הנושא: מה יכול מורה בית-הספר העל-יסודי ללמוד ממורת בית-הספר היסודי

הוכן ע״י: רון אהרוני.

תקציר: המחבר פורש לפנינו עצות להוראה טובה אותן עיצב לעצמו בשנים האחרונות בעת שהתנסה בהוראה בבתי ספר יסודיים ובחטיבות ביניים. לתחושתו, המפגש עם שיטות ההוראה של מורות בבית הספר היסודי, תורם רבות לשיפור ההוראה ברמות הגבוהות. הוא מביא דוגמאות למהלכי הוראה בנושאים שונים, כמו: פתרון משוואות פשוטות, זהויות אלגבריות ותבניות מספר, משוואות ריבועיות ואפילו לוגריתמים.

מילות מפתח: כתב העת על״ה, על״ה 34, מספרים ופעולות, פעולות חשבון, אלגברה, טכניקה אלגברית, משתנה, נעלם, תבנית מספר, משוואה, משוואה אלגברית, נוסחאות הכפל המקוצר, משוואה ריבועית, ערך מוחלט, לוגריתמים, שיטות וגישות הוראה, הוראת המתמטיקה, חשיבה מתמטית, דוגמאות, מעבר בין ייצוגים, בעיות מילוליות, כללי.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 34, תשס״ה 2005, עמודים 10-17.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

ale34-3

מה יכול מורה בית-הספר העל-יסודי ללמוד ממורת בית-הספר היסודי

רון אהרוני
ra@tx.technion.ac.il
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

הקדמה

העצה הטובה ביותר שאפשר לתת למורה בבית-ספר על יסודי או באוניברסיטה היא: לך אל מורת בית-הספר היסודי, ראה דרכיה וחכם.

בשנים האחרונות אני מבלה חלק גדול מעיתותי בבתי-ספר יסודיים. לעתים אני מבקר גם בחטיבות ביניים, ואז אני מגלה עובדה מפתיעה. כל אימת שאני מצליח להבהיר שם לתלמידים נקודה כלשהי, אין זה בזכות ידיעותי המתמטיות או ניסיוני כמרצה באוניברסיטה, אלא מסיבה אחת בלבד – ניסיוני כמורה ביסודי, ומה שלמדתי מהרבה מאוד מורות מעולות שפגשתי שם.

כפי שיסופר בהמשך, המצב בבתי-הספר היסודיים בארץ הידרדר מאוד בעשורים האחרונים. חלק מחוכמת ההוראה של המורות הוחלף בתחבולות הוראה מוזרות של ספרים מוזרים, והתוצאות קשות. אבל בבסיסו של דבר, בית-הספר היסודי הוא בעיני עדיין המקום הטוב ביותר ללמוד עקרונות הוראה. במאמר הזה אנסה לתאר כמה עקרונות כאלה, ולהדגימם בנושאים אחדים. פרק הסיום יוקדש לכמה מן ההתרשמויות שלי מן החינוך המתמטי בחטיבות הביניים.

עקרונות

פירוק

במתמטיקה, יותר מאשר בכל תחום אחר, בנויים המושגים זה על גבי זה, במבנה של קומות. חלק מן הקומות הן עדינות וסמויות, ואז קל לדלג עליהן, במיוחד למי שכבר הפנים אותן, אבל לא ניסח אותן לעצמו במפורש. אך כשמנסים לבנות קומה על גבי קומה חסרה, צצה בעיה. זהו אחד המקורות לחרדת המתמטיקה הידועה.

הוראה אפשר לדמות לניסיון להעלות את התלמיד מן האדמה לגובה בניין בן כמה קומות. זאת אי-אפשר לעשות בקפיצה אחת. נחוץ לבנות סולם, יחד עם התלמיד, ולספק את השלבים שלו. יש תלמידים עם רגליים ארוכות, שעבורם מספיקים רווחים גדולים בין השלבים, ויש תלמידים עם רגליים קצרות שזקוקים לשלבים יותר קרובים זה לזה. גם לתלמידים בעלי רגליים ארוכות מועיל לנסח את כל השלבים.

הפרד ומשול

עיקרון שני, קרוב אבל לא זהה: אין ללמד שני עקרונות בבת-אחת. גם כאשר אינם נסמכים זה על זה, כדאי להפריד ביניהם, וללמד כל אחד לחוד. אם הלמידה משולה ללהטוט של זריקת כדורים לאוויר (juggling), די קשה לתלמיד להחזיק כדור אחד באוויר – שני כדורים עלולים להיות מעבר ליכולתו.

הדרך הארוכה ביותר בין שתי נקודות היא קיצור דרך

כל מורה יודע מניסיונו, שדילוג על שלבים עלול לעלות אחר כך במחיר כבד, של צורך בהסבר חוזר. הדבר נכון גם לגבי התלמידים: עדיף לכתוב עוד שלב בפתרון, מאשר להקדיש אחר-כך זמן רב לחיפוש הטעות. קיצור דרך עלול להתברר כדרך ארוכה.

משמעות

בעיני מרבית האנשים 'חשבון' פירושו הידיעה לחשב. האמת היא, שקודמת לידיעה זו הבנת המשמעות של פעולות החשבון, שהיא הקשר שלהן למציאות: אילו סוגי מצבים מתאימים לפעולת חיבור, אילו לחיסור וכו'. לפעולת חשבון אחת יכולות להיות משמעויות אחדות –גם בכך חשוב לדון.

דרך המלך להפנמת משמעות הפעולות היא להמציא באופן עצמאי סיפורי חשבון – סיפורים בהם נדרש שימוש בפעולת חיבור, חיסור, וכו'. דרך טובה ללמוד משוואות היא להמציא בעצמך משוואות, ומוטב – מלוות בסיפור מתאים מן המציאות.

