



הנושא: אוילר וגאוס – שניים מגדולי המתמטיקאים

הוכן ע"י: אלה שמוקלר.

תקציר: המאמר מתוארים סיפורי חייהם ותרומתם להתפתחות המתמטיקה של שניים מגדולי המתמטיקאים בכל הדורות: ליאונרד אוילר שחי במאה השמונה-עשרה וקרל פרידריך גאוס שחי במאות השמונה-עשרה והתשע-עשרה.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, היסטוריה של המתמטיקה, ליאונרד אוילר, אוילר, קרל פרידריך גאוס, גאוס, אנליזה, משוואות דיפרנציאליות, טריגונומטריה, פונקציה טריגונומטרית, מושגים, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטריה המישור, הנדסת המישור, בניות, בניות בעזרת סרגל ומחוגה, מצולע, מצולע משוכלל, הוכחות, מספרים ראשוניים, מספרי פרמה, מספרים שלמים, הוראת המתמטיקה, יישומי מתמטיקה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 23-29

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

אویلר וגאוס

שניים מגדולי המתמטיקאים

אלה שמוקלר
הטכניון, חיפה

shmukler@tx.technion.ac.il

השכלתו ויצירתו

ליאונרד אוילר נולד ב-15 באפריל 1707 בעיר באזל בשווייץ במשפחה של כוהן פרוטסטנטי בשם פאול אוילר. מוריו הראשונים למתמטיקה היו אביו ויוהן ברנולי (Johann Bernoulli, 1667-1748) - פרופסור באוניברסיטת באזל.

בגיל 14 אוילר התחיל את לימודיו באוניברסיטת באזל, בכוונה ללכת בדרכו של אביו, כלומר לקבל השכלה כללית ולאחר מכן לעבור ללימודים לקראת תואר בכחונה. אבל יוהן ברנולי, אשר גילה את הפוטנציאל העצום של אוילר בתחום המתמטיקה, שכנע אותו לשנות מגמה מכהונה למתמטיקה.

אוילר סיים את לימודיו באוניברסיטה בשנת 1726 בתואר מאסטר לפילוסופיה ולמתמטיקה. לאחר ניסיון לא מוצלח לקבל משרה באוניברסיטת באזל, הצליח אוילר למצוא עבודה במחלקה לפיסיקה ומתמטיקה באקדמיה למדעים בסנט-פטרבורג. בשנת 1733 קיבל את התפקיד הראשי במתמטיקה במחלקה זו, במקום דניאל ברנולי (Daniel Bernoulli, 1700-1782) שעזב לבאזל.

בשנת 1741 התחיל אוילר לעבוד באקדמיה למדעים בברלין לפי הזמנתו של פרידריך הגדול, מלך פרוסיה. בברלין הוא נשאר כ-25 שנה ובמהלכן שמר על קשרים עם האקדמיה בסנט-פטרבורג. בתקופה בה חי בגרמניה הוא פרסם כ-380 מאמרים וספרים. בשנת 1766 עזב אוילר את האקדמיה של ברלין בעקבות סכסוך עם פרידריך וחזר לסנט-פטרבורג. משנת 1771 ועד מותו בשנת 1783 היה אוילר עיוור לחלוטין. העיוורון לא השפיע על תפוקתו המדעית, וזו לא רק שלא קטנה, אלא אף גדלה בתקופה זו.

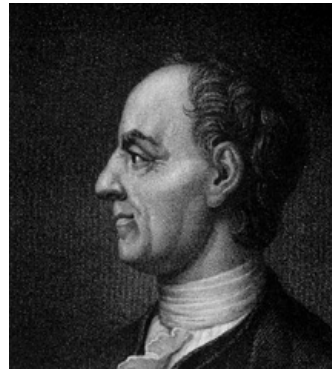
רשימת הנושאים בהם עסק אוילר היא מאד מגוונת: בתחום המתמטיקה הטהורה • אלגברה

מבוא

ההיסטוריה של המתמטיקה עשירה בדמויות של מתמטיקאים גדולים שתרמו תרומה ניכרת להתפתחות המתמטיקה. אוילר וגאוס הם היכוכים מדרגה ראשונה המוכרים בשמי המתמטיקה. כל אחד מהם זכה למעמדו הרם הן הודות להיקף העצום של השגיו בתחומים שונים של המתמטיקה והן הודות להשפעתו המתמשכת על התפתחות המתמטיקה בזמנו ואחריו. במאמר זה נדון בכיוונים האופייניים ובתוצאות העיקריות ביצירותיהם של שני גאונים אלה ובשילוב אפשרי שלהן בחינוך המתמטי בבית-הספר העל-יסודי. נתאר גם את חייהם האישיים ואת תכונות האופי של כל אחד מהם. למעוניינים בקריאה נוספת מצורפת רשימת מקורות.

