למצאם בצורה שיטתית. לשם כך כדאי לבצע קודם ניתוח של השאלה באופן הבא:

מחפשים: $2\cdot\square+3\cdot\triangle=72$. המחובר הראשון, המייצג את הכמות הכוללת הנארזת בצנצנות קטנות, צריך להיות זוגי, כי הכמות בכל צנצנת קטנה היא 2. היות והסכום הוא זוגי, והמחובר הראשון הוא זוגי, גם המחובר השני צריך להיות זוגי. כמו כן, המחובר השני צריך להיות כפולה של 3, כי הכמות בכל צנצנת גדולה היא 3. מכאן, המחובר השני צריך להיות כפולה של 6 (כי הוא כפולה של 2 וגם כפולה של 3). לכן, אנו מחפשים למעשה שני מחוברים שסכומם 72, כך שהמחובר הראשון הוא זוגי והמחובר השני הוא כפולה של 6.

בטבלה מופיע פירוט האפשרויות ומספר הצנצנות המתקבל:

האפשרות לרישום 72 כסכום (המחובר הראשון זוגי, המחובר השני כפולה של 6)	מספר הצנצנות הקטנות (צנצנות של 2 ליטרים)	מספר הצנצנות הגדולות (צנצנות של 3 ליטרים)
72 + 0	36	0
66 + 6	33	2
60 + 12	30	4
54 + 18	27	6
48 + 24	24	8
42 + 30	21	10
36 + 36	18	12
30 + 42	15	14
24 + 48	12	16
18 + 54	9	18
12 + 60	6	20
6 + 66	3	22
0 + 72	0	24

שתי האפשרויות המודגשות הן האפשרויות שהיו נתונות בשאלה עצמה.

לתשומת לב מיוחדת ראויה העובדה שאף כי קיים חוק החילוף בחיבור (למשל, $42+30=30+42$), למחובר הראשון (הכמות הכוללת שנארזה בצנצנות קטנות) יש משמעות שונה מזו של המחובר השני (הכמות הכוללת שנארזה בצנצנות גדולות).

(הערה: ניתן היה להמשיך את הניתוח שהוצג לעיל ולטעון שהיות וקיבלנו שהמחובר השני מתחלק ב-6, וגם המספר 72 מתחלק ב-6, אז בהכרח גם המחובר הראשון מתחלק ב-6, ולכן, מחפשים למעשה את האפשרויות השונות לרישום של 72 כסכום של שני מספרים המתחלקים ב-6).

זוהי דוגמא לכך שבאמצעות 'היפוך' השאלה, הופכת השאלה לשאלה המזמנת חשיבה וניתוח של המצב המתקבל. במקרה זה, זוהי דוגמא גם לשאלה המאפשרת שילוב בין תחומים – שילוב בין נושא האלגברה הנלמד בחטיבת הביניים, לנושא מתורת המספרים הנלמד בבית הספר היסודי.

בנוסף, שאלה זו מתאימה לתלמידים ברמות שונות, היות ותלמידים ברמה נמוכה יותר יכולים לתת כדוגמא את שני המצבים הקיצוניים (מצב שבו כל הכמות מסופקת באריזות קטנות בלבד או שכל הכמות מסופקת באריזות גדולות בלבד), או לתת דוגמאות באמצעות ניחוש ובדיקה, ואילו תלמידים ברמות גבוהות יותר יכולים לבצע את הניתוח של המצב כפי שהובא לעיל.

דוגמא רביעית – פונקציה ממעלה ראשונה

במהלך הוראת הנושא 'פונקציה ממעלה ראשונה', על התלמידים להתמודד עם שרטוט גרף לפי תבנית של פונקציה. הנה דוגמאות למשימות מסוג זה:

1. נא לשרטט כל אחת מן הפונקציות הבאות, במערכת צירים נפרדת:

$y=\frac{1}{2}x+6\ ;\ y=-x+2\ ;\ y=2x-3$

2. נא לשרטט, במערכת צירים אחת, את הפונקציות הבאות:

$y=2x\ ;\ y=2x+1\ ;\ y=2x+2\ ;$
$y=2x+3\ ;\ y=2x-1\ ;\ y=2x-2\ ;$
$y=2x-3\ ;\ y=2x-4$

3. נא לשרטט, במערכת צירים אחת, את הפונקציות הבאות:

$y=x+1$; $y=1$; $y=2x+1$;
$y=3x+1$; $y=4x+1$; $y=-x+1$
$y=-2x+1$; $y=-3x+1$; $y=-4x+1$

4. נא למצוא, באופן גרפי, את נקודת החיתוך של שני הישרים: $y = 2x + 1$ ו- $y = -3x + 6$

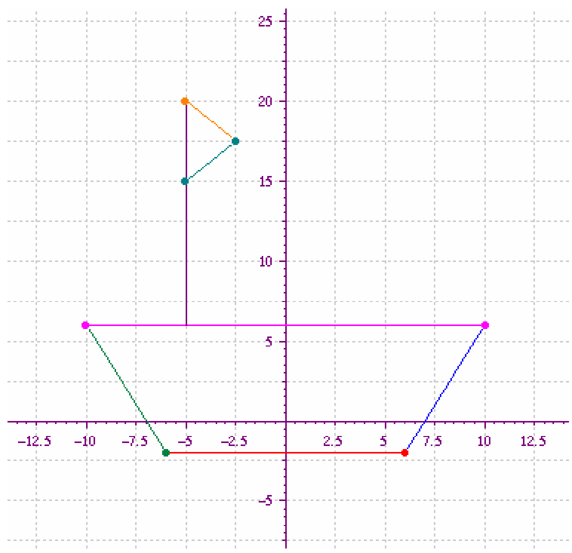
דף עבודה מס' 6

שאלות 'הפוכות', במקרה זה, הן השאלות שבהן נתון שרטוט של גרף הפונקציה ויש למצוא את תבנית הפונקציה. דוגמא לשאלה 'הפוכה' מסוג זה:

נא לשרטט ציור כלשהו על גבי דף נייר, המורכב מקווים ישרים.
לאחר מכן, נא לקבוע בעזרת אילו פונקציות ו/או קוים ניתן לשרטט את הציור.

דף עבודה מס' 7

ה'היפוך' בשאלה זו הוא בעובדה שנתונה התוצאה הסופית - השרטוט הגרפי של הפונקציה (או הקו), וצריך למצוא את התבנית שלה. 'היפוך' זה עשוי לזמן חשיבה לגבי אופן המציאה של תבנית הפונקציה.
לדוגמא, נשרטט ספינה באופן הבא:

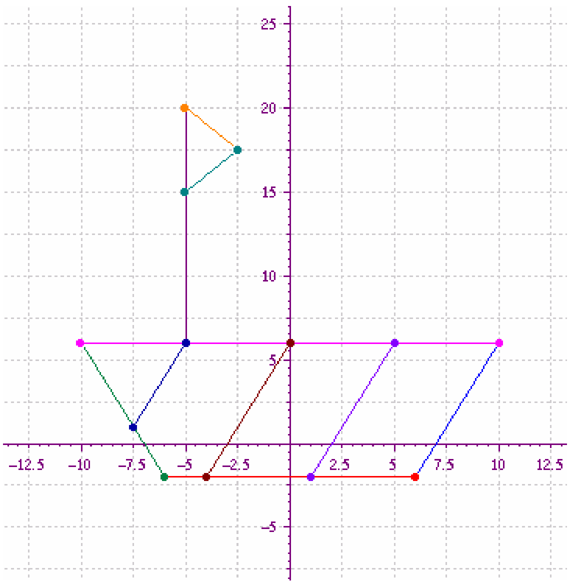


במקרה זה, השרטוט של הגרפים / הקווים נעשה בתחום מוגבל. על מנת למצוא את התבנית של כל אחד מן הקווים, צריך ראשית לקבוע את שיעורי הנקודות המהוות את הקצוות של כל אחד מן הקטעים (המהווים חלק מן הישר שאת משוואתו יש למצוא). לאחר מכן, למצוא את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות הללו. לבסוף, לקבוע את התחום שבו ישורטט הישר. כמו כן, צריך לדעת למצוא משוואה של קו ישר המקביל לציר ה-x. שימו לב, שבמקרה זה יש צורך לשרטט גם קו ישר, שאיננו פונקציה (תבנית מהצורה: $x=a$).