התנסות מוחשית

את המושגים יש ללמוד על דרך ההתנסות המוחשית, ודווקא מן הסוג הפשוט ביותר. בבית-הספר היסודי ראוי שיהיו על שולחנו של הילד כל העת פריטי מנייה, מסוגים רבים, שבעזרתם ידגים לעצמו את המושגים

והעקרונות. את מושג המספר יבנה לעצמו התלמיד מתוך מנייה של עצמים. כשהוא לומד את השיטה העשורית הוא צריך לקבץ בעצמו לעשרות, למאות ולאלפים, ולא באמצעות עזרים שונים ומשונים. השלב הבא, אחרי ההתנסות המוחשית, הוא ציור חשבוני, שהיתרון בו הוא היעילות – הוא הרבה יותר קצר ומאפשר גמישות. השימוש בציורים חשבוניים הוא מועיל גם למתמטיקאים מקצועיים, לא כל שכן עבור תלמידים בבית-הספר.

ניסוחים מפורשים ומדויקים

שלב חיוני ברכישתו של עיקרון הוא ניסוח מפורש ומדויק שלו. מלים הן משענת ונקודת אחיזה, והמפתח לחשיבה מדויקת. דעה שאפשר לשמוע מפי אנשי חינוך היא שבבית-הספר היסודי אין צורך לנסח מושגים וכללים מפורשים. למעשה, ההיפך הגמור הוא הנכון. ניסוח בהיר של כללים ושימוש בשפה מדויקת הם חיוניים לייצוב הידע. יותר מכך – ילדים אוהבים מונחים, סימונים, וניסוחים של כללים.

עיקרון קשור לכך: ראוי להבהיר את מקורם של שמות המושגים. כך למשל: מדוע קוראים למונה 'מונה' ולמכנה 'מכנה'? ומה מקור השמות 'מחסר' ו'מחוסר', 'מחלק' ו'מחולק'? זוהי הזדמנות לדון בצורה הדקדוקית של פעלים ולהבחין בין פעיל וסביל.

ניסוח מפורש ומדויק חשוב גם בנוגע למה שנראה מובן מאליו. גם מה שנראה פשוט דורש אמירה.

ניסוחים מדויקים כרוכים גם בהבאה למודעות, וכן ברפלקציה – מה עשינו? ומדוע? מודעות לתהליכי חשיבה מקלה על יישום של כלי חשיבה שנרכשו בפתרון בעיה קודמת לפתרון בעיות אחרות.

התנסות צריכה להיות מלווה בכתיבה

כלל טכני במקצת, אבל חשוב: אחרי התנסות בדבר מה, כותבים זאת מייד. מצרפים שני עצמים עם שלושה מאותו סוג – כותבים מייד $2+3=5$. הדבר מייצב את הידע, ונותן תחושה של השלמת המשימה.

לדלות את העקרונות מתוך התלמיד

את תהליך ההוראה יש לתכנן כך שיזמן לתלמיד התנסויות אשר מהן יסיק בעצמו את העקרונות. את מה שבא מתוכו מבין התלמיד הרבה יותר טוב מדברים ש'מונחתים' עליו מלמעלה. אחת הדרכים להשיג זאת היא לבקש מן התלמיד להמציא בעצמו דוגמאות. כך למשל ניתן לבקש: "תן לי דוגמה לסיפור שהתרגיל המתאים לו הוא $2+3$"; "תן לי דוגמה למשוואה שפתרונה הוא 4"; "ספר סיפור המתאים למשוואה הזאת". להמצאת בעיות בידי התלמיד עצמו יש ערך רב.

כל תהליך צריך להיעשות בשני הכיוונים

תהליך שבוצע בכיוון אחד ראוי שייעשה גם בכיוון הפוך. כך למשל: אם ספרנו קדימה, צריך לספור גם לאחור. אם ציינו מי הגדול בין שני מספרים – כדאי לציין מייד גם מיהו הקטן ביניהם. לשאלה: כמה הם $3+5$? כדאי לצרף מייד – כמה הם $8-3$? אם למדנו איך עוברים מסיפור חשבוני לביטוי חשבוני, כדאי ללמד גם את הכיוון ההפוך – מעבר מתרגיל לסיפור חשבוני. לאחר שלמדנו על דרך לפתרון משוואות, כדאי להציג כאתגר המצאה של משוואות.

מדוע עיקרון זה כה חשוב? שתי סיבות לכך: האחת, היפוך הוא אחד הכלים הבסיסיים בו משתמשים מתמטיקאים גם במתמטיקה גבוהה. דוגמה מוכרת לכך היא אחת השיטות לפתרון משוואות (לדוגמה זו נחזור בהמשך). סיבה שנייה היא שביצועו של תהליך קדימה, בכיוון המוכר, הוא לעתים קרובות אוטומאטי ומכאני. היפוכו מביא את כל שלביו למודעות וכך תורם להעמקת ההבנה. כך למשל: ספירה קדימה נעשית בשלב מסוים ללא כל תשומת לב; מי שסופר לאחור צריך לחשוב – "מה בא לפני 10"?

דוגמאות קיצוניות

זהו עקרון הוראה, ואפילו עקרון חשיבה כללי: הדוגמאות מאירות העיניים ביותר הן דוגמאות קיצוניות. לאחר דיון בכמה דוגמאות שגרתיות ראוי לשאול את התלמידים: האם תוכלו לתת לי דוגמה פשוטה יותר? ועוד יותר? מהי הדוגמה הפשוטה ביותר שתוכלו לחשוב עליה?

נדגים עקרון זה: במשולש שווה שוקיים התיכון לבסיס הוא גם חוצה זווית הראש. תכונה זו יכולה להצביע על דרך אפשרית לחלק זווית לשלושה חלקים שווים: בנו משולש שווה שוקיים שהזווית הנתונה נמצאת בראשו; חלקו את הבסיס לשלושה חלקים שווים (חלוקת קטע

נתון לשלושה חלקים שווים היא בעיית בנייה קלה); עתה חברו את קדקוד המשולש לנקודות החלוקה.

איך בודקים אם התהליך המוצע נכון? כדאי תמיד לבדוק דוגמאות קיצוניות. אם לוקחים זווית קטנה מאוד, זה נראה נכון. אבל אם לוקחים זווית גדולה מאוד, קרובה ל-180 מעלות, רואים שהזווית האמצעית הרבה יותר גדולה מהזוויות הצדדיות.