אוילר (Leonard Euler, 1707-1783)

כריסטי ביקור



ליאונרד אוילר הוא המתמטיקאי הפורה והשופע ביותר בכל הזמנים, אשר נחשב לאחד מארבעת המתמטיקאים הגדולים בהיסטוריה (יחד עם ארכימדס, ניוטון וגאוס). הוא כתב 868 מאמרים

וספרים, רובם בגיל מבוגר ובהיותו עיוור. אוילר נחשב בצדק לגדול מפתחי המתמטיקה שקמו במאה ה-18. הוא פעל בכל כיוון של המתמטיקה – טהורה או שימושית – שהיה קיים אז, והיה שותף פעיל בפיתוח של תחומים חדשים כגון חשבון ווריאציות וטופולוגיה. שפע יצירותיו – 'העולם של אוילר' – עיצבו את פניה ואופייה של המתמטיקה בכל הדורות מאז ועד היום.

מעט על חייו של אוילר ואישיותו

אוילר היה אדם צנוע ופשוט. על צניעותו וגדולתו מצביעה העובדה שהוא דחה פעמים אחדות את פרסום תוצאותיו כדי לתת למתמטיקאים צעירים אפשרות להגיע אליהן בעצמם ולפרסם אותן קודם. היה לו כושר זיכרון מפתיע ויכולות מדהימות של ריכוז והתמקדות. כשנשאל איך הוא מסוגל לחשב כל כך מהר, ענה: "העיפרון רץ לפני".

לאחר שאוילר קיבל משרה גבוהה באקדמיית סנט-פטרבורג (1733), פנה להקמת משפחה. הוא נשא לאשה את קתרינה גזיל (Katharine Gsell) בת למשפחה שוויצרית שגרה בסנט-פטרבורג. נולדו להם 13 ילדים שרק חמישה מהם הגיעו לבגרות. אוילר היה מסור לדתו ולמשפחתו. מדי יום נהג להקריא לבני משפחתו פסוקים מהתנ"ך. אוילר אהב ילדים והקדיש להם מזמנו. הוא נהג לומר שאחדות מהתוצאות החשובות במחקריו התקבלו, כאשר על ברכיו התיישב אחד התינוקות ושאר הילדים שיחקו לרגליו. הוא מת בעת משחק עם נכדו.

התנהגותו של אוילר במקרים רבים בחייו מעידה על כך שהוא הזניח את בריאותו למען עבודתו. הוא איבד את אחת מעיניו עקב עבודתו בקרטוגרפיה ואת העין השנייה עקב חוסר הקפדה עליה לאחר הניתוח.

אוילר היה איש ישר. לא קל היה לו באווירה התככנית בחצרו של פרידריך הגדול ובסופו של דבר החליט לעזוב אותה. הוא היה בעל חוש הומור כפי שמעיד סיפור הויכוח על הוכחת הקיום של אלוהים, שפרץ בינו לבין הפילוסוף הצרפתי דידרו (Diderot) בעת פגישתם באחת המסיבות בחצרה של קתרינה הגדולה. השילוב של העוצמה האינטלקטואלית הבלתי רגילה עם האופי החם של אוילר, הופך את דמותו לאחת הבלוטות והמרתקות ביותר בהיסטוריה של המתמטיקה.

- גיאומטריה
- טריגונומטריה
- חשבון דיפרנציאלי
- חשבון אינטגרלי
- משוואות דיפרנציאליות
- חשבון וואריאציות
- מספרים מרוכבים ופונקציות מרוכבות
- גיאומטריה דיפרנציאלית
- טופולוגיה
- תורת המספרים

בתחום המתמטיקה השימושית

- מכאניקה אנליטית
- הידרודינאמיקה
- קרטוגרפיה
- פיסיקה
- אסטרונומיה
- מוזיקה

נציין כאן את היצירות המרכזיות של אוילר:

בתקופתו הראשונה בסנט-פטרבורג אוילר פרסם את הרעיונות שלו בנושא המשוואות הדיפרנציאליות וקשריהן עם פונקציות טריגונומטריות. באותו זמן פתרו משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה באמצעות פונקציות אקספוננציאליות בלבד. אוילר חקר תנועות של מיתר גמיש, ותוך כדי כך הבין כי יש משוואות דיפרנציאליות שלהתרתן דרוש שימוש בפונקציות טריגונומטריות. בשנת 1739 הוא השתמש לראשונה בסינוס כפונקציית זמן להתרת משוואה דיפרנציאלית.

