הנושא: **מתמטיקה בימי הפרעונים**

הוכן ע"י: עטרה שריקי.

תקציר: במאמר מתוארות שיטות ספירה, שיטות חישוב של פעולות החשבון השונות כגון כפל חילוק ואף הוצאת שורש ריבועי, שיטה לפתרון משוואה ריבועית ושיטות לפתרון בעיות גיאומטריות מישוריות ומרחביות שהיו נהוגות בימי הפרעונים במצרים העתיקה כאלפיים וחמש מאות שנה לפנה"ס, כפי שתועדו על-גבי פפירוסים ונשמרו עם ימינו.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, היסטוריה של המתמטיקה, סימונים, מספרים ופעולות, פעולות חשבון, חיבור, חיסור, כפל, חילוק, שיטת הכפל המצרי, מספרים רציונליים, שברים פשוטים, שברי יחידה, אלגברה, משוואה, משוואה ממעלה שנייה, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מצולע, ריבוע, מלבן, משולש, מדידות, שטח והיקף, עיגול, מעגל, קוטר, גיאומטרית המרחב, הנדסת המרחב, פירמידה, פירמידה קטומה, מקצוע, נפח, בעיות מילוליות, בעית כמות, קירוב.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 5-11

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

מתמטיקה בימי הפרעונים

עטרה שריקי
"קשר חם" – המרכז הארצי למתמטיקה
shriki@tx.technion.ac.il

מבוא

יש בידנו מידע על התפתחות התרבות במצרים העתיקה כבר בשנת 4000 לפנה"ס. בערך בשנת 2500 לפנה"ס נבנו הפירמידות. המצרים בעת העתיקה פיתחו שני סוגי כתב: הכתב ההירוגליפי – הוא כתב החרטומים, בו כל סימן הוא תמונה של עצם מסוים והכתב היראטי שהוא פישוט של הכתב ההירוגליפי. הכתיבה התפתחה מחקיקה באבן לכתיבה על פפירוס שיוצר מצמח הגומא הגדל על גדות הנילוס. בשנת 1799 מצאו קצינים של צבא נפוליאון את אבן הרוזטה, הנמצאת כיום במוזיאון הבריטי בלונדון, שהטכסט החקוק בה נכתב בשלושה כתבי יד: החלק העליון נכתב בכתב ההירוגליפי, החלק האמצעי בכתב היראטי והחלק התחתון ביוונית. כתיבת אותו התוכן בשלוש שפות יצרה את האפשרות לפענח את האלף-בית ההירוגליפי.

כתב הירוגליפי

המצרים השתמשו בכתב הירוגליפי גם לסימון מספרים, ואלה הם הסימנים:

I	II	III	IIII	III II	III III	IIII III	IIII IIII	IIIII IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

כל המספרים האחרים נכתבו באמצעות סימנים אלה. הכתיבה היתה בעיקר מימין לשמאל ולעיתים מלמעלה למטה. לדוגמא, המספר 23 נכתב באופן הבא: ∩∩III. כפי שניתן לראות, המצרים ספרו בבסיס 10, אך יחד עם זאת, לכל סימן היה ערך מספרי שאינו תלוי במיקומו בתוך המספר. זאת בניגוד לשיטה המקובלת כיום, בה הערך המספרי של כל ספרה תלוי במיקומה. לכן מספר הסימנים שנדרשו לכתיבת מספר כלשהו, לא היה תלוי בערך המספר.

בהתחשב בכך שבתקופה זו לא היו כלים וסימונים מתקדמים, ההישגים המתמטיים שאליהם הגיעו המצרים בתחומים שונים של המתמטיקה, מעוררים התפעלות, כפי שנראה בדוגמאות להלן.

פפירוסים מתמטיים

מעטים מהפפירוסים שנמצאו הכילו מידע על המתמטיקה המצרית.

מרבית המידע אודות המתמטיקה המצרית הקדומה התקבל מפפירוס מתמטי שנרכש על-ידי עורך דין סקוטי בשם רינד (1833-1863), אשר עבר לגור במצרים הלחה, בשל בעיות בריאות. בעת שהותו שם החל להתעניין באיג'יפטולוגיה. ב-1855 הגיע לת'אבס, אחת הערים המשגשגות במצרים הקדומה ליד הנילוס, שם מצא בחורבות בנין קטן שני כתבים עתיקים, האחד כתוב על גבי יריעת עור והשני על גבי פפירוס. הראשון מוכר בכינוי:

The Egyptian Mathematical Leather Role (EMLR)

והשני: Rhind Mathematical Papyrus (RMP).

שניהם הגיעו בשנת 1864 למוזיאון הבריטי בלונדון.

גודלו של ה- EMLR הוא בערך 30 סמ' על 50 סמ'. בשל מצבו השביר לא נגעו בו במשך 60 שנה. רק ב- 1927

הצליחו שני חוקרים לפתוח אותו, ומצאו בו 26 שורות של חישובים עם שברי יחידה (ר' סעיף 4). החישובים היו מועתקים פעמיים, מה שהקל על השחזור. יש הסבורים שחישובים אלה שימשו כטבלאות מוכנות (למרות שנמצאה בהם טעות אחת...). איג'יפטולוגים מייחסים חשיבות לזיהוי הטיפול הכימי שניתן ליריעת העור, יותר מאשר לגילוי התוכן המתמטי שבה. הציפיות היו רבות, בעיקר משום שהדברים נכתבו על חומר יקר ולא על פפירוס סתמי, אך התוכן המתמטי לא ענה עליהן.