דוגמאות מהוראה של נושאים הנלמדים בדרך כלל בבית-הספר העל-יסודי

בחלק זה של המאמר אביא דוגמאות אחדות לשיעורים שנתתי בחטיבות ביניים ולתלמידים פרטיים הלומדים בכיתות אלה, וכן שיעור אחד מכיתה ב באותם נושאים. כל סעיף יעסוק בנושא אחר מן המתמטיקה של חטיבת הביניים או התיכון. כותרת המשנה של כל סעיף מפרטת את עקרונות ההוראה המודגמים בו, מתוך הרשימה שנסקרה לעיל.

תבניות מספר

ניסוחים מפורשים, הבאה למודעות ודוגמאות מומצאות בידי התלמידים

בשיעור בכיתה ז שאלתי את הילדים מה זו 'תבנית מספר'. הילדים גמגמו. אמרתי להם שתבנית מספר היא כמו מכונה, שקולטת ופולטת מספרים. על כל מספר שמכניסים לתוכה היא מוציאה מספר משלה, על פי כלל קבוע. 'עכשיו אני מכונה כזו', הכרזתי. 'תנו לי מספר'. הם נתנו לי (נאמר 3), ואני החזרתי 7. רשמנו זאת על הלוח. (כזכור, 'התנסות מלווה מייד בכתיבה', הוא אחד הכללים שטבענו. אבל במקרה זה יש עוד סיבה – בהמשך נצטרך לזכור שעל 3 ענתה המכונה ב-7). על 10 השבתי ב- 21. גם זאת כתבנו על הלוח. עודדתי אותם לתת חזקות של 10 – 100, 1000 וכו'. על 100 החזרתי 201, על 1000 החזרתי 2001 – מכאן כבר קל לנחש. המכונה שלי כופלת ב-2, ומוסיפה 1. (רעיון השימוש בחזקות של 10 כדוגמאות, הוא כלל מועיל לבחירת דוגמאות בדרך כלל).

עכשיו חזרתי אל המקרה שבו הקלט הוא 100: איזה תרגיל חישבה המכונה שלי? באיזה סדר עשתה זאת? האם נחוצים סוגריים בביטוי? לא, כי כפל קודם לחיבור ולחיסור, והמכונה באמת ביצעה קודם את פעולת הכפל. עתה ערכתי דיון: אפשר לכתוב במלים מה המכונה עושה, ואפשר לספר על ידי דוגמאות. איך לכתוב זאת באופן כללי? על מספר נתון המכונה מחזירה "שתים כפול מספר ועוד אחד" ("1+ מספר $\times 2$"), אבל איך נדע שהכוונה לאותו מספר?
בדיון קצר הובלתי אותם לפיתרון – כאשר מדברים על אדם פעמיים ורוצים להבהיר שהכוונה לאותו אדם, מה עושים? נכון, קוראים לו בשם. אלא שבמתמטיקה מנסים לקצר. לא קוראים למספרים בשמות ארוכים, אלא באותיות. ואותיות לטיניות, כי זוהי שפה בינלאומית. לכן אומרים: "למספר a מתאימה המכונה את המספר $2a+1$".
דיברנו גם על דרך הכתיבה: מדוע לא כותבים סימן כפל בין ה-2 וה-a? נכון, זה היה מבלבל, כי סימן הכפל דומה ל-x ועלולים להתבלבל בין '2 כפול a' לבין '$2xa$'. סיפרתי על לייבניץ שקבע את הכלל, שלא צריך לכתוב את סימן הכפל. סיפרתי להם שלמעשה יש סיבה עמוקה יותר לכך שמותר לכתוב כפל בלי שום סימן. אם כותבים 2 ולידו ציור של תפוח מבינים שהכוונה היא לשתי פעמים תפוח כלומר 2 תפוחים. בהקבלה לכך, אם כותבים 2 ולידו x יודעים שיש כאן 2 פעמים x. כפל במספר שלם דומה מאוד למנייה.

כל זה לא לקח זמן רב – כרבע שעה. "עכשיו אני מכונה אחרת", הכרזתי. הם נתנו לי 3, ואני השבתי ב-8. הם נתנו 10, השבתי ב-22. על 100 השבתי ב-202. הם ידעו מייד – המכונה כופלת ב-2, ומוסיפה 2. כתבנו את הכלל – x- ל המכונה משיבה ב- $2x+2$. כתבנו את הביטוי המתאים, $2x+2$ עתה אמרתי להם: יש מכונה אחרת, שעושה דבר אחר. היא מוסיפה 1 למספר שקיבלה, ואחר כך כופלת ב-2. למשל, ל-10 מוסיפים 1, מקבלים 11, ואז כופלים ב-2 – מקבלים 22. כתבנו את הביטוי האלגברי: $2(x+1)$ וערכנו דיון במשמעות של הסוגריים. בדקנו, וראינו שהמכונה הזאת משיבה בדיוק באותה דרך כמו הקודמת. דנו בשקילות של שני הביטויים. גילינו שיש שני ביטויים שנראים שונים, ולמעשה הם מפיקים אותו ערך לכל ערך של x.
עתה הגיעה העת להתנסות משותפת. ביקשתי מתנדבים שיהיו מכונות. בילינו שעה של הנאה בהמצאת מכונות, שקיבלו קלט והוציאו פלט. התלמידים עסקו בניחוש הכללים על-פיהם פעלו המכונות, וכתבנו את הביטויים האלגבריים המתאימים להן. בשלב כלשהו בשיעור הזכרתי אפילו את השם 'פונקציה'. אמרתי להם שפונקציה היא התאמה כלשהי, לאו דווקא בין מספרים. למשל, ביקשתי מהם לתת לי שם של ארץ. על 'אנגליה' השבתי ב'לונדון'. על 'צרפת' השבתי ב'פריז',

וכו' – הם גילו כמובן ללא קושי מה הפונקציה הזאת עושה – מתאימה לכל ארץ את עיר הבירה שלה.
כשיעורי בית ביקשתי מן התלמידים להמציא פונקציות מספריות (תבניות מספר), לחשב את ערכיהן על המספרים מ-1 עד 10 הנתונים להם כקלט, ובשיעור שלאחר מכן ניסינו לנחש את הפונקציות שבחרו. אחרי שבנינו תבניות מספר אחדות כאלה, ביקשתי מהם להמציא תבנית מספר פשוטה ככל האפשר. תלמיד אחד נתן על הקלט 1 את הפלט 1, על הקלט 2 את הפלט 2, וכו' – זוהי פונקצית הזהות. שאלתי אותם אם יש תבנית פשוטה עוד יותר. תלמידה אחת נתנה כדוגמה את הפונקציה שהיא זהותית 0.
התלמידים יצאו מן השיעורים האלה מרוצים מאוד, ואנחנו הרחקנו לכת למדי. למשל, דיברנו על פונקציות; התלמידים הצליחו לנסח במלים מהי פונקציה ומהי תבנית מספר, ואת ההבדל בין השתיים (פונקציה אינה דווקא מספרית). אבל למעשה לא עשיתי כל דבר מיוחד. מורה טובה בבית-ספר יסודי עושה עם החומר שהיא מלמדת דברים מקבילים למדי.