בהיותו בברלין הציג אוילר את רעיונותיו לגבי חשבון ווריאציות, תחום חדש שנולד בסוף המאה ה-17. בשנת 1748 ראה אור ספר שלו בשם: 'מבוא לאנליזה של אינסופיים' המוקדש בעיקר לחקירה של פונקציות אלגבריות וטרנסצנדנטיות. יצירה זו של אוילר מהווה כרך ראשון בסדרת ספריו בתחום האנליזה המתמטית. בשנת 1755 יצא לאור הכרך השני – 'חשבון דיפרנציאלי'. הכרך השלישי – 'שיטות של חשבון אינטגרלי', הופק לאחר חזרתו של אוילר לסנט-פטרבורג בשנת 1766. כרך זה מתבסס על שיטות אנליטיות ובו מוסבר לראשונה האינטגרל הכפול.

בין הפעילויות של אוילר בתחום המתמטיקה השימושית, לאחר חזרתו לרוסיה, נציין את חקירותיו באסטרונומיה, דהיינו חקירת תנועות הירח והשפעתן על גאות ושפל וחישוב מסלולו של הכוכב אוראנוס. אוילר נפטר זמן קצר לאחר סיום חישוב זה ב-18 בספטמבר 1783.

שילוב השגיו של אוילר בחינוך המתמטי

המדען הצרפתי הגדול לפלס (Laplace) נהג לומר לתלמידיו (בתרגום לאנגלית) כך:

"Read Euler, read Euler, he is our master in everything"
בהשראת מילים אלו קרא וויליאם דנהם לספרו על אוילר בשם: 'Euler – The Master of Us All' (William Dunham, 1999, MAA)

אוילר אהב ללמד ולימד במשך כל שנות פעילותו המדעית. היה לו שם של מורה מעולה. אחת מתכונותיו הידועות ביותר הייתה נכונותו להסביר את ממצאיו בפרטי פרטים.

אוילר טבע מושגי יסוד וסמלים בתחום האלגברה והאנליזה, כגון מושג הפונקציה וסימולה $f(x)$, המספר e כבסיס לוגריתם טבעי, פונקציות טריגונומטריות של מספר ממשי, הסמלים $\pi, i, \sum, \Delta y, \Delta^2 y$ ועוד. נציין מספר נושאים שמקורם ביצירותיו של אוילר, הניתנים לטיפול במסגרת לימודי המתמטיקה בבית-ספר תיכון:

- בעיית באזל
- בעיית גשרי קניגסברג
- משפט אוילר על הקשר בין מספר הקדקודים, לבין מספר המקצועות ומספר הפאות של פאון
- מספרי פרמה
- המשפט הקטן של פרמה והכללתו על ידי אוילר
- הוכחת המשפט הגדול של פרמה עבור: $n = 3$
- מספר אוילר e
- נוסחת אוילר
- קו אוילר במשולש
- בעיית אוילר על חלוקת מצולע למשולשים על-ידי אלכסונים
- מעגל תשע הנקודות של אוילר

עיסוק בנושאים אלה יכול להתבצע במסגרת פרויקטים אישיים של תלמידים, ימי-עיון בית-ספריים, בעיות-שבוע וכדומה. ללא ספק על ידי חקר מכוון ניתן למצוא בימורשת אוילר נושאים נוספים המתאימים למסגרת של חינוך מתמטי על-יסודי. חיפוש נושאים כאלה ומציאת דרכים לשילובם בלימוד המתמטיקה עשויים להיות פעילויות מהנות ובעלות ערך רב למורים ולמורי-מורים למתמטיקה בבית-ספר תיכון ובמוסדות אקדמיים.

לקראת מלאת 300 שנה ללידתו של אוילר (2007) באוקטובר 2001 נוסדה חברת אוילר (The Euler Society). לפי דברי המייסדים של החברה, מטרתה היא להמריץ

ולחזק את לימוד המתמטיקה וגם להעמיק ולהרחיב את הבנת הקשרים ההדוקים בין מתמטיקה לבין אסטרונומיה, מכניקה וטכנולוגיה. חברת אוילר תחקור את זמנו, עבודתו וחיייו של אוילר והשפעתם של ממצאיו על המחקר המודרני בתחומי המתמטיקה ויישומיה.

באוגוסט 2002 התקיים הכנס הראשון של חברת אוילר במיין (Maine). באוגוסט 2004 נערך הכנס השני בפורטסמות (Portsmouth, RI). מידע מפורט לגבי חברת אוילר ופעולתה ניתן למצוא באתר החברה:

www.eulersociety.org

גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)



כרטיס ביקור

קארל פרידריך גאוס היה מדען גרמני אגדי – מתמטיקאי, אסטרונום ופיזיקאי, אשר תרם תרומה עצומה בכל תחומי חקירותיו. הוא נחשב, כאמור, לאחד מארבעת המתמטיקאים הגדולים בהיסטוריה. במי חייו נהגו לכנותו בשם: "נסיך המתמטיקה".

