הנושא: **רעיונות להוראת המבוא לאנליזה בגישה היסטוריה**

הוכן ע"י: מיכאל ריינהרץ.

תקציר: במאמר מוצגת דרך להוראת המבוא לאנליזה, העוקבת אחר ההתפתחות ההיסטורית של פיתוח שיטות למציאת שיפוע של גרף של פונקציה בנקודה שעליו. הדרך המוצעת מערבת דרכים שלא השתרשו בהוראה, ביחד עם פן אנושי המאפשר לתלמיד להכיר מתמטיקאים שפיתחו את התחום ולהבין את דרכיהם.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, היסטוריה של המתמטיקה, אפולוניוס, פרמה, דקארט, ניוטון, גליליאו, קפלר, לייבניץ, אנליזה – חשבון דיפרנציאלי, עקום, שיפוע של גרף, נורמל, גבול, נגזרת, משיק, הוראת מתמטיקה, תפיסות מוטעות, תורות למידה, חלוקה הרמונית, אלגברה, פונקציה, גיאומטריה אנליטית, הנדסה אנליטית, מעגל, משוואת מעגל, משפט פיתגורס, משפחה של מעגלים, פרבולה, הנדסה, גיאומטריה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מדידות, שטח, משולש, מעגל, הוכחות, קלקולס, סדרות, התכנסות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 30-36

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

רעיונות להוראת המבוא לאנליזה בגישה היסטורית

מיכאל ריינהרץ
ביה״ס הריאלי העברי, חיפה
reinherz@hotmail.com

רציונאל

התחקות אחר התהליך ההיסטורי של העשייה המתמטית מאירה את הפן האנושי שבמתמטיקה ויכולה לקרב תלמידים אליה. ניתוח הטעויות שנעשו במהלך ההיסטוריה מאפשר לעיתים להאיר כשלים של תלמידים בהבנה של מושגים בעת רכישתם. במאמר מוצגת דרך להוראת המבוא לאנליזה, העוקבת אחר ההתפתחות ההיסטורית של פיתוח שיטות למציאת שיפוע של גרף של פונקציה בנקודה שעליו. הדרך המוצעת מערבת דרכים שלא השתרשו בהוראה, ביחד עם פן אנושי המאפשר לתלמיד להכיר מתמטיקאים שפיתחו את התחום ולהבין את דרכיהם.

פילוסופיה של החינוך - בקצרה

רעיונותיהם של שלושה הוגי דעות בהוראת המדעים סייעו לי להבין את החשיבות בפיתוח דרך הוראה שכזו:

הראשון הוא **אוזובל** – ששמו מקושר ללמידה משמעותית. בתהליך למידה כזה אנו רוכשים גופים גדולים של ידע מילולי בעזרת ׳מבנה קוגניטיבי׳ היארכי הטבוע במוחנו. כדי לרכוש גוף ידע חדש עלינו לקשרו אל הידע הקודם – יש צורך הן בהבנת הדמיון בין הידע החדש לבין הידע הקודם והן בראיית ההבדלים ביניהם. הגורם החשוב ביותר המשפיע על יכולת הלמידה של גוף ידע חדש הוא קיומו של מבנה ברור ויציב של הידע הקודם. למידה משמעותית תתרחש רק אם הידע הקודם הוא בר קישור. אם אין לתלמיד יכולות קישור צריך לספק לו מארגן מקדים (advanced organizer), זהו פריט מידע חדש המאפשר קישור בין החומר החדש לחומר הישן בצורה בהירה.

השני הוא **ויגוטצקי**, השייך לזרם הקונסטרוקטיביסטי בהוראת המדעים. לדבריו, הלמידה היא תהליך חברתי: התלמיד קולט מן הסביבה. כל עוד לא נקלט מידע בלתי מוכר לא מתרחשת למידה. כאשר מזהה הלומד מצב חדש הוא נאלץ להרכיב לעצמו במוחו מבני ידע חדשים (סכמות) שיתאימו גם למידע האחרון שנקלט. המורה הוא מתווך בין החברה והילד ולכן עליו להפגיש את התלמיד עם מצבים שיאפשרו בנייה של סכמות מסוימות. כדי שתלמיד יוכל להבין מושג מדעי צריך שיהיו לו כמה סכמות שנרכשו מלמידה קודמת ועל ידי הפנמתן תתאפשר למידה טובה יותר.

השלישית היא **דרייבר**, השייכת לזרם הסוציאל-קונסטרוקטיביסטי בהוראת המדעים. לדבריה, הלמידה היא תהליך התפתחות של תפישות מדעיות אישיות לתפישות מדעיות מקובלות. ההתפתחות היא הוספה לחומר הקיים. הילדים באים לכיתה עם תפישות מוקדמות הנובעות מההתנסות האישית שלהם. תפישות אלה שונות מהתפישות המדעיות המקובלות, הן משפיעות על הלמידה, והן עמידות בפני שינוי. התפישות שלהם מאד הגיוניות ומאד משכנעות ומתאימות לניסיון האישי שלהם. ניתן לזהותן בהיסטוריה של המדע. הלמידה היא המעבר מהמודל האישי למצב של ידיעה והבנה של מהות המדע המקובל. זהו עניין אפיסטמולוגי לחלוטין.