משוואות

מתוך הילד, משמעות, היפוך, גם בפשוט ביותר צריך להתנסות, דוגמאות קיצוניות

כאן מדובר בשיעור אינדיבידואלי שנתתי. הילד שאיתו עבדתי הכיר את המושג 'משוואה', אבל לא למד עדיין דרכים שיטתיות לפתור משוואות. ביקשתי ממנו שימציא לי את המשוואה הפשוטה ביותר שהוא יכול. אחרי ניסיונות ומעט הכוונה מצידי הוא הגיע למשוואה $x=0$. עכשיו תן לי את המשוואה הבאה בתור מבחינת הסיבוך, ביקשתי – משוואה יותר מסובכת, אבל רק קצת. הוא נתן את הדוגמה $x=1$. אמרתי לו שהיא אינה יותר מסובכת מבחינת החשיבה. הוא הציע $x+1=2$ יפה, אמרתי. עתה ספר לי סיפור שבו מופיעה המשוואה הזאת. הוא אמר – לחתולה היו גורים, נולד לה עוד גור אחד ואז היו לה שניים. כמה גורים היו לה בתחילה?
עתה שאלתי אותו איך פותרים את המשוואה. כמובן, הוא ידע את פתרון המשוואה, אבל ביקשתי ממנו דרך לפתור. כדי לעזור לו ביקשתי ממנו שיספר לי סיפור אחר עם אותה משוואה, סיפור על מדרגות, על מישהו שעלה במדרגות. הוא אמר: איש עמד במדרגה מסוימת, טיפס מדרגה אחת, והגיע למדרגה מספר 2. באיזו מדרגה עמד בהתחלה? כאן הוא ידע להסביר דרך לפתור את המשוואה – אם האיש עלה מדרגה אחת, כדי לחזור לנקודת המוצא שלו הוא צריך לרדת מדרגה אחת (זהו ההיפוך שעליו דיברנו). ואם הוא יוצא ממדרגה 2 ויורד מדרגה אחת, הוא מגיע למדרגה 1. במקרה של החתולים, כדי לדעת כמה היו לחתולה בתחילה, צריך לקחת ממנה את הגור שנוסף, וכשלוקחים מ-2 אחד נשאר 1, שהוא הפתרון.
בשלב זה ביקשתי משוואה קצת יותר מסובכת. הוא נתן לי את המשוואה $x+7=13$ וחזרנו על אותם שלבים. ביקשתי ממנו סיפור (אחר), דיברנו על איך חוזרים ל-x: אם אחרי הוספת 7 ל-x קיבלנו 13, כדי לחזור ל-x צריך לחסר 7, ולכן $x=13-7=6$.
עתה ביקשתי משוואה עם פעולת חיסור, והוא הציע: $x-8=10$ שוב, ביקשתי סיפור, וחזרנו על 'איך חוזרים לאחור'.
"אני רוצה משוואה מסובכת עוד יותר", אמרתי. וכך הגענו למשוואה מן הסוג: $2x+3=11$. ביקשתי סיפור, וקיבלתי משהו כמו: ליוסי היו שקלים אחדים, אביו הוסיף לו אותו סכום כפי שהיה לו, ואמו הוסיפה לו 3 שקלים. לבסוף היו לו 11 שקלים – כמה שקלים היו לו בתחילה? מה עושים כדי לחזור? דיברנו על כך שחזרה עושים בסדר הפוך: אם תחילה כפלנו ב-2 ואחר כך הוספנו 3, כדי לחזור צריך תחילה לחסר 3 ואחר כך לחלק ב-2.
כאן, פחות או יותר, נגמר השיעור הפרטי שנתתי. אבל, כמובן, אפשר להמשיך עוד ועוד. לו הייתי ממשיך, הייתי מדבר על המשוואה $2(x+3)=11$ שבה תחילה מוסיפים 3 ואחר כך כופלים ב-2, ומשווה אותה עם המשוואה הקודמת.

שיעור על משוואות בכיתה ב

היפוך של תהליכים, התנסות מוחשית

מקובל לחשוב שהוראה פרטית קלה יותר, הילד זוכה בה לתשומת לב רבה יותר ולאפשרות תגובה אישית משלו בכל שלב. זה אמנם נכון, אבל העבודה הפרטנית מאבדת את אחד הכלים החשובים ביותר של ההוראה – הדיון עם אחרים. בדרך כלל, בניהול דיון בכיתה אפשר לבחון כיווני מחשבה רבים יותר מאלה שאפשר לבחון עם תלמיד אחד. את נושא המשוואות לימדתי בכיתה ב של בית-הספר היסודי, ושם, אני סבור, הבינו זאת התלמידים היטב בזכות התנסות משותפת שערכנו. ביקשתי מילד לצעוד 3 צעדים קדימה. אחר כך ביקשתי ממנו לחזור לנקודת המוצא שלו, בעיניים עצומות. הוא ידע: עליו להסתובב, ולחזור 3 צעדים. זוהי, כמובן,

פעולה הפוכה לפעולה שעשה קודם. ׳בשביל לחזור צריך ללכת בכיוון ההפוך׳, שיננו כולנו. עשינו זאת עם ארבעה צעדים ימינה, ועם שני צעדים לאחור – ובכל פעם שאלנו איך אפשר לחזור לנקודת המוצא. בשלב הבא העמדתי ילד בקדמת הכיתה, ביקשתי ממנו לעצום עיניים, וכך לצעוד שלושה צעדים קדימה ושנים ימינה. עתה, שאלתי, איך תחזור לנקודת המוצא? וכך, לאחר דיון בשאלה, למדנו שכדי לחזור צריך לא רק לעשות ההפך; למדנו שגם את סדר השלבים צריך להפוך – תחילה יש להפוך את הצעד האחרון, אחר-כך את הצעד שלפניו, וכו׳. הצורך בהיפוך הסדר בולט מאוד אם יש מכשולים בדרכו של הצועד: אם, למשל, הלכת שלושה צעדים קדימה ושנים ימינה, ייתכן שלא תוכל לחזור תחילה שני צעדים שמאלה ואחר-כך שלושה צעדים לאחור, כי אולי אם תלך תחילה שלושה צעדים לאחור תיתקל בשולחן!