השכלתו ויצירתו

ילד הפלא גאוס נולד בדוכסות בראונשווייג (כעת חלק מגרמניה) כבן יחיד להורים ממעמד חברתי נמוך. אביו היה שרברב. מספרים כי בגיל שלוש מצא טעות בחישוב שכר העבודה של אביו. בגיל שבע גאוס התחיל לבקר בבית-ספר יסודי בבראונשווייג. ידוע הסיפור על המשימה שנתן המורה בכיתתו של גאוס: לחבר את כל המספרים מ-1 עד 100. המורה נתן משימה זו כדי להעסיק את הכיתה לזמן רב. להפתעת המורה והתלמידים, גאוס פתר את הבעיה בין רגע על-פי השיקולים הבאים:

$$1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, \dots, 50 + 51 = 101$$

$$50 \times 101 = 5050 \quad \text{לכן הסכום הוא:}$$

בשנת 1788 עבר גאוס מבית-ספר יסודי לגימנסיה ולמד שם שפות: גרמנית ולטינית. באותו זמן הוא עוד לא החליט לאיזה תחום יקדיש את חייו: למתמטיקה או

(התיאוריה של תנועות גופי שמיים סביב השמש / חתכים קוניים). בין הממצאים של עבודה זו נמצא קבוע הגרוויטציה.

גאוס בנה מערכת אכסיומות לגיאומטריה לא-אוקלידית, אבל לא פרסם זאת. הבנייה של גיאומטריה לא אוקלידית מיוחסת ליאנוש בוליי (Janos Bolyai) ולניקולאי לובצ'בסקי (Nikolai Lobachevski). בשנת 1832, לאחר פרסום עבודתו של בוליי, ניסה גאוס לבדוק אם יש מקום לגיאומטריה לא-אוקלידית בעולם הפיסיקלי, על ידי מדידת משולשים גדולים.

בתחום הפונקציות המרוכבות, גאוס חקר תכונות של העתקות קונפורמיות וגילה את המשפט על פונקציות מרוכבות אנליטיות, הידוע בשם 'משפט על אינטגרל קושי', אבל לא פרסם אותו.

בשנת 1818 התחיל גאוס בסקר גיאודזי של הנובר (Hanover). בעקבות עבודה זו הוא גילה וחקר התפלגות נורמאלית שעקומה ידוע כעת בשם 'גאוסיאן' והתעניין בגיאומטריה דיפרנציאלית. בתחום זה הוא הוכיח משפט חשוב (Theorema Egregium – המשפט הבולט, הראוי לציון) אשר קובע כי ניתן למדוד עקמומיות של משטח באמצעות כלים פנימיים בלבד.

בשנים 1831-1837 בעבודה משותפת עם פרופסור לפיסיקה בשם וילהלם וובר (Wilhelm Weber), הגיע גאוס לתוצאות חשובות בתחום המגנטיות והחשמל. חשוב לציון כי בקבלת תוצאות אלה השתמש גאוס בתורת מתמטיות שפיתח קודם, במיוחד בתורת הפוטנציאל ובשיטת הריבועים הפחותים.

גאוס נפטר בשנתו ב-23 בפברואר 1855 ונקבר בגטינגן. מספרים כי גאוס רצה שעל מצבתו ייחקק מצולע משוכלל בן 17 צלעות, אבל בונה המצבות סרב לעשות זאת, בנימוק כי מצולע כזה יהיה זהה למעגל. המצולע מופיע בצורת הבסיס של פסל, אשר הועמד לכבודו של גאוס בעיר מולדתו בראונשווייג.

תמונתו של גאוס ועקום ההתפלגות הנורמאלית (גאוסיאן) הופיעו על שטר כסף גרמני של 10 מרקים בין השנים 1989-2001.

מעט על חייו של גאוס ואישיותו

בסתיו 1805 נשא גאוס לאישה את יוהנה אוסטוף. נישואין אלה היו מאושרים. לרוע המזל בשנת 1808 התחילה לפקוד את גאוס סדרה של אסונות. תחילה נפל במלחמה מיטיבו דוכס בראונשווייג. לאחר מכן נפטר אביו וכעבור שנה נפטרה אשתו לאחר הולדת הבן השני.