סקירה היסטורית של התפתחות המושג נגזרת

להלן מובאת סקירה היסטורית של התפתחות המושג נגזרת במהלך המאה ה-17. סקירה זו, מאפשרת להבין תהליכי חשיבה של המתמטיקאים השונים שתרמו להבהרת המושג ואת החשיבות של קיום דיאלוג בין מתמטיקאים, הדומה לדיאלוג בין אנשי מדע אחרים. כדאי לעקוב אחר התפתחות החשיבה של

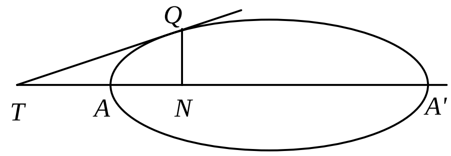
המתמטיקאים במהלך ההיסטוריה ולהבחין כיצד חלה התנתקות הדרגתית מהמושג המוכר 'משיק למעגל' בתהליך הבניה של המושג 'שיפוע של גרף של פונקציה בנקודה שעליה'. אבחנה מעניינת זו מאירה קשיים שיש לתלמידים בהבנת המושג בתחילת תהליך הלמידה שלו. ניתן לשלב בהוראה לפחות חלק מהשיטות המוזכרות.

משיק לעקום על-פי הגיאומטריה האוקלידית

עד למאה ה-17 שלטה הגיאומטריה היוונית בכל תיאור הקשור למשיק ל'גרף' או לעקום. כבר בתקופתו של אפולוניוס (262-190 לפנה"ס) ידעו איך לשרטט משיק לעקום באופן מכני;

לדוגמא, שרטוט של משיק לחרוט, או ליתר דיוק לחתך שלו על-ידי מישור, נעשה בעזרת חלוקה הרמונית של קטע.

במקרה של אליפסה:



מסמנים נקודה Q על העקום, מורידים ממנה אנך לציר האליפסה AA' ומוצאים את הנקודה T על ישר זה המקיימת:

$$\frac{AT}{TA'}=\frac{AN}{NA'}$$

כלומר אפולוניוס קובע את הנקודה T שמחלקת את הקטע AA' מבחוץ כמו ש- N מחלקת את הקטע AA' מבפנים. אנו רואים, שההתייחסות למשיק היא כאל ישר מסוים (שמשיק לעקום) ואי-אפשר ליחס לו תכונות נוספות. אין חידוד של חשיבות המשיק, אלא רק הסתכלות מיוחדת על-פיה למשיק יש קשר חיצוני לעקום (רייינהרץ,1999).

המשיק אצל פייר דה פרמה (1601-1665)

לפרמה הייתה ידועה העובדה שבנקודות הקיצון של עקום למשיק יש שיפוע '0'.

הדרך לפיה הגיע פרמה למסקנה זו נשענת על שיטה שנקראת 'סינקריזם' ששוכללה על-ידו באופן הבא:

נסתכל לדוגמה במשוואה: $bx^2-x^3=c$, $b\neq 0$.

לכל c הקטן בערכו מן הערך המקסימאלי וגדול מהערך המינימאלי של הפונקציה: $f(x)=bx^2-x^3$, יהיו למשוואה לפחות שני שורשים. נסמנם: x ו-y.

על פי שיטה זו מתקיים: $bx^2-x^3=c$;

וגם: $by^2-y^3=c$;

מכאן נובע: $b(x^2-y^2)=x^3-y^3$.

נפרק את x^3-y^3 לגורמים, ונקבל:

$b(x+y)=(x^2+xy+y^2)$ כאשר $x\neq y$.

אבל בנקודת המקסימום $x=y$.

לכן אם ידוע כי: $bx+by=x^3+xy+y^2$,

אז כאשר $x=y$ מקבלים: $2bx=3x^2$.

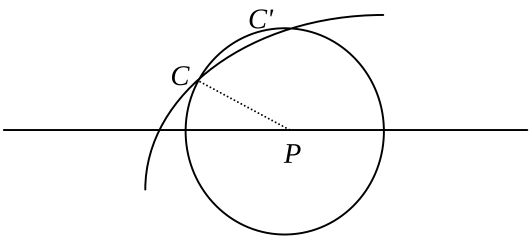
זוהי כידוע משוואה שקולה להשוואת הנגזרת של $f(x)$ לאפס באמצעים מודרניים (Mahoney,1994).

יש בעייתיות רבה בשיטה אלגברית שכזו, כיוון שאנו מבצעים משחק כפול במשתנים. מצד אחד השורשים x ו-y הם שונים ולכן מותר לחלק בגורם: $(x-y)$, מצד שני מספר שלבים לאחר מכן פרמה משווה ביניהם לצורך סיכום התרגיל. אין כאן מצב של התקרבות לאפס, של אחד המשתנים אלא התקרבות לאפס של ההפרשים. כמו כן, אין בפיתוח הנ"ל התייחסות לגדלים אינפיניטסימאלים, למרות שאפשר לראותם 'מתחת לפני השטח' בעצם השאיפה של x ל-y. אולם יותר מכך, שיטה זו אינה לגיטימית מבחינה מתמטית לצורך מציאת נקודות קיצון, כי אם מהווה אינדיקאטור בלבד לקיומן של נקודות כאלה.