שיעור על אלגברה

ניסוחים מפורשים, לדלות את העקרונות מתוך הילד

באחת הכיתות התחלתי שיעור בכך שכתבתי את סדרת זוגות השוויונים הבאה:

$3\times 3=9$	$2\times 4=8,$
$4\times 4=16$	$3\times 5=15,$
$5\times 5=25$	$4\times 6=24,$

שאלתי את הילדים מהו ההמשך של סדרת השוויונים הזאת. חוק חשוב הוא – בכיתה בת 40 ילד כמעט תמיד יהיה מישהו שיידע את התשובה – זוהי אחת מעוצמותיה של ההוראה בכיתה שלמה, בניגוד להוראה פרטנית.

הילדים ידעו – זוג השוויונים הבא הוא:

$5\times 7=35$, $6\times 6=36$

ומהי החוקיות? התוצאה בשוויון השמאלי קטנה ב-1 מהתוצאה בשוויון הימני. נכון, אבל תיאור זה אינו שלם. כך לא ניתן להסביר את החוקיות המתמטית. אם תנסו להסביר את החוקיות כך לחברכם, הוא לא יוכל לבנות זוג שוויונים כנדרש. בעזרת שאלות מכוונות, בצעדים קטנים, הגיעו התלמידים לניסוח: ״מספר פחות 1, כפול אותו מספר ועוד 1, שווה למספר בריבוע, פחות 1״. נכון, אמרתי, אבל ראו כמה הניסוח הזה מסורבל. האם חברכם יבין אותו בניסוח הזה? ואיך יידע שמדובר באותו מספר בכל המקרים שמתייחסים אליו? ובכן, איך מוסרים בחיי היומיום שמדובר ב׳אותו אדם׳ בשתי הזדמנויות שפוגשים בו? נכון, קוראים לו בשם. אם כן, כדאי לנו גם כאן לקרוא למספר בשם, נאמר ׳יוסי׳. החוק הוא עתה: יוסי פחות 1, כפול יוסי ועוד 1 שווה יוסי כפול יוסי פחות 1. ומיהו ׳יוסי׳ כאן? נכון, כל מספר. אבל חייבים להודות – גם הכתיבה הזאת מסורבלת. אם כן, בואו נקרא למספר בשם קצר יותר – אות אחת. ומוטב, אות לועזית, משום שכך נוכל לשלב את הסימון החדש בקלות בנוסחאות, שאותן אנו כותבים כרגיל משמאל לימין. נוכל, למשל, לכתוב:

$$(a-1)\times(a+1)=a^2-1$$

לשם מה נחוצים הסוגריים? נכון, כדי לומר שאנחנו מחשבים תחילה את $a-1$ ואת $a+1$, ורק אחר כך כופלים אותם. כמו שקורה בשוויונים שכתבנו (הראיתי להם את ההתאמה לדוגמאות הפרטיות).

מהי המשמעות של השוויון? נכון – זה נכון לכל a. בואו נציב עוד ערך, ונראה אם זה נכון. למשל, הציבו $a=10$. מה תקבלו? באגף שמאל נקבל 9×11, באגף ימין $100-1$; האם באמת יש שוויון בין השניים? כן, שניהם שווים ל-99.

ומה אם נכתוב x במקום a? נקבל: $(x-1)\times(x+1)=x^2-1$ – האם גם זה נכון? ומהי המשמעות? נכון, זו אותה משמעות בדיוק. בנוסחה אלגברית לא משנה איזה שם אנחנו בוחרים למשתנה.

שיעור נוסף על אלגברה

הדרך הארוכה ביותר בין שתי נקודות היא קיצור דרך, גם את המובן מאליו צריך לומר, חזרה אל מקרים פרטיים, ניסוחים מפורשים

בשיעור בכיתה ח תרגלו הילדים את נוסחאות הכפל המקוצר לריבוע של סכום או הפרש – $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

המורה ביקש מהם לפשט את התבנית $(3x+2)^2$. אחד הילדים ניגש ללוח, ופתח את הסוגריים באופן הבא: $3x^2+6x+4$. בכך יש שתי טעויות – המקדם של x^2 צריך להיות 9, והמקדם של x הוא 12.

שאלתי את הילד מהו לדעתו המובן של המשוואה: $(3x+2)^2=3x^2+6x+4$. מיהו x כאן? אחרי דיון הגענו למסקנה – הכוונה היא שהדבר נכון לכל מספר שנציב במקום x, כלומר, משמעותו של השוויון היא שהוא תקף לכל מספר. רבים מן הילדים אינם יודעים זאת, לפחות לא במפורש. גם אם יודעים זאת במעורפל, ראוי לפרש זאת, שוב ושוב. עתה אמרתי לתלמיד – אם כן, הצב ערך של x, ובדוק. איזה ערך? הוא שאל – בחר אתה, אמרתי לו. הוא הציע להציב מספר גדול יחסית (נאמר 7), ואני שאלתי אותו אם אין לו הצעה פשוטה