לפילולוגיה. ב-1792 גאוס התחיל את לימודיו בקולג'. במהלך לימודיו שם גילה מחדש והוכיח בעצמו משפטים אחדים בתורת המספרים, באופן בלתי תלוי בכך שכבר הוכחו קודם. בשנת 1795 עזב את בראונשווייג ועבר לאוניברסיטת גטינגן בתמיכתו של דוכס בראונשווייג. שם, בשנת 1796 הוא הוכיח את אפשרות הבנייה של מצולע משוכלל בן 17 צלעות באמצעות מחוגה וסרגל (ללא שנתות) בלבד. גאוס הפך במהרה למתמטיקאי מפורסם מאחר ובעיה זו הוצגה על ידי מתמטיקאים ביוון העתיקה, ולא נפתרה במשך כאלפיים שנה. בעקבות הצלחה זו בחר גאוס במתמטיקה כמפעל חייו. בשנת 1798 הוא עזב את אוניברסיטת גטינגן, טרם קבלת דיפלומה, וחזר לבראונשווייג. דוכס בראונשווייג שמימן את לימודיו של גאוס, דרש ממנו להגיש את הדוקטורט לאוניברסיטת הלמשטאט. מאוניברסיטה זו בשנת 1799 קיבל גאוס את תואר הדוקטור. עבודת הדוקטורט של גאוס הוקדשה למשפט היסודי של האלגברה, לפיו לכל פולינום עם מקדמים מרוכבים יש לפחות שורש מרוכב אחד. גאוס לא היה הראשון שהציג את המשפט, אבל הוא היה הראשון שנתן לו הוכחה שלמה. הוא המשיך לשכלל את הוכחת המשפט במשך חייו, ובדרך זו שכלל את מושג המספר המרוכב. ידועות ארבע הוכחות שונות שנתן גאוס למשפט זה.

בשנת 1801 הוכיח גאוס את המשפט היסודי של האריתמטיקה, לפיו כל מספר שלם ניתן להצגה כמכפלת גורמים ראשוניים באופן יחיד עד כדי סדר. בשנה זו פרסם את עבודתו המפורסמת: Disquisitiones Arithmeticae (המחקרים באריתמטיקה). בששת הפרקים הראשונים מוצגים באופן שיטתי ממצאיו בתורת המספרים: חשבון מודולרי ואלגברה של קונגרוואנציות, חוק ההדדיות הריבועית, ייצוג כל מספר שלם כסכום של לא יותר משלושה מספרים משולשים. הפרק השביעי והאחרון מוקדש לבעיית הבנייה של המצולע המשוכלל בן 17 הצלעות שצוינה לעיל.

גאוס שילב מחקר מתמטי במחקר אסטרונומי. בשנת 1801 הוא פיתח את שיטת הריבועים הפחותים, אבל לא פרסם אותה. שיטה זו אפשרה לו לחשב את מסלול האסטרואיד קרס (Ceres). בשנת 1806 גאוס פרסם את עבודתו היסודית במכניקה של גופי שמיים בשם Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium

באירוע חגיגי רק שני נציגי הקהילה המתמטית (יעקבי ודיריכלה) אבל הוא קיבל הרבה ברכות ופרסים. וולדו דנינגטון (G. Waldo Dunnington) – "הסטודנט המתמיד" של גאוס – כתב ספר על תולדות חייו של גאוס בשם: 'קרל פרידריך גאוס: ענק המדע' (Carl Frederick Gauss: Titan of Science) ספר זה הוצא לאור מחדש בשנת 2003.

שילוב השגיו של גאוס בחינוך המתמטי

גאוס לא אהב ללמד כיתות. אבל היה מוכן לעבוד באופן פרטי עם כל סטודנט שפנה אליו. אחדים מתלמידיו, כמו דדקינד ורימן, התפתחו בהשפעתו למתמטיקאים גדולים. לתגליות של גאוס בכל כיווני המחקר המדעי יש חשיבות גדולה וערך רב בהשכלה המדעית, ובפרט בהשכלה המתמטית, בכל רמותיה.

בחינוך המתמטי העל-יסודי הנושאים העיקריים שמקורם ביצירתו של גאוס הם: שיטת גאוס להתרת מערכות ליניאריות, מושג המספר המרוכב, המשפט היסודי של האלגברה.

חשוב לציין כי בנוסף לנושאים אלה, ניתן למצוא בימורשת גאוס, במיוחד בתחום תורת המספרים, נושאים ופריטים נוספים הראויים לשימוש בחינוך המתמטי העל-יסודי, למטרות שונות: פרויקטים לתלמידים, שבוע מתמטיקה בבית-ספר, יום-עיון מתמטי וכדומה. אחד הנושאים הוא הוכחת המשפט היסודי של האלגברה והמבט המעמיק בהשלכותיו. בלימוד נושא זה ניתן להיעזר במאמר שפורסם בשנת 1995 בכתב העת על"ה 16.

בניית מצולעים משוכללים בעזרת מחוגה וסרגל – נושא לשילוב בהוראה בבית ספר על-יסודי

מעט היסטוריה

בנייה של מצולע משוכלל בן n צלעות שקולה לחלוקה של המעגל ל- n קשתות שוות. אוקלידס (365 – 300 לפסה"ס) בספרו 'יסודות' מתאר בניית מצולעים משוכללים אחדים באמצעות מחוגה וסרגל (ללא שנתות) בלבד. בכלים אלה הוא בונה משולש שווה צלעות (ספר I, פרק 1), ריבוע (ספר IV, פרק 6), מחומש משוכלל (ספר IV, פרק 11), משושה משוכלל (ספר IV, פרק 15) ומצולע משוכלל בן 15 צלעות (ספר IV, פרק 16). אם נבנה מצולע משוכלל בן n צלעות, אז נוכל בנקל לבנות מצולע בן $2n$ צלעות על ידי חציית קשתות המעגל החוסם את המצולע המקורי.