בטבלה מופיעים הפונקציות והקווים לשרטוט של ציור זה, והתחומים שבהם ישורטטו:

ביטוי	תחום
$y = 2x-14$	$6\le x\le 10$
$y = -2$	$-6\le x\le 6$
$y = -2x-14$	$-10\le x\le -6$
$y = 6$	$-10\le x\le 10$
$x = -5$	$6\le y\le 20$
$y = -x + 15$	$-5\le x\le -2.5$
$y = x + 20$	$-5\le x\le -2.5$

ניתן לשכלל את השרטוט, על ידי הוספת 'קישוט' לספינה, באופן הבא:



על מנת לשרטט את תוספת ה'קישוט' צריך לשים לב לכך שכל קטעי הישרים הנוספים הם מקבילים. לכן, על מנת למצוא את משוואותיהם יש צורך, עבור כל אחד מהקטעים, לקבוע את השיעורים של נקודה אחת שעל הישר – במקרה זה שיעורי הנקודה של אחד מקצות הקטע יכולים להוות בחירה נוחה, ואז למצוא את משוואת הישר העובר דרך נקודה זו ובעל אותו השיפוע כמו השיפוע של הישר שחלקו מהווה את דופן הספינה (במקרה זה: מקביל לישר: $y = 2x - 14$).

מובן מאליו שעל מנת לקבוע את שיעורי נקודת הקצה של הקטע, צריך לדעת שהיות והנקודה נמצאת על הקו המהווה את החלק העליון או התחתון של הספינה, שיעורי הנקודה צריכים לקיים את משוואת הישר המתאים.

לבסוף, יש לקבוע את התחום שבו ישורטט הקטע של הקו הישר. כדי לעשות זאת, יש צורך למצוא את נקודת החיתוך של הקו הישר עם הקווים האופקיים המהווים את החלק העליון / התחתון של הספינה.

בטבלה מופיעים הפונקציות והקווים לתוספת, שהוצגה לעיל בציור, והתחומים שבהם ישורטטו:

ביטוי	תחום
y = 2x - 4	1≤x≤5
y = 2x + 6	-4≤x≤0
y = 2x + 16	-7.5≤x≤-5

הידע בפונקציה ממעלה ראשונה שנדרש, על מנת לענות על שאלה 'הפוכה' זו, הוא: מציאת משוואה של קו ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות, מציאת משוואה של קו ישר העובר דרך נקודה נתונה ואשר מקביל לישר נתון, מציאת נקודת החיתוך של שני ישרים, התייחסות למקרים מיוחדים של קו ישר (ישר ששיפועו שווה לאפס), והתייחסות לכך שקו ישר המקביל לציר ה-y איננו פונקציה.

לפיכך, פעילות זו מתאימה לסיכום הנושא: 'הפונקציה ממעלה ראשונה'. 'היפוך' השאלות מזמן תרגול רב בנושא והתרגול נעשה לא 'סתם' לשם תרגול, אלא כדי להגיע למטרה שהיא כשלעצמה מסקרנת. בנוסף, עיסוק בשאלות כאלה, מאפשר העמקה של ההבנה בנושא, כתוצאה מהתייחסות לצורך למצוא את משוואת הישר המתאים בכל אחד מן המקרים.

הערה: ניתן כמובן להוסיף תוספות נוספות לשרטוט שהוצע לעיל. למשל, ניתן להוסיף שרטוט של גלים באמצעות שרטוט אוסף של פונקציות ריבועיות המוזזות אחת ביחס לשנייה, או באמצעות פונקציית סינוס או קוסינוס. למעשה, ניתן ליישם את הרעיון שהוצג כאן לכל סוג של פונקציה: פונקציה ממעלה שנייה, פונקציה טריגונומטרית, פונקציה לוגריתמית וכו', על-ידי כך שדואגים שהשרטוט יכלול פונקציות כאלו.

דוגמא חמישית – חקירת פונקציה באמצעות אנליזה

אחד הנושאים המרכזיים במסגרת לימודי האנליזה הוא הנושא: 'חקירת פונקציה'. התלמידים מקבלים תבנית של פונקציה והם מתבקשים לחקור אותה מבחינת: תחום הגדרה, זוגיות/אי-זוגיות (סימטריות), מחזוריות (עבור פונקציות טריגונומטריות), נקודות החיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה, אסימפטוטות, ולבסוף לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה. הנה דוגמא לפעילות מסוג זה:

נא לחקור את הפונקציות הבאות:

$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 3$	$y = \frac{x^4}{4} - 6x^2 + 30$
$y = \frac{x3}{x^2 - 1}$	$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}$
$y = \sqrt{x(3 - x^2)}$	$y = \sqrt{9 - x^2}$
$y = \sin 2x + 2\sin x$	$y = \cos^2 x - \cos x$
$y = x - \ln x$	$y = x \ln x$
$y = (x+1)e^x$	$y = xe^{-x}$