יותר. כזכור, כדאי תמיד לבדוק מקרים פשוטים או קיצוניים. בדקנו את ההצבה הפשוטה ביותר, 0, וגילינו שאכן יש שוויון. שאלתי אם זה מספיק, ונעניתי שלא. כך למדנו את ההבדל בין 'נכון לערך אחד של x' לבין 'נכון לכל הערכים'. מהי ההצבה הבאה הפשוטה ביותר? 1, כמובן. בדקנו ומצאנו שהפיתוח האלגברי של התלמיד מוטעה. אז חזרנו על עקבותינו ובירנו היכן טעה. ביקשתי מן הילד שיכתוב במפורש איזה מספר הציב כ-a בנוסחה לריבוע של סכום, ואיזה מספר הציב כ-b. כתבנו במפורש $a = 3x, b = 2$ ואז כתבנו במפורש: $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2(3x)\times 2 + 2^2$

כאן הסבתי את תשומת ליבם של התלמידים לכך שאם כותבים כך במפורש את ההצבות, נוטים לטעות פחות, ושבסופו של דבר כתיבה מפורשת חוסכת זמן. לימדתי אותם את הכלל: הדרך הארוכה ביותר בין שתי נקודות היא קיצור דרך. כלל זה ידוע, כמובן, לרוב המורים, אבל כדאי לומר אותו במפורש. השתמשתי בדוגמה הזאת כפתח לדיון בשאלה מהי אלגברה. שאלתי אותם – מה זו אלגברה? הם מלמלו משהו על x-ים. שאלתי אותם מה זה x, והם אמרו שזה נעלם. שאלתי אותם האם גם בביטוי $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ ה-x הוא נעלם. הם אמרו שלא, וחזרו על מה שאמרנו קודם – שם הוא מציין מספר כלשהו. מה המשותף לשני התפקידים האלה? מדוע קוראים ל'כל מספר' בשם x? משום שאנו רוצים לזהות אותו, לתת לו שם. וכך הגענו למסקנה: אלגברה פירושה 'לתת שמות למספרים', 'לקרוא למספר בשם, במקום לדבר עליו ישירות'.

אבל למספרים כבר יש שמות, מדוע נחוץ לקרוא למספרים בשמות אחרים? ובכן, לכך יש כמה מטרות. מקרה אחד שבו הקריאה בשם נחוצה הוא כשאיננו יודעים מהו המספר המדובר. אנו קוראים לו אז בשם, עד שנמצא אותו. כלומר אנו משתמשים בייצוג אלגברי למספרים כדי לפתור משוואות. במקרה זה קוראים למספר המיוצג על-ידי האות הלועזית בשם נעלם. השימוש השני הוא לצורך דיבור על מספר כללי – כמו להגיד 'פלוני אלמוני', או 'כל אדם'. למשל, בנוסחת הכפל המקוצר שבה פתחנו את השיעור. שם היה השימוש בייצוג נחוץ משום *שרצינו לומר משהו על כל המספרים*. כמו, למשל, בחוק שלמדנו בסעיף הקודם – $(x-1)\times(x+1) = x^2 - 1$. במקרה כזה נקרא המספר משתנה. לא הגענו לכך באותו שיעור, אבל למשתנים יש שימוש נוסף: תיאור פונקציות. פונקציה אינה משפט מתמטי, ואינה משוואה. היא אמנם כלל, אבל כלל שאנו בוחרים בצורה שרירותית – לכל מספר אנחנו מתאימים מספר אחר.

המשמעות של האלגברה

הצבה- דגש על המשמעות

המשמעות של המספרים נובעת ממניית עצמים. האותיות המופיעות באלגברה הן שלב הפשטה אחד גבוה יותר: משמעותן נובעת מהצבת מספרים במקומן. לכן צריך, לאורך כל לימודי האלגברה, לחזור ולבקש מן התלמיד: 'הצב מספרים'. אתה תוהה מהו $(x^3)^2$? הצב מספר, וחשב. אינך בטוח אם פיתחת נכון ביטוי אלגברי? בדוק זאת על ידי הצבה. המטרה בכך אינה רק בדיקה, אלא בעיקר חזרה אל המשמעות, כדי להבין את משמעותן של הפעולות ושל המרכיבים שלהן, קרי האותיות והמספרים.

הצעה לשיעורים על משוואות ריבועיות

לדלות את העקרונות מתוך הילד

הנה המלצה, שדנתי בה בקורס שנתתי למורים, אף כי מעולם לא ניסיתי אותה בפועל בכיתות. הרעיון הוא לתת לתלמידים להמציא משוואות ריבועיות בעצמם – משוואות שמקיימות תנאים מסוימים. זהו מהלך שיעורים לכיתה ט, ומכיוון שהוא ארוך מאוד, אסקור כאן רק קטע התחלתי שלו.

בשלב ראשון בקשו מן התלמידים להציע משוואה כלשהי. הם יציעו בוודאי משוואה ליניארית, דוגמת $3x + 2 = 8$. עתה בקשו מהם משוואה שפתרונה הוא 3. יש ילדים שיציעו את המשוואה $x = 3$. כזכור – נחוץ לדון במקרים הפשוטים ביותר! אם לא, כוונו אותם למשוואה הזאת. לאחר מכן, בקשו גם משוואות מסובכות יותר. תנו להם אגף אחד של משוואה, למשל $4x + 5$, ושאלו אותם מה צריך להיות האגף השני כדי שהפתרון יהיה 3. התנסות כזו מלמדת מהי משוואה, יותר מאשר האלגוריתם לפתרונה. כאן בא לידי ביטוי עקרון ה'הליכה לאחור' – במקום לפתור משוואה, לחבר משוואה.

עתה ספרו לתלמידים שמשוואה שבה הנעלם x נכפל בקבוע נקראת 'ליניארית'. ספרו להם את מקור השם – 'קווית'. אם הם למדו על ייצוג גרפי של פונקציות מהצורה $4x + 5$, הסבירו להם מדוע.

שאלו: האם יכולות להיות משוואות שבהן הנעלם x אינו נכפל בקבוע, אלא במשהו יותר מסובך? כוונו אותם לכך ש-x יכול להיכפל ב-x. הם יגיעו למשוואה

ריבועית מן הצורה $x^2 = 3$, ומתוך דיון יגלו שהם לא מכירים פתרון למשוואה הזאת (בכיתה ט עדיין לא דנו איתם במספר $\sqrt{3}$). אין זה הזמן לספר להם שבמספרים הממשיים יש פתרון כזה, אלא צריך לבקש אותם להמציא משוואה שיש לה פתרון. הם יגיעו בוודאי למשוואה מהצורה $x^2 = 4$. דונו איתם בשאלה כמה פתרונות יש למשוואה הזאת, ומצאו את שניהם.