יוהנה ילדה לגאוס שני בנים ובת. התינוק מת זמן קצר לאחר מכן. גאוס היה מזועזע ומבוהל. הוא נכנס לדיכאון, ממנו לא הצליח להשתחרר עד סוף ימיו. בנישואיו השניים של גאוס, לוילהלמינה (מינה) וולדק, חברתה הטובה ביותר של יוהנה, נולדו לו שלושה ילדים נוספים. נישואין אלה לא נראו מאושרים.

לאחר מות אשתו השניה בשנת 1831, לקחה על עצמה בתו תרזה את ניהול משק הבית והמשיכה בתפקיד זה עד מותו. לאחר מכן היא התחתנה אבל ימי חייה לא היו ארוכים (1816-1864). אמו של גאוס גרה בביתו מ-1812 עד מותה ב-1839.

בין כל ילדי גאוס, בתו מנישואיו הראשונים ווילהלמינה (1808-1846) היתה קרובה ביותר לכישרון של אביה, אבל הוא לא בא לביטוי בולט, אולי משום שהלכה לעולמה בגיל צעיר יחסית.

שני בניו של גאוס מהנישואין השניים היגרו לארצות הברית, למדינת מיסורי, הצליחו שם בעסקים והשיגו מעמד חברתי מכובד. לפי העדויות הנמצאות באינטרנט חיים כיום בארצות הברית צאצאיו של גאוס.

גאוס היה איש דתי מאוד ושמרני. הוא תמך במונרכיה והתנגד לנפוליאון בו ראה את תולדת המהפכה הצרפתית. הוא היה מסור מאוד לעבודתו ולא נתן לאסונות אישיים להשפיע עליו. לפי אחד הסיפורים גאוס היה באמצע פתרון בעיה, כאשר באו להודיעו שאשתו יוהנה גוססת. הוא ענה: "אמרו לה לחכות רגע אחד עד שאגמור".

גאוס היה קפדן במידה מוגזמת וחזר ושיפר אותה עבודה מספר רב של פעמים. לכן לעתים קרובות לא פרסם את תוצאות מחקריו, או פרסם אותן חלקית. סיסמתו היתה: "מעט אבל בשל". ידועים סיפורים על חילוקי דעות, שהיו לו עם מתמטיקאים בני זמנו, על זכויות יוצרים של תוצאות שהיה הראשון לגלות, אך פרסם אותן רק לאחר שפורסמו גם על-ידי אחרים. לאחר מותו נמצא יומן המאשר את זכות הבכורה שלו על תוצאות רבות שלא פרסם.

גאוס שיתף פעולה עם מתמטיקאים מעטים בלבד ונחשב לאדם מסוגר וקשה. המתמטיקאי ההונגרי פרקש בוליי (Farkas Bolyai), אביו של יאנוש בוליי, היה אחד מחבריו. הם הכירו זה את זה בהיותם סטודנטים ושמרו על קשר במשך שנים רבות.

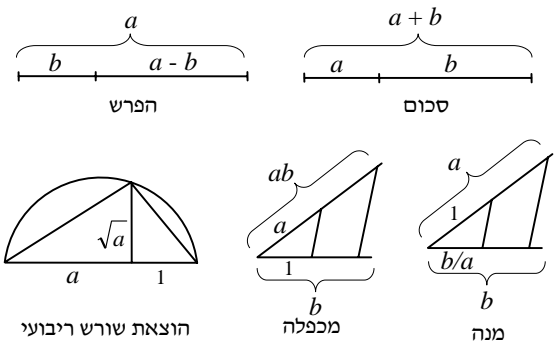
יחד עם זאת זכה גאוס עוד בחייו להכרה בגאוניותו ולהערכה של השגיו המדעיים הבלתי רגילים. בשנת 1849, במלאת 50 שנה לעבודת הדוקטורט שלו, השתתפו

טבלה 1: בדיקת אפשרות הבנייה של מצולעים משוכללים בעלי n צלעות ($n \leq 20$) בעזרת סרגל ומחוגה בלבד

מספר הצלעות n	פירוק n לגורמים ראשוניים	האם מצולע משוכלל בעל n הצלעות ניתן לבנייה בעזרת סרגל ומחוגה בלבד? (כן/לא)
3	$3 = 2^{2^0} + 1 = F_1$	כן
4	$4 = 2^2$	כן
5	$5 = 2^{2^1} + 1 = F_2$	כן
6	$6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot F_1$	כן
7	7	לא
8	$8 = 2^3$	כן
9	$9 = 3 \cdot 3 = F_1 \cdot F_1$	לא
10	$10 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot F_2$	כן
11	11	לא
12	$12 = 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot F_1$	כן
13	13	לא
14	$14 = 2 \cdot 7$	לא
15	$15 = 3 \cdot 5 = F_1 \cdot F_2$	כן
16	$16 = 2^4$	כן
17	$17 = 2^{2^2} + 1 = F_3$	כן
18	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot F_1 \cdot F_1$	לא
19	19	לא
20	$20 = 2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot F_2$	כן

איך הגיע גאוס לתוצאתו?