אני ממליץ לתרגל עם התלמידים את שיטת הסינסקריזם ביחס לביטויים: $x^2=9$, $2x^2-x=5$, $3x^3-2x^2=7$. חשוב לדעתי לציין, שמושג הפונקציה לא היה ידוע כלל באותה תקופה למרות שמתמטיקאים כבר עסקו בחקר של עקומים.

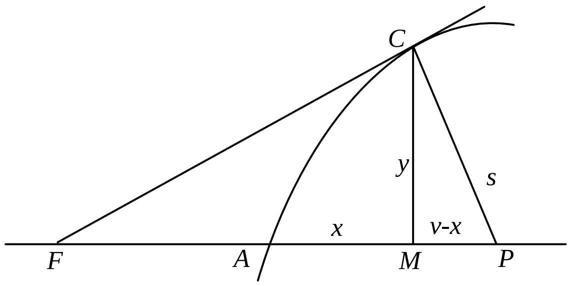
המשיק אצל רנה דיקארט 1596-1650

השיטה של דקארט למציאת משיק לעקום מתבססת על מעגלים. לפי שיטתו צריך למצוא את המעגל 'המוצלח' ביותר שמרכזו על גבי ישר כלשהו, כך שאם נעביר מעגל דרך שתי נקודות שעל העקום: C ו-C', קרובות ככל שניתן אזי הישר שיחבר ביניהן הוא המשיק המבוקש.



כלומר, המטרה היא מציאת משוואה של מעגל שמחבר בין שתי נקודות כאלה ומרכזו על הישר.

בפישוט רעיונו של דיקארט לסימונים מודרניים וברורים יותר נקבל:



יהא CA עקום ביחס לציר x. נסמן את AM באות x, ונניח כי העקום מתוארת על ידי המשוואה האלגברית:

$F(x,y)=0$

נקבע $A(0,0)$ ו- $P(v,0)$ נקודת החיתוך של הנורמל לעקום ב-C עם ציר ה-x. נסמן ו- $CM=y$. על-פי משפט פיתגורס ב- ΔMPC נקבל: $s^2=y^2+(v-x)^2$.

זוהי משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $(v,0)$, וממנה ניתן לבודד או את y: $y=\sqrt{(s^2-(v-x)^2}$, או את x: $x=v-\sqrt{(s^2-y^2)}$.

על-ידי בחירת המשוואה הנוחה לנו, ניתן לבטל את אחד הנעלמים במשוואה $F(x,y)=0$ המתארת את העקום. על-ידי כך תיווצר אחת משתי המשוואות החדשות: $G(x,s,v)=0$, אם בחרנו את הביטוי עבור ה-y, או $H(y,s,v)=0$, אם בחרנו את הביטוי עבור ה-x. בכל מקרה נקבל, כי עבור ערך קבוע של v: הערכים השונים של s יוצרים משפחה של מעגלים – סביב P. אם CP הוא אכן הנורמל המבוקש, הערכים המתאימים של v ו-s יקבעו מעגל שיהיה משיק לעקום בנקודה C. לערכים אחרים ייווצרו מעגלים אחרים שלא ישיקו בנקודה אחת, אלא יפגעו בעקום בשתי נקודות או שכלל לא יפגעו בה (Mahoney,1994).

אם נרצה נוכל לבדוק את נכונות שיטתו של דיקארט ביחס למקרים הבאים:

א. נסתכל בפרבולה המתוארת על-ידי המשוואה: $y=x^2$ ובנקודה (x_0,x_0^2) שעליה. הנקודה על ציר ה-x היא $(v,0)$.

נציב את הנתונים כפי שמתואר לעיל ונקבל:

$s^2=(x^2)^2+(v-x)^2$

נפתח סוגריים ונקבל: $0=x^4+v^2-2vx+x^2-s^2$.

זוהי משוואה ממעלה רביעית ולכן צריך להשוותה למשוואה מהצורה: $(x-x_0)^2q(x)$, בה $q(x)$ הוא פולינום ממעלה שנייה, אותו ניתן לגלות על-ידי השוואת מקדמים.

כלומר נדרוש:

$x^4+x^2-2vx+v^2-s^2=(x-x_0)^2(x^2+ax+b)$

נפתח סוגריים ונכנס איברים בקבוצות באגף ימין ונקבל:

$x^4+x^2-2vx+v^2-s^2=x^4+$
$+(a-2x_0)x^3+(b-2x_0a+x_0^2)x^2+(ax_0^2-2bx_0)x+bx_0^2$

על ידי השוואת מקדמים נגיע למסקנות הבאות:

1) אין ביטוי עם x^3 באגף שמאל לכן: $a-2x_0=0$

2) לביטוי עם x^2 שבאגף שמאל יש מקדם '1' לכן:
$b-2x_0a+x_0^2=1$

3) לביטוי עם ה-x: $ax_0^2-2bx_0=-2v$

4) ולבסוף לגבי האיבר החופשי: $bx_0^2=v^2-s^2$

עבור שלוש המשוואות הראשונות, אם: $a=2x_0$, אז: $b=2ax_0-x_0^2+1$.