בואו נעצור לרגע, ונשאל את עצמנו מה הושג בדיון עד כה. בעיני, ההישג המשמעותי ביותר היה היפוכו של תהליך. התלמידים למדו לבנות משוואה. כדי להמציא משוואה, על התלמיד להתאמן בהצבת ערכים שונים של x במשוואות. זוהי הדרך הטובה ביותר להבין מהי משוואה. אבל בואו נחזור לשיעור. עתה בקשו מן התלמידים למצוא משוואה ריבועית שאין לה פתרונות. הם יגיעו למשוואה מן הצורה $x^2 = -4$ וכאן צריך לערוך דיון מדוע אין פתרון.

עתה בקשו מן התלמידים למצוא משוואה ריבועית שיש לה *בדיוק פתרון אחד*. הם יגיעו למשוואה $x^2 = 0$.

עתה תנו להם משימה מאתגרת במיוחד. (אגב כך – הנה 'טיפ' שאף הוא שאול מבית-הספר היסודי: כדאי לפעמים להצהיר על משימה שהיא 'קשה במיוחד', אפילו אם אינה כל- כך קשה. לאחר שיפתרו את השאלה, תהיה לתלמידים תחושת סיפוק גדולה.)

והנה השאלה המאתגרת – האם תוכלו לתת לי משוואה ריבועית אחרת, שיש לה בדיוק פתרון אחד? רוב הסיכויים הם שביצוע המשימה ייתקל בקשיים. כוונו אותם: תנו לי משוואה שיש לה בדיוק פתרון אחד, והוא המספר 2. אני משער שיהיה עליכם להמשיך ולכוון: האם תוכלו לכתוב את המשוואה $x = 2$ בצורה: משהו שווה 0? כן $x - 2 = 0$. עתה השתמשו במה שמצאנו קודם: מספר שווה 0 אם ורק אם ריבועו 0! לכן $x = 2$ אם ורק אם $(x-2)^2 = 0$. (אני מודה שהצעה זו לא נוסתה בכיתות, וקרוב לוודאי שבפועל היא תדרוש זמן רב והרבה סבלנות).

עתה נחוץ לשאול: האם תוכלו למצוא משוואה שפתרונותיה 3 ו (-3)? 5 ו- (-5)?

בשלב זה ייתכן שכדאי לקשר את הדברים עם מושג הערך המוחלט. הדבר דורש כמה שיעורים על הערך המוחלט: הילדים צריכים לדעת שערכו המוחלט של מספר הוא (נאמר) 3 אם ורק אם $x^2 = 9$. כמו כן, הם צריכים לדעת שהמרחק בין שני מספרים x ו- y הוא הערך המוחלט של ההפרש בינהם, כלומר $|x-y|$.

ועתה – לשאלה מאתגרת נוספת: האם תוכלו לתת לי משוואה ריבועית שפתרונותיה הם 1 ו-3? האם יש מספר שהמרחקים של 1 ו-3 ממנו שווים זה לזה? כן, כמובן, 2. מרחקם של שניהם ממנו הוא 1. אם כן, גם 1 וגם 3 הם פתרונות למשוואה $|x-2| = 1$. האם תוכלו לכתוב זאת כמשוואה ריבועית? כמובן: $(x-2)^2 = 1$.

זוהי, כאמור, רק ההתחלה. זהו תהליך לא קצר. כל אחד מן השלבים שלעיל דורש תרגול. אבל אחרי כל זאת, ירגיש התלמיד שמשוואות ריבועיות הן 'שלו'.

חזקות ולוגריתמים

הפרד ומשול, להחזיק רק כדור אחד באוויר

חזקות, ובמיוחד לוגריתמים, נחשבים לנושאים מורכבים. הסיבה העיקרית לכך היא שכמו בלהטוט של זריקת כדורים לאוויר (juggling), בו קשה להחזיק יותר מכדור אחד באוויר בכל רגע נתון, כך גם בחשיבה. לוגריתם הוא פונקציה של *שני משתנים*. אנחנו לוקחים לוגריתם על פי *בסיס מסוים* של *מספר אחר*. אם מלמדים זאת כך, צריך הילד להחזיק שני כדורים באוויר בו-זמנית, את שני המשתנים. אבל אפשר להתגבר על כך, אם מקבעים את אחד המשתנים. במקרה של לוגריתמים – את הבסיס.

בעזרת התחבולה הזאת הצלחתי ללמד חזקות ולוגריתמים את בתי בת ה-8. חזקות למדנו בעזרת סדרות – 2 בחזקת 1 הוא 2; 2 בחזקת 2 הוא 4, 2 בחזקת 3 הוא 8, וכו'. לאחר זמן הבינה את העיקרון. כשהגענו ללוגריתמים, ביקשתי ממנה שתבחר מספר: 2 או 10. היא בחרה 2. אמרתי לה: למספר הזה נקרא היום 'בסיס'. תזכרי שהבסיס הוא 2. עכשיו 'אספר' לך כמה לוגריתמים:

הלוגריתם של 2 הוא 1;	הלוגריתם של 4 הוא 2;
הלוגריתם של 8 הוא 3;	הלוגריתם של 16 הוא 4;

האם תוכלי להמשיך את הסדרה? היא המשיכה: הלוגריתם של 32 הוא 5. ניסחנו: כשהמספר גדל פי 2, הלוגריתם שלו גדל ב-1. האם יש קשר לבסיס שבחרנו? כן, בחרנו בסיס 2. אחר כך שאלתי אותה מה הלוגריתם של 2 בחזקת 3. היא חישבה $2^3 = 8$, ואחר כך חישבה את הלוגריתם, כלומר נזכרה בתהליך שעשינו קודם – הלוגריתם של 8 הוא 3. עשינו זאת עוד כמה פעמים, עד שהבינה – הלוגריתם של 2 בחזקת מספר הוא המספר עצמו. כתבנו זאת על נייר. אחר כך עברנו לבסיס של 10, ועשינו שם תהליך דומה. כך הבינה את המשותף לשני התהליכים. האם יישאר משהו בזיכרונה? אינני יודע. אני

משער שלא. אבל לו הייתי מלמד זאת בכיתה, הייתי דורש מן התלמידים תרגול רב, לייצוב הידע.