באמצעות מחוגה וסרגל ניתן לבנות קטע השווה באורכו לסכום, להפרש למנה או למכפלה של האורכים של שני קטעים נתונים. ניתן גם לבנות קטע השווה באורכו לשורש הריבועי של האורך של קטע נתון. בשרטוטים שלהלן מודגמות בניית אלו.



מן האמור לעיל ניתן להסיק, כי כבר בתקופתו של אוקלידס ידעו לבנות במחוגה וסרגל בלבד מצולעים משוכללים בני n צלעות כאשר:

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20$$

בעיית הבנייה של משוּבַע משוכלל ($n = 7$) במחוגה וסרגל נמנית על הבעיות המפורסמות של הזמן העתיק, ביחד עם בעיית 'תרבוּע העיגול' – בנייה בעזרת סרגל ומחוגה של ריבוע השווה בשטחו לעיגול נתון, בעיית 'הכפלת הקוביה' – בנייה בעזרת סרגל ומחוגה של קוביה אשר נפחה גדול פי שנים מנפחה של קוביה נתונה ובעיית 'שילוש הזווית' – חלוקת זווית נתונה לשלושה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה בלבד.

כפי שהוזכר כבר קודם בשנת 1796 בהיותו בן 19 הוכיח גאוס, כי ניתן לבנות במחוגה וסרגל בלבד מצולע משוכלל בן 17 צלעות ובכך ניתן מענה לאחת השאלות בנות יותר מאלפיים שנה. הפרק האחרון בספרו 'מחקרים באריתמטיקה' – Disquisitiones Arithmeticae – מוקדש לחקירה מקיפה של הקשר בין מספר הצלעות (n) של מצולע משוכלל לבין האפשרות לבנות אותו באמצעות מחוגה וסרגל בלבד.

נסמן ב- F_j את מספרי פרמה – מספרים מהצורה $2^{(2^m)} + 1$ כאשר $m \geq 0$ מספר שלם. גאוס הראה כי אם למספר טבעי n יש פירוק לגורמים ראשוניים מהצורה: $n = 2^k \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_s$ ($k \geq 0, s \geq 1$) או $n = 2^k$ ($k \geq 2, k \in \mathbb{N}$) אזי ניתן לבנות במחוגה וסרגל בלבד מצולע משוכלל בן n צלעות. גאוס טען, ללא הוכחה, כי זהו גם תנאי הכרחי, כלומר: אם n אינו ניתן לפירוק כמתואר לעיל, אזי לא ניתן לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות באמצעות מחוגה וסרגל בלבד. ההוכחה לטענה זו ניתנה ב- 1837 על ידי המתמטיקאי הצרפתי פייר וונטצל (Wantzel).

תוצאות גאוס-וונטצל מהוות קריטריון לבדיקת אפשרות בנייה של מצולע משוכלל בן n צלעות באמצעות מחוגה וסרגל בלבד. יש לציין כי עד עכשיו ידועים רק חמישה מספרי פרמה ראשוניים: 3, 5, 17, 257, 65537. לא ידוע אם קיימים מספרי פרמה ראשוניים נוספים ואם כן, מה מספרם. לכן באופן מעשי קריטריון גאוס-וונטצל פעיל בקבוצת כל המצולעים המשוכללים, אשר למספר צלעותיהם (n) אין מחלקים ראשוניים גדולים מדי.

בטבלה 1 נבחנת אפשרות הבנייה במחוגה וסרגל של מצולעים משוכללים בעלי n צלעות ($n \leq 20$) על-פי קריטריון גאוס-וונטצל, כלומר על-פי הפירוק של מספר הצלעות לגורמים ראשוניים.

הצעות לשילוב הנושא בהוראת המתמטיקה

1. שיעור גיאומטריה

בשיעור גיאומטריה המוקדש לחסימה במעגל של מצולעים משוכללים (משולשים, ריבועים, משושים), ניתן להרחיב את הדיון ולהציג בפני הכיתה את ההיסטוריה של הנושא, כפי שהוצגה לעיל.

2. פרויקט לתלמיד

ניתן להציע לתלמיד פרויקט בנושא: "מאוקלידס עד גאוס – שיטות בנייה של מצולעים משוכללים" ולכלול בו חקירה של שיטות הבנייה במחוגה וסרגל של מחומש משוכלל, מצולע משוכלל בן 15 צלעות ומצולע משוכלל בן 17 צלעות.