דף עבודה מס' 8

שאלות 'הפוכות' במקרה זה יכולות להיות, למשל, שאלות שבהן נתונות תכונות מסוימות של פונקציה וצריך למצוא תבנית של פונקציה המקיימת תכונות אלו. לדוגמא, נתמקד בתכונות של מספר נקודות אפס ומספר נקודות קיצון. שאלות שאפשר לשאול:

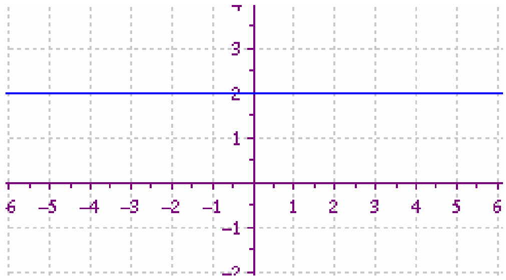
נא לתת דוגמא לפונקציה אשר:

א. אין לה נקודות אפס ואין לה נקודות קיצון.
ב. יש לה נקודת אפס אחת ואין לה נקודות קיצון.
ג. יש לה נקודת אפס אחת וכן נקודת קיצון אחת.
ד. יש לה שתי נקודות אפס ואין לה נקודות קיצון.

דף עבודה מס' 9

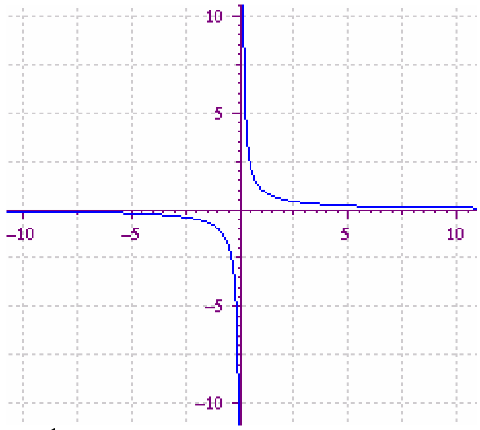
במקרה זה, על מנת לבצע את המשימות המבוקשות, צריך לבצע תהליך 'הפוך': צריך ראשית לשרטט סקיצה של גרף של פונקציה העונה על הדרישות, ואז למצוא את תבנית הפונקציה.

למשל, בסעיף א, ניתן לשרטט גרף של פונקציה קווית בצורה:



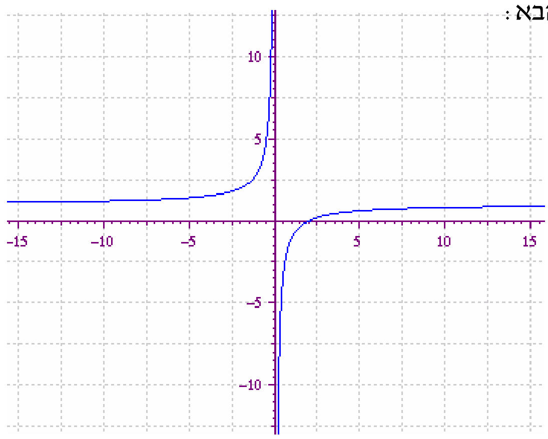
תבנית הפונקציה המתאימה לגרף זה היא: $y=2$.

אך ניתן היה גם לשרטט את הגרף הבא:



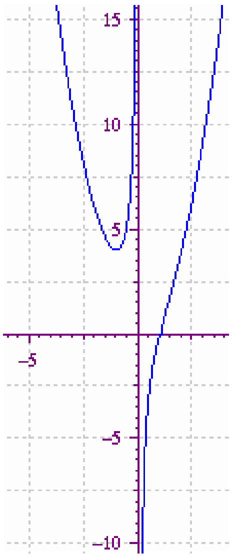
תבנית הפונקציה המתאימה לגרף זה היא: $y=\frac{1}{x}$.

בסעיף ב, ניתן לתת כדוגמא כל משוואה של קו ישר, שאיננו מקביל לציר ה- y, אך ניתן גם לשרטט את הגרף הבא:



תבנית הפונקציה המתאימה לגרף זה היא: $y=\frac{x-2}{x}$ (כיצד התקבלה תבנית הפונקציה?)