נציבן במשוואה השלישית ונקבל:

$2x_0^3-2x_0(2ax_0-x_0^2+1)=-2v$

כיוון שהביטוי שבתוך הסוגריים שווה בערכו ל-b, וידוע ש: $a=2x_0$ נבצע את ההצבה ונקבל:

$b=1+2x_0\cdot 2x_0-x_0^2\rightarrow$

$b=1+4x_0^2-x_0^2\rightarrow$

$b=1+3x_0^2$

עם הנתון החדש הזה נחזור להצבתנו במשוואה השלישית:

$2x_0\times x_0^2-2x_0(1+3x_0^2)=-2v$

$2x_0^3-2x_0-6x_0^3=-2v$

$-4x_0^3-2x_0=-2v$

נחלק ב-(-2): $2x_0^3+x_0=v$

זהו מיקומה של הנקודה v על ציר ה-x. כאשר x_0 ידוע, ניתן בקלות לאתר את מיקום הנקודה $y=x^2$ שמסביבה ייבנה המעגל שיפגע בגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד. את הנקודה הזו ניתן יהיה לחבר עם הנקודה P ששיעוריה הם $(v,0)$ וליצור את הנורמל לעקום. אז באופן מיידי ניצור גם את המשיק למעגל, שהוא גם המשיק לעקום בנקודה x_0. הערך של שיפועו הוא הופכי ונגדי לשיפוע של הנורמל!

יש לציין שדיקארט כלל לא היה מודע לעובדה זו. אותו עניינה מציאת הנורמל בלבד. הרגישות לעניין המשיק

הייתה משנית למרות שריחפה באוויר כל העת (Mahoney,1994).

על-פי נוסחת השיפוע בין שתי נקודות במישור $\left[\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}\right]$, נחשב את השיפוע בין הנקודה $(v,0)$ לנקודה (x_0,x_0^2) שעל גרף הפרבולה $y=x^2$.

בהצבה שלנו נקבל:

$$\frac{(0-x_0^2)}{(v-x_0)}=\frac{-x_0^2}{(v-x_0)}$$

כיוון שמצאנו קודם ש: $v=2x_0^3+x_0$ נחזור ונציב בנוסחת השיפוע ונקבל:

$$\frac{-x_0^2}{(2x_0^3+x_0-x_0)}=\frac{-x_0^2}{2x_0^3}=\frac{-1}{2x_0}$$

כך, אם שיפוע הנורמל הוא $\frac{-1}{2x_0}$, אזי שיפוע המשיק הוא הופכי ונגדי לערך זה, כלומר, $2x_0$. זהו כידוע שיפוע המשיק לפרבולה זו בנקודה x_0 כלשהי (Mahoney,1994).

לצורך הדגמת השיטה: נסו למצוא את משוואת המעגל המשיק לגרף הפרבולה $y=x^2$ בנקודה בה: $x=2$ על פי התהליך של דיקארט.

ב. נסתכל בגרף המתאים לפונקציה: $y=x^3$, ובנקודה (x_0,x_0^3) שעליה.

במקרה זה נקבל:

$S=(x^3)^2+(v-x)^2=x^6+v^2-2vx+x^2$ על פי השיטה, שהוצגה לעיל, נבצע תהליך השוואה בין הפולינומים:

$$x^6+x^2-2vx+v^2-s^2=$$
$$=(x-x_0)(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)$$

כאשר נפתח סוגריים באגף הימני נוכל לבצע תהליך של השוואת מקדמים, ונקבל כי:

$$a=2x_0,\quad b=3x_0^2,\quad c=4x_0^3,\quad d=1+5x_0^4$$

כך הנקודה v תהיה $(3x_0^5+x_0,0)$,

וערך השיפוע של הקטע המחבר בין v ל- O יהיה $\frac{-1}{3x_0^2}$. הערך ההופכי ונגדי לערך זה הוא $3x_0^2$ שהוא כידוע שיפוע המשיק לגרף של $y=x^3$ בנקודה (x_0,x_0^3) כלשהי שעליה.

ג. ננסה להכליל את שני המקרים הקודמים ונוסיף להם את המקרה בו מחפשים בשיטת הסינקריזם את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=x$. [במקרה זה מתקבלת ללא כל דרך מיוחדת, הנקודה v כ- $(2x_0,0)$].

והרי ההכללה:

כאשר הפונקציה היא: $y=x$, הנקודה v המתקבלת היא: $(x_0+x_0,0)$

כאשר הפונקציה היא: $y=x^2$, הנקודה v המתקבלת היא: $(2x_0^3+x_0,0)$

וכאשר הפונקציה היא: $y=x^3$, הנקודה v המתקבלת היא: $(3x_0^5+x_0,0)$.