פפירוס רינד

יחד עם זאת, הטבלה ב- EMLR שופכת אור על האריתמטיקה שמופיעה ב- RMP ובפפירוסים מתמטיים אחרים. ה- RMP נכתב בערך בשנת 1650 לפנה"ס. ה- RMP הוא מגילה באורך 5.6 מ' וברוחב 33 ס"מ בלבד, אשר בדרך נס, מרביתה השתמרה. הפפירוס עצמו כתוב בכתב ההיראטי.

חלק ניכר מהפפירוס של רינד, מכיל בעיות מתמטיות עם פתרונותיהן.

לפני הבעיות המתמטיות הכתובות על הפפירוס נכתב: "חשיבה מדוייקת – שער הכניסה לכל הדברים המרגשים ולכל הסודות הכמוסים".

פפירוסים נוספים המכילים תכנים מתמטיים פזורים ברחבי העולם במוזיאונים במוסקבה, ברלין, ועוד.

ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים

חיבור וחיסור

בפפירוסים המתמטיים שהגיעו לידינו מופיעות בעיות רבות שפתרונן דורש שימוש בכל ארבע פעולות החשבון הבסיסיות. מתוך הפפירוסים הללו קל להבין מה היתה השיטה בה השתמשו המצרים כדי לכפול ולחלק מספרים, אך אין כל רמז לדרך בה נהגו לחבר ולחסר מספרים טבעיים. נראה שכותבי הפפירוסים בדקו את נכונות התשובות במקום אחר, ורק לאחר מכן רשמו אותן על גבי הפפירוס עצמו. בפפירוסים כמעט ולא נמצאו שגיאות, מה שהעלה את הסברה שהיו למצרים טבלאות חיבור וחיסור מוכנות, מהן רק העתיקו את התשובות. היות ומעולם לא נמצאו טבלאות כאלה עבור מספרים טבעיים, הדברים נשארו בגדר השערה. יחד עם זאת, נמצאו עדויות לקיומן של טבלאות מוכנות עבור חיבור וחיסור של שברים.

כפל

בכתבים העוסקים בהיסטוריה של המתמטיקה מתוארת שיטת הכפל המצרי כ'מגושמת ומוזרה', כנראה בגלל השימוש בכתב ההירוגליפי בסימון מספרים. מהפפירוסים שנמצאו עולה שאחת השיטות המקובלות לביצוע כפל היתה 'חיבור חוזר'. בשיטה אחרת השתמשו בלוח כפל עם כפולות של 2 בלבד, כמודגם להלן:

$7 \cdot 13$

→ 1	13
→ 2	26
→ 4	52
7	91

$21 \cdot 22$

→ 1	22
2	44
→ 4	88
8	176
→16	352
21	462

האם תוכלו להסביר את שיטת הכפל המצרי?

חילוק

בדומה לפעולת החיסור, אותה ביססו על פעולת החיבור, כך גם את פעולת החילוק ביססו על פעולת הכפל. נדגים זאת בחישוב: $168 : 8$.

1	8←
2	16
4	32←
8	64
16	128←
21	168

האם תוכלו להסביר את שיטת החילוק המצרי?

פעולות בשברים

שברי יחידה

שיטת הסימון המצרית גרמה לכך שהמצרים השתמשו רק בשברי יחידה (שברים שהמונה שלהם הוא 1), ובשבר $\frac{2}{3}$. הסיבה לכך היא שהסימון עבור שבר היה באמצעות הסימון ההירוגליפי (פה פתוח) מעל למספר. כך למשל, המספר הוא השבר $\frac{1}{12}$.

כאשר החלו לכתוב בכתב ההיראטי, ה'פה הפתוח' הפך לנקודה, מעל לסימן המייצג את 10. לכן, ניתן היה לטעות ולחשוב שמדובר ב- $2+\frac{1}{10}$, היות ולמצרים לא היה סימון עבור פעולת החיבור . הם פשוט רשמו את המספרים זה ליד זה (כאשר רצו לחסר בין מספרים, כתבו, בכתב הירוגליפי או היראטי, את המילה המתאימה). כל שבר השונה מ- $\frac{2}{3}$, הוצג על-ידי המצרים כסכום של שברי יחידה. לדוגמא:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ ;\ \frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

המצרים, מתוך עניין, חיפשו ייצוג של שבר כסכום של שברי יחידה שונים זה מזה.

ברור שכל שבר $\frac{m}{n}$ ניתן להציג כסכום של m מחוברים שכל אחד מהם הוא $\frac{1}{n}$, אך אין בכך כל אתגר.

בשנת 1880 הציג המתמטיקאי סילבסטר הוכחה לכך שכל שבר בין 0 ל -1 ניתן להצגה כסכום של שברי יחידה שונים. נדגים זאת על ידי כתיבת השבר $\frac{2}{5}$ כסכום של שברי יחידה שונים.

שבר היחידה הקרוב לו ביותר, אך קטן ממנו, הוא $\frac{1}{3}$.

נחשב את ההפרש בין שניהם: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$.

מובן שלא תמיד יסתיים התהליך אחרי שלב אחד. לדוגמא, אם לא נתחיל את התהליך עם השבר $\frac{1}{3}$,

נקבל: $\frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}$.

כפי שצוין, השבר היחיד שאינו שבר יחידה שבו השתמשו המצרים היה השבר $\frac{2}{3}$. בכתב הירוגליפי נכתב שבר זה באמצעות ובכתב היראטי. סביר להניח שהיתה להם טבלה מוכנה, שבה היו רשומים שני שלישים של מספרים שונים (לא רק טבעיים, אלא גם של רציונליים חיוביים). מתוך פתרונותיהם