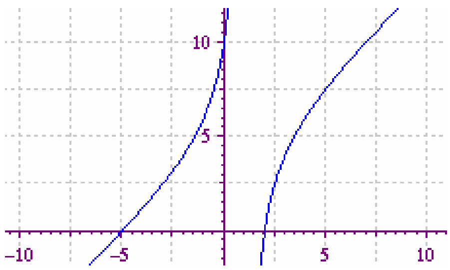
בסעיף ג ניתן לתת כדוגמא פרבולה שנקודת הקיצון שלה נמצאת על ציר ה-x (למשל: $y=(x-2)^2$) אך ניתן גם לשרטט את הגרף הבא:



תבנית הפונקציה המתאימה לגרף זה היא: $y=\frac{x-2}{x}+x^2$

(כיצד התקבלה תבנית הפונקציה?)

בסעיף ד ניתן לשרטט את גרף הפונקציה הבא:



תבנית הפונקציה המתאימה לגרף זה היא:
$$y=\frac{(x+5)(x-2)}{x-1}$$

ננתח, במקרה זה, את האופן שבו התקבלה תבנית הפונקציה:

נשרטט ראשית סקיצה של פונקציה שיש לה שתי נקודות אפס, ונקבע, באופן שרירותי, את שיעורי שתי הנקודות הללו, למשל: $(2,0)$, $(-5,0)$. כמו כן, נקבע, למשל, שלפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x=1$ (למרות שתכונה זו לא נדרשה בשאלה, אך זו אפשרות סבירה על סמך השרטוט).

תלמידים, שחקרו מספר רב של פונקציות, יכולים לזהות שזו יכולה להיות תבנית של פונקציה רציונלית. בנוסף, תלמידים שחקרו מספר רב של פונקציות רציונליות, יכולים להגיע להכללה ששיעורי ה-x של נקודות החיתוך עם ציר ה-x הם אותם ערכי x שעבורם המונה מתאפס. לכן, צריך לדאוג שבתבנית של הפונקציה הרציונלית איפוס המונה ייתן $x=-5$ ו-$x=2$, ומכאן, במונה צריך להופיע הביטוי $(x+5)(x-2)$ (עד כדי כפל בקבוע). בנוסף, התלמידים צריכים לדעת שאסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה מתאפס. היות ורוצים שהאסיפטוטה האנכית תהיה $x=1$, צריך לדאוג שהמכנה יתאפס עבור $x=1$ ולכן המכנה צריך לכלול את הביטוי $(x-1)$ (עד כדי כפל בקבוע). כך, קיבלנו את תבנית הפונקציה:

$$y=\frac{(x+5)(x-2)}{x-1}.$$

פונקציה נוספת שעונה על תנאי השאלה בסעיף ג היא הפונקציה: $y=\ln(x^2-x)$.

הערה: את הרעיון הנזכר ניתן לתת כדף מורכב יותר, בצורה הבאה:

לפניך תנאים שפונקציה צריכה לקיים, מבחינת מספר נקודות האפס שלה ומספר נקודות הקיצון שלה. יש למצוא תבנית של פונקציה שמתאימה לתנאים אלה (שימו לב, יש למצוא תבנית אחת של פונקציה ולא מספר פונקציות בתחום מפוצל):

מספר נקודות האפס	**מספר נקודות קיצון**	**דוגמא לפונקציה**
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	
2	0	
0	2	
1	2	
2	1	
0	3	
3	0	
0	4	
1	3	
3	1	
2	2	
4	0	

דף עבודה מס' 10

דף עבודה מס' 10 (הכולל את דף עבודה מס' 9) הוא דף עבודה שמתאים לתלמידים ברמות הגבוהות, היות וככל שמתקדמים במספר נקודות הקיצון ובמספר נקודות האפס, המשימה הופכת להיות מורכבת יותר. ניתן, כמובן, להמשיך טבלה זו ולהגיע אפילו עד לדוגמא של פונקציה שיש לה אינסוף נקודות אפס ואינסוף נקודות קיצון (זו לא בהכרח דרישה קשה, כי ניתן למשל לתת כדוגמא פונקציות טריגונומטריות שונות, למשל, את הפונקציה $y=\sin x$).