באופן כללי, כאשר הפונקציה היא: $y=x^n$, הנקודה v תהיה $(nx_0^{2n-1}+x_0,0)$ והשיפוע של הקטע המחבר בינה לבין הנקודה (x_0,x_0^n) הוא:

$$\frac{0-x_0^n}{nx_0^{2n-1}+x_0-x_0}=\frac{-x_0^n}{nx_0^{2n-1}}=\frac{-1}{nx_0^{n-1}}$$

השיפוע של הישר הניצב לו יהיה: nx_0^{n-1}, וזהו אכן ערך הנגזרת של הפונקציה $y=x^n$ בנקודה (x_0,x_0^n) שעליה, בדיוק כפי שאנו מקבלים בשיטת הגזירה המוכרת לנו.

המשיק אצל איזאק ניוטון (1642-1727)

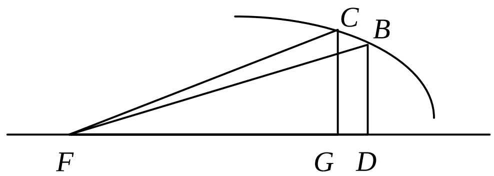
על פי טורנבול אנו יודעים כי פיתוח המשיק אצל ניוטון התרחש בשלבים (Turnbull, 1945).

שלב א – פיתוח הבינום:

ניוטון פיתח את נוסחת הבינום כבר בשנת 1664. הוא מתאר פיתוח זה בפרוט במכתבו לאולדנבורג באוקטובר 1676. אולדנבורג העבירו ללייבניץ: הרעיון המרכזי הוא בהצגת הביטוי הפונקציונאלי על-ידי טורים שמתכנסים, בדרך כלל על ידי טור מתכנס יחיד (Whiteside,1976).

שלב ב – פיתוח הקלקולוס:

ניוטון מגדיר את הנגזרת בשונה מן המקובל היום. מבחינתו, בכל מקרה קיים גורם של זמן מתמיד שמבוטא באמצעות הקו הישר. העקום הוא סטייה מן הזמן המתמיד. מציאת המשיק לעקום מתבססת על העברת ישרים מנקודה כלשהי על גבי הישר וחישוב מנת ההפרשים בין ערכי ה-y לערכי ה-x. בציור מודגם התהליך על העקום של: $y=x^2$.



ניוטון שולח ישרים מנקודה F אשר מחוץ לעקום שפוגעים בה בנקודות B ו-C. מהן הוא מוריד אנכים לציר הקבוע. רק אז הוא בודק מהו היחס בין אורכי הקטעים CG ו-BD כאשר המרחק בין G ל-D הולך וקטן. הוא מציג עמדה לפיה קווים נוצרים על-ידי נקודות בתנועה, שיטה זו מכונה, כנזכר אצל ווייטסייד (Whiteside,1976), בשם:

"THE METHOD OF PRIME AND ULTIMTIVE RATIOS"

הנגזרת, על-פי שיטה זו, היא בעצם היחס הראשוני של התוספות המתהוות. לפי ניוטון:

> "אני מחשיב כמויות מתמטיות לא כמורכבות מחלקים קטנים, אלא על-ידי תנועה נמשכת של נקודות, כך נוצרים ישרים – זה קורה כאשר הדברים מתהווים ונראים יום-יום בתנועת הגופים, לכן אם נתחשב בכמויות אלה בעת גדילתן או הקטנתן בהתאם למהירות הווקטורים בזמן נתון, אני חשבתי על שיטה לקביעת כמויות אלה מהמהירויות של התנועות (או התוספות) מהיכן שהן נוצרות, ולקרוא למהירויות אלה של התנועות: FLUXIONS – –שטפים, והכמויות שנוצרות – FLUENTS, אני גיליתי שיטה זו בשנים 1665-1666" (Turnbull, 1945', תרגום: מ.ר.).

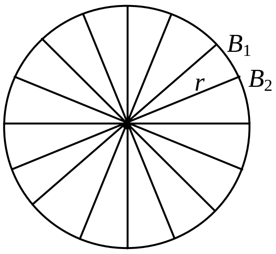
ניוטון מדבר כאן על ה-FLUXIONS כנגזרות ביחס לזמן של ה-FLUENTS שאלו הם המשתנים. שטפים אלה הם התוספות שנוצרות כאשר ה'זרם' נוצר, והם היחס הראשוני של התוספות שמתהוות.

פיתוחו של גוטפריד וילהלם לייבניץ(1646-1716)

חשיבתו המתמטית של לייבניץ הושפעה מרעיונות חשובים של קודמיו:

I. גלילאו גליליאי (1564-1642) – שתרומתו העיקרית למדע היא הכנסת המתמטיקה לצורך חישובים פיזיקאליים, קבע אמת נוספת, או יותר נכון גישה מקורית שעיקריה סייעו מאד ללייבניץ לפתח את הקלקולוס שלו מאוחר יותר. גלילאו הניח (Hall, From Galileo to Newton, 1963) שקו יכול להיחשב כאוסף אינסופי של נקודות; משטח – כאוסף אינסופי של קווים מקבילים ונפח – כאוסף אינסופי של משטחים.