3. פרויקט למורה

ניתן להמליץ למורים המעוניינים בעבודת חקר לבצע חקירה בנושא: "קריטריון גאוס – ווטנצל" פירוט הנושא: פיתוח תנאי המבטיח את אפשרות הבנייה של מצולע משוכלל באמצעות מחוגה וסרגל, והוכחה שתנאי זה לא רק מספיק, אלא גם הכרחי עבור הבנייה הנ"ל. מטרת החקירה היא הצגת הפיתוח וההוכחה בצורה ברורה ושקופה. מורים שיבצעו פרויקט זה מוזמנים לשלוח את תיאורו ותוצאותיו למערכת עלי"ה.

מקורות והמלצות לקריאה נוספת

- A Biographical Sketch of the Life and Achievements of Leonard Euler <http://home.att.net/~themathdude/Euler.html>
- Euler, Leonard. The Columbia Encyclopedia, Sixth Edition, 2001 <http://www.bartleby.com/65/eu/Euler-Le.html>
- The International Virtual Institute for Historical Studies of Mathematics <http://ivihsm.cua.edu/>
- How Euler Did It (Estimating the Basel Problem). By Ed Sandifer <http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%20the%20Basel%20Problem.pdf>
- Leonard Euler <http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Euler.html>
- Biography of Leonard Euler. <http://tiger.towson.edu/users/gstiff1/eulerbio.htm>
- Leonard Euler. <http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Euler.html>
- Leonard Euler. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Euler.html>
- William Dunham. Euler- The Master of Us All. MAA, 2004
- Cronology of the Life of Carl F. Gauss <http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/appendix/chrono.html>
- Carl Friedrich Gauss http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#Personal_life
- Gauss, Karl Friedrich (1777-1855) <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Gauss.html>
- Johann Carl Friedrich Gauss <http://www.cps.nova.edu/~cpphelp/pantheon/gauss.htm>
- Johann Carl Friedrich Gauss <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Gauss.html>
- Gauss' Biography http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/g_bio.html
- Gauss – Quotes <http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/quotes.html#6>
- G.Waldo Dunnington. Gauss: Titan of Science. MAA, 2003
- V.M. Tikhomirov. The Great Mathematicians of the Past and Their Great Theorems. Moscow, 1999 (in Russian)

אורך הצלע של מצולע משוכלל בן 17 צלעות החסום

במעגל בעל מחוג באורך 1 הוא: $2 \sin \frac{\pi}{17}$.

$$2 \sin \frac{\pi}{17} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{17} \right)}$$

קל להוכיח כי:

$$\cos \left(\frac{2\pi}{17} \right) = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right)$$

בכך הוא למעשה הוכיח כי כדי לחשב את אורך הצלע של מצולע משוכלל בן 17 צלעות ניתן להשתמש בארבע פעולות החשבון ובפעולת ההוצאה של שורש ריבועי, כאשר אלה מופעלות על מספרים שלמים. מכאן, ולפי הנאמר קודם, נובע כי ניתן לבנות מצולע משוכלל בן 17 צלעות באמצעות מחוגה וסרגל בלבד.

מעניין וחשוב לציין כי הוכחה זו נשענת על עבודותיהם של שלושה מהמתמטיקאים הגדולים בכל הדורות: ניוטון, אוילר וגאוס. ניוטון פיתח את הפונקציות:

$$\sin x, \cos x, e^x$$

פיתוח זה לבניית הנוסחה הקרויה על-שמו: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ וגאוס פיתח על-סמך אלה, את הנוסחה לחישוב שורשי היחידה המרוכבים, בה השתמש בהוכחתו.

מכאן ניתן להסיק כי אי-ההצלחה בפתרון בעיית המשובע המשוכלל והבעיות הדומות לה במשך אלפיים שנה טמונה במחסור כלים מתאימים הדרושים לפתרון דהיינו מספרים מרוכבים ופונקציות מרוכבות.

הערה

גאוס חקר את אפשרות הבנייה של מצולעים משוכללים במחוגה וסרגל, ללא התמקדות בדרכי הבנייה המעשיות. בעקבות תוצאותיו של גאוס, הוצעו שיטות שונות לבנייה במחוגה וסרגל של מצולע משוכלל בן 17 צלעות. היפה ביניהן נמצאה בשנת 1896 על ידי המתמטיקאי האנגלי ריצ'מונד (Richmond). בשנת 1832 המתמטיקאים הגרמניים ריצ'לוט (Richelot) ושוונדנוויין (Schwendenwein) בנו מצולע משוכלל בן 257 צלעות. בשנת 1894 בנה המתמטיקאי הגרמני הרמס (Hermes), לאחר עשר שנים של מאמצים, מצולע משוכלל בן 65537 צלעות.