מאידך, ניתן להציג כל שורה בדף עבודה זה כשאלה בפני עצמה (כפי שהדבר נעשה בדף עבודה מס' 9) וכך ניתן להתאים את השאלה לרמת הכיתה. למשל, תלמידים ברמות הנמוכות יותר יוכלו לתת דוגמאות לפונקציות העונות על הדרישות הנמצאות בשורות הראשונות.

פעילויות מסוג זה מתאימות כסיכום הנושא: 'חקירת פונקציות', לאחר שתלמידים חקרו פונקציות רבות. באמצעות חקירות אלו הם יגיעו להכללות שונות. למשל, בדוגמא שהובאה לעיל עבור פונקציה רציונלית: שיעורי ה-x של נקודות החיתוך עם הצירים הם אותם ערכי x שעבורם המונה מתאפס, אסימפטוטה אנכית מתקבלת כאשר המכנה של הפונקציה מתאפס וכו'.

דוגמא נוספת: רוצים למצוא פונקציה שיש לה אינסוף נקודות קיצון ואין לה נקודות אפס. במקרה זה, ההכללה הבאה עשויה לעזור: כאשר מוסיפים מספר קבוע לתבנית של פונקציה נתונה, הגרף של הפונקציה מוזז כלפי מעלה. לכן, יש מקרים שבהם אם אנו מכירים תבנית של פונקציה שיש לה נקודות אפס, הוספת קבוע מספרי מסוים עשויה להביא לידי כך שלפונקציה החדשה המתקבלת לא יהיו נקודות אפס. כך, לפונקציה $y=\sin x$ יש אינסוף נקודות אפס ואינסוף נקודות קיצון, אבל הוספת כל מספר הגדול מ-1 תביא לכך שלפונקציה לא יהיו נקודות אפס. למשל, אם נוסיף 2 למשוואת הפונקציה הנזכרת, נקבל את הפונקציה: $y=2+\sin x$ שאין לה נקודות אפס ויש לה אינסוף נקודות קיצון.

כך, היכולת לתת דוגמא לפונקציה המקיימת תנאים מסוימים תוך התייחסות לתכונות השונות שלה, עשויה להעיד על הבנה ביחס לנושא של התנהגות פונקציה .

סיכום

'היפוך' השאלה מאפשר הצגה של שאלות אשר מענה עליהן עשוי:

1. להצביע על העמקת ההבנה בנושא לימוד מסוים.
2. לזמן ניתוח מעמיק של האלגוריתם המתמטי הקשור לנושא הלימוד.
3. לאפשר 'ראיית על' של הנושא הנלמד.
4. לאפשר חשיפה של תפיסות נכונות או שגויות שיש לתלמידים בהקשר לנושא הנלמד.
5. לאפשר תשומת לב למקרים השונים או למקרים מיוחדים הקשורים לנושא הנלמד.
6. לאפשר חשיפה להיבטים מתמטיים נוספים הקשורים לחומר הנלמד ו/או לנושאים מתמטיים נוספים.
7. לאפשר סיכום של נושא הלימוד.
8. להצביע על כך שלבעיה מתמטית אין בהכרח פתרון יחיד (במקרים בהם מוצגת שאלה פתוחה).

מקורות

אביטל ש., שטלוורס ש. (1968): יעדים ללימוד מתמטיקה, רעיונות אחדים למורים, בולטין מס. 3, המכון של אונטריו למחקר חינוכי. המהדורה העברית בהוצאת "קשר חם" 2006 .

באד ג'אד (1996). ציור על צג המחשב באמצעות פונקציות. פרוייקט "מחר 98" באצבע הגליל.

http://kesher.ort.org.il/scripts/index_info.asp?id=211109703&item=203996056

חורומוי נטלי (1996). ציור על צג המחשב באמצעות פונקציות. פרוייקט "מחר 98" באצבע הגליל.

http://kesher.ort.org.il/scripts/index_info.asp?id=295017784&item=985233849

צוות המתמטיקה – מחוז חיפה (2000). מבחן מחוזי לכיתות ח' – שנה"ל תש"ס, משרד החינוך והתרבות – מחוז חיפה.

סקמפ, ר. (1991). הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית. חלק א' - *על"ה 8*, עמ' 24-29, חלק ב' - *על"ה 9*, עמ' 24-27. המחלקה להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית, ירושלים.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*. 26(3), pp 9-15

Nesher, P. (1986) Are Mathematical understanding and algorithmic performance related? *For the Learning of Mathematics*, 6(3), pp.2-8.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. pp. 65-97. New York: MacMillan.