II. יוהנס קפלר (1571-1630)– גרס ששטחים מורכבים מאינסוף משולשים עם מרכז אחד. קל לדמיין טענה זו כאשר חושבים על מעגל.
שיטה זו סייעה לקפלר בחישובי שטחים, כמו בדוגמא של המעגל:



המרכז ידוע; המרחק בין שתי נקודות B_1, B_2 למשל, שעל המעגל הוא קטן באופן אינפיניטסימאלי. כך, ניתן לחשב בעזרת אינטגרציה פרימיטיבית (כלומר, ע"י חישוב שטחי משולשים) מהו שטח המעגל. אם נתייחס למעגל ולשטחו כאל אוסף משולשים ישרי זווית, שטח המעגל יהיה מורכב משטחי המשולשים הבאים:

$$\frac{B_1 \cdot r}{2} + \frac{B_2 \cdot r}{2} + ... + \frac{B_n \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(B_1 + B_2 + ...B_n)$$

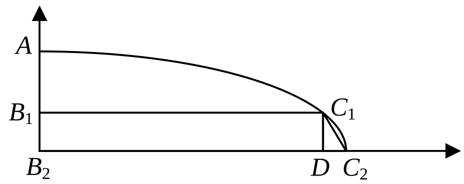
כאשר סכומי הקטעים $B_1 + ... + B_n$ הם בדיוק היקף המעגל C ואז השטח הוא כבנוסחה הידועה $\frac{r}{2} \cdot C$. כלומר, תרומתו של קפלר נעוצה בהכנסת גדלים אינפיניטסימאליים לתוך הוכחות גיאומטריות (Boyer,1998).

III. בלייז פסקל (1623-1662) – מכל כתביו של פסקל, מה שהשפיע רבות, לדעתי, על לייבניץ ביצירת הקלקולוס שלו היה הלגיטימציה שפסקל נתן לרעיון של סידרת הפרשים יורדת במשולש ההרמוני, בו כל גורם שאינו נמצא בשורה הראשונה הוא ההפרש בין שני הגורמים שמעליו. כיוון שלייבניץ עבד עם סדרות יורדות וסכומיהן, הרעיון שבמשולש ההרמוני סייע לו רבות.

IV. אייזאק בארו (1630-1677) – בדיוק כשם שהוא היה אביו הרוחני של ניוטון כך גם לייבניץ הושפע רבות מקריאת כתביו. הרעיון של שימוש בגדלים אינפיניטסימאלים קטנים והוכחות באמצעות דמיון משולשים, נטע ביטחון בלייבניץ לפתח קלקולוס שמבוסס על השימוש בגדלים אלה (ריינהרץ,1999).

ייחודיותו של פיתוח הקלקולוס על ידי לייבניץ נעוצה ביכולתו לשלב רעיונות לוגיים לכלל רעיון חדש ומקורי. כלומר, לא רצף של שיטות ויזואליות מנחות אותו, אלא עקרונות כללים שבשילובם יחד ניתן ליצור קלקולוס חדש. במכתבו של לייבניץ לאולדנבורג מ- 21.6.1677 שמופיע אצל טורנבול (Turnbull, 1945) הוא כותב (בתרגום: מ.ר.):

"...זה זמן רב שאני מנסה לפתח דרך כללית שמקורה בהפרשי הרכיבים והיחס ביניהם... מציאת המשיק הינו קץ התהליך של הסתכלות במשולש קטן והולך..."



על-פי גלילאו וקפלר, העקום AC_1C_2 הוא אוסף אינסופי של נקודות, ואילו לייבניץ גורס שאם נחברן נוכל להתייחס לעקום כאל מצולע בעל מספר אינסופי של צלעות. לכן, בסופו של דבר ניתן להסתכל על המשולש ΔDC_1C_2 כהולך וקטן עד אשר בגודל קטן באופן אינפיניטסימאלי, היתר של המשולש C_1C_2 מתקרב לעקום עד כדי התלכדות עמה. כך גודל המשולש ישאף לאפס ושיפוע היתר יהיה גם שיפוע המשיק.

כלומר, לייבניץ רואה את כל התהליך של בניית המשיק כ׳תהליך פנימי׳ של העקום, וזאת לעומת ניוטון ודיקארט, בארו ופרמה, שרואים את התהליך מ׳בחוץ׳. בשתי הדרכים מגיעים לאותה תוצאה, אולם מידת הסרבול בשיטתו של לייבניץ קטנה לאין ערוך מזו שבשיטות החישוב אצל האחרים. ניוטון אינו מגיע לרמת ההכללה בדרך החישוב שלו, אלא רק לאחר מקבץ חישובים מייגעים. אצלו, הנגזרת היא עניין נקודתי. אצל לייבניץ יש מיקוד בעבודה בעזרת סימונים שהוא פיתח.