נספח

רשמים אישיים ממצב החינוך המתמטי בחטיבות-הביניים בארץ

אסיים בכמה רשמים מן המצב בחינוך המתמטי, ובחינוך הכללי, בחטיבות-הביניים בארץ. הם מבוססים על ביקורים בשלושה בתי-ספר בסך-הכל, אבל האחידות של המצב בכולם משכנעת אותי שבבתי-ספר אחרים המצב אינו שונה בהרבה.

המעבר מבית-הספר היסודי לחטיבה הוא זעזוע לכל ילד. פתאום מניחים שהוא מבוגר קטן, כאילו בחופש הגדול שבין כיתה ו ל-ז היה אמור להתבגר בכמה שנים. הוא יושב, כמעט אנונימי, בכיתה של 40 תלמידים (זהו התקן בחטיבות-הביניים כיום. בבתי-הספר היסודיים המצב טוב יותר). דרכי ההוראה משתנות מקצה לקצה. הן הרבה יותר אקדמיות מאשר בבית-הספר היסודי. הכשרתם של המורים מדגישה יותר ידע אקדמי ופחות דידקטיקה. וכיוון שלפחות במתמטיקה הילד אינו בשל עדיין ללימוד אקדמי, הופך הלימוד למכאני לחלוטין. המצב הזה מכוון. אחת המטרות של הקמת חטיבות-הביניים הייתה הקדמת האקדמיזציה של הלימודים מכיתה ט לכיתה ז.

לא ייאמן, אבל כמעט בכל חטיבות-הביניים אין משתמשים כיום בספרי לימוד, אלא בספרי תרגול. בתור ספרי תרגול, אין הספרים הנהוגים בארץ רעים כלל. אבל חסרים בהם הסברים ומוטיבציה. בחלקו, המצב הזה הוא תוצאה של גודל הכיתות: בכיתה של 40 ילדים קשה לקיים דיון והתנסות. בחלקו, המצב נובע מן החסכים שאיתם באים הילדים מבית-הספר היסודי. חלק גדול מילדי ישראל אינם מבינים כיום: מהו שבר, מהו הקשר בין שבר לפעולת חילוק, וחלקם הגדול אינם מבינים אף את המשמעויות של ארבע פעולות החשבון. כדי לבצע את פעולת החישוב הפשוטה ביותר הם נעזרים במחשבון. כאשר המציאו הילדים לבקשתי תבניות מספר, המציא אחד מהם את התבנית $x \times 10 : 100 + 1$. לא היה לו שום חשד שבמקום זאת אפשר לכתוב $x : 10 + 1$. כשביקשתי ממנו להציב את המספר 1 בתבנית, השתמש במחשבון, וקיבל (9-) תוצאה שאותה אמר בלי להניד עפעף: לא הפריע לו כלל שהוא חיבר, כפל וחילק מספרים חיוביים וקיבל תוצאה שלילית. עם יסודות מסוג זה קשה לילד להבין את הרציונל של האלגברה. כך המורה ניצב בפני דילמה: האם לעצור את ההתקדמות בחומר וללמד שנית את היסודות, או שמא להמשיך ולהתייחס רק אל הצד של התרגול הטכני של החומר, אשר נדרש בתכנית הלימודים של חטיבת-הביניים.

סיבה שנייה היא היעדר הרגלי דיון ותרבות דיון. גם סיבה זו נעוצה במטען שהביאו הילדים מבית-הספר היסודי. במשך שני העשורים האחרונים השתנתה צורת ההוראה בבית-הספר היסודי. בשם תיאוריות חינוכיות מתקדמות, נדחקה המורה הצידה. שוב אין היא מרכז הכיתה – התלמיד הוא המרכז. ילדי כיתה א לומדים בלי קשר עין למורה. מתבצע מעט מאד דיון כיתתי. את מקומו מילאה העבודה בקבוצות, שברובה היא פיקציה גמורה. רוב הזמן התלמיד עובד בחוברות, ורק ההפרעה ההדדית היא בקבוצות. התוצאה: הילדים אינם לומדים לשוחח ולהקשיב. הם מתרגלים לעבודה טכנית.

לדעתי, גם בעיות המשמעת, שקובעות כיום במידה כה רבה את אופי הלימוד בחטיבות-הביניים, הן במידה רבה תוצאה של המטען שאיתו באים הילדים מבית-הספר היסודי. שינוי מעמדה של המורה בכיתה, ובחברה בכלל (ואני מאמין שהראשון גרם לשני לא פחות מאשר להפך) גרם לאובדן הכבוד למורה. בשש שנותיהם בבית-הספר היסודי לא למדו הילדים להקשיב למורה ולא איש לרעהו. כל אלה מכתיבים, כאמור, לימוד טכני. את התוצאות אני רואה בהוראה בטכניון. הסטודנטים מחפשים טכניקה, וטכניקה בלבד. כשהם רואים הוכחה הם נתקפים פאניקה. אם יעברו את הבחינה, הידע שרכשו לא יכין אותם לקורס הבא – שם יצטרכו ללמוד טכניקות חדשות, כאילו לא החכימו כלל מן הקורס הקודם.

האם אפשר לשנות את המגמה הזאת? אני מאמין שכן. לפני הכל, דרך שינוי דרכי ההוראה בבית-הספר היסודי. כשילדי בית-הספר היסודי ילמדו את משמעות הפעולות, יחוו במו ידיהם קיבוץ לעשרות כדי להבין את השיטה העשרונית, ויתרגלו לדיון ולשיחה, יהיה אפשר לשוחח איתם גם בחטיבת-הביניים. אם בנוסף לכך תוחזר בחטיבה שעת לימוד שבועית במתמטיקה שקוצצה בשנים האחרונות, ויוכנסו ספרי לימוד במקום ספרי התרגול, נוכל לראות שיפור תוך זמן לא רב.