כיוון שהפרשנות שלו לגבי הקלקולוס היא כאל סדרת ערכים יורדת, רעיון אותו שאב מפסקל, יש הגיון לייצג משתנים ששואפים לאפס וכך לעבור לרמת ההכללה. (הגאוניות של הפיתוח של לייבניץ נעוצה באיגוד רעיונות מתמטיים שונים שרווחו באותה תקופה והכללתם למונח חדש שהוא המציא –האינפיניטסימל- המאפשר עקיפת הפרדוכס של חלוקה באפס על ידי חלוקה באינפיניטסימל וכשהוא מבצע את המעקף הנ״ל הוא יכול לבצע הכללות שביחס לתקופתו הן הוכחות תקפות ושניתן לתוקפן במישור הפילוסופי בלבד ולא במישור התקפות המתמטית שלהן.)

בעוד שניוטון עובד נקודתית על גבי גרף העקום, לייבניץ מעבד את הנוסחה הראשית שמתארת את העקום ועל-ידי כך הוא מגיע לנוסחה שמתארת את הנגזרת בקלות רבה יותר. כאשר הוא מגיע לנוסחה, הוא לא צריך לחשב בכל פעם מחדש מהו ערך הנגזרת. מספיק לו להציב את ערך ה-x בנוסחה שהוא פיתח כדי לגלות את ערך הנגזרת באותה נקודה.

מכיוון שלייבניץ מתעסק בסדרות והפרשים אינפיניטסימאליים (קטנטנים), הוא יכול לחשוב על כיוון של יצירת אלגוריתם שחושף את חוקיות הסדרות. זאת לעומת ניוטון שחושב ורואה את הגרף כסטייה מן הזמן המתמיד, כלומר סטייה ממצב יחיד. לכן, בכל פעם צריך לחשב הכל מן ההתחלה, אין אלגוריתם, אלא חישוב הסטייה מן הזמן המתמיד.

ייחודיותו של הפיתוח של לייבניץ נעוצה בשילוב גורמים שאפשרו ראייה אינפיניטסימאלית והתכנסות סדרות. שילוב זה מושלך אל עבר פתרון בעיית המשיק על-ידי יכולת ליצור אלגוריתם. המתודיקה של לייבניץ היא מתודיקה דיפרנציאלית. עצם הסתכלותו על העקום כמצולע אינסופי מסייעת לו לפתור את הבעיה המתמטית שלפניו, דהיינו, מציאת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה נתונה על-ידי שימוש בגדלים אינפיניטסימאליים שמאפשרים גיבוש נוסחאות כלליות יותר לדיפרנציאציה ואינטגרציה. אין לו צורך ביחס ראשוני ואולטימטיבי כמו אצל ניוטון. די לו בהכללת נוסחת השיפוע בין שתי נקודות במקרה של קו ישר, לנוסחת שיפועים שבה קיים גודל אינפיניטסימאלי ששואף לאפס.

בזה מתבטא ״המעוף הלוגי״ של לייבניץ. הוא משלב בין דברים שלכאורה אינם נראים קשורים זה לזה: הרעיון של חישוב מנת ההפרשים בין ערכי ה-y לערכי ה-x שמשלבים את תפקיד היתר במשולש האינסופי הקטן יחד עם הגדרת הנגזרת כמשיק לגרף העקום בנקודה נתונה.

מציאת היתר במשולש האינסופי הקטן שקולה במצב אינפיניטסימאלי להעברת משיק לעקום באותה נקודה, ובה גודלו של היתר במשולש האינסופי הקטן שואף לאפס (ריינהרץ,1999).

סיכום

תלמידים רבים מסיימים את לימודי המתמטיקה בבית-הספר כאשר ידיעותיהם לגבי יוצרי המקצוע הם פיתגורס ובני גורן בלבד... הדרך, בה מוצגת ההתפתחות של מושג מסוים על ידי מספר רב של מתמטיקאים מאפשרת לתלמיד להבין את תהליך היצירה המתמטית

כחלק מההתפתחות האנושית. שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה מאפשרת לתלמיד לא רק לחזק את תחום הבנתו, אלא גם מזמנת לו חוויה של רזוננס קוגניטיבי; כלומר, הצגת ההתפתחות של המושגים עם הטעויות ואי-הדיוקים שהיו בתהליך מעמיקה את רמת העניין של התלמיד בנושא ובכך גם משפרת את ההבנה. הטעות, כפי שנעשתה במהלך ההיסטוריה, מאפשרת לתלמיד תחושה של הזדהות עם תהליך הלמידה של המתמטיקה, כי הטעות אותה הוא בעצמו ביצע, נעשתה בעבר גם על ידי מתמטיקאי דגול.
אנחנו, כמורים, איננו יוצרי המתמטיקה, אלא סוכניה בכיתה. גם הצגה של ידע עובדתי בלבד, אינה מספקת. אנחנו מלמדים לפתור תרגילים ולא מלמדים את תהליך ההתפתחות של החשיבה המתמטית. אנחנו מתמקדים בפרקטיקה בלבד, וזה חבל מאד. בנוסף: הצגת אונתולוגיות אינה יוצרת, לדעתי, אווירה של הכרות עם תחום הידע שלנו. כלומר לא מספיק רק להביא את סיפור חייו של מתמטיקאי, אלא חשוב להתחקות אחר תהליך היצירה שלו. המתמטיקה היא יצירה אנושית, מתמטיקאים רבים יצרו את הידע הקיים וראוי ורצוי, לדעתי, שתלמידים יהיו מודעים לפעילות עשירה זו.

רשימת מקורות

אונגרו ש. (1989). *מבוא לתולדות המתימטיקה*, חלק ב, האוניברסיטה המשודרת. עמודים 42-66.

ברגמן ש.ה. (1990). *תולדות הפילוסופיה החדשה*, מניקולאס קוזאנוס עד תקופת ההשכלה, ביאליק. עמודים 382-419.

לייבניץ. (1984). *השיטה החדשה*, הוצאת מגנס.

קוזולין א.ת ועילם ג., (עורכים) (2003) ,התפתחות מושגים מדעיים אצל ילדים: ניסיון לגבש היפותזת עבודה , בתוך *לב ויגוצקי- מחשבה ותרבות* , הוצאת מכון ברנקו-וייס, עמ' 191-66

ריינהרץ מ.,(1999) *יצירתיות וסינתזה בפיתוח הקלקולוס אצל ניוטון ולייבניץ*, עבודת מוסמך בחוג להיסטוריה ופילוסופיה של המדעים,האוניברסיטה העברית

Alexander H.G. (1970). *The LEIBNIZ-CLARKE, Correspondence*, Manchester Univ. Press.

Arthur R.T.W.(1995). *NEWTON'S Fluxion and Equably Flowing Time*, In Studies of History and Philosophy of Science, No.2 in Vol.26, PP. 323-351.

Ausubel D.P., (1967) Learning Theory and Classroom Practice ,pp.19-27

Barrow I . (1976). *LECTIONES GEOMETRICAE*, G.Olms Pub.

Baron M.E. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pregamon Press, Ch. 7.

Baumgardt C. (1951). *Johanes Kepler,Life and Letters*, Philosophical Library, N.Y.

Bell,E.T. (1937). *Men of Mathematics* , Simon & Schuste, N.Y.

Bertoloni-Meli D. (1993). *Equivalence & Priority*, Clarendon Press, Oxford. PP. 6-73.

Boyer C.B. (1968). *A History of Mathematics*, Wiley & Sons Inc.

Boyer C.B. (1949). *The History Of the Calculus and it's Conceptual Development*, Dover Pub. PP.187-223

Broad C.P. (1964). *Leibniz's Last Controversy With the Newtonias*, in Thoria, Vol.12, No.3. PP.143-168.

Brophy J. (1962). *The Achivements of Galileo*, College Press, New-Haven.

Child J.M. (1920). *The Early Mathematical Manuscripts Of Leibniz*, Open Court Pub. Ch.3, PP.22-58.

De Gandt F .(1995). *Force and Geometry in Newton's Principia*, Princeton Univ. Press, PP.159-165, 208-231.

Descartes R. (1925). *The Geometry of Re'ne' Descartes*, Open Court Pub.

Driver R., (1985) *Children's Ideas in Science* ,Open University Press, Ch.1, pp. 1-9

Hall A.R. (1963). *From Galileo to Newton 1630-1720* , Collins pub, PP. 82-92.

Hall A.R. (1980). *Philosophers At War*, Cambridge Univ. Press.

Hill A. (1683). *Some Accounts of the Life of Dr. I. Barrow*.

Katz V. J. (1993). *A History of Mathematics* , Collins Pub.

Kline M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times* , Oxford Univ. Press. PP. 342-349.

Latta R. (1948). *Leibniz-The Monadology*, Oxford Univ. Press.

Jolley n. (1995). *Leibniz*, Cambridge Univ. Press. PP. 18-43.

Mahoney M.S..(1994). *The Mathematical Career of Pie'rre De Fermat (1601-1665)* , Princeton Univ. Press, New Jersey, Ch. 4.

Meyer R.W. (1952). *Leibniz and the 17 th. Century Revolution*, Henry Regnery Company,Chicago.

Newton I.(1999). *Principia Mathematica*, PP.9-39

Scriba C.J. (1962-1966). The Inverse Method of Tangents , PP.113-134, In Trusdell C., *Archive For History Of Exact Science* , Vol. 2.

Turnbull H.W.(1945). *The Mathematical Discoveries of Newton*, Blackie & sons Lim. PP.2-33.

Turnbull H.W.(1959-1977). *The Correspondence of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press.Vol. 2. PP.130-161, 219-230.

Wallace W.A. (1984). *Galileo and His Sources*, Princeton Univ. Press.

Whiteside D.T. (1976). *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press. Vol.1, PP.234-321,Vol.8,PP.92-159.

Wilson N.L.,(1998). *The Leibniz-Clarke Correspondence*, PP.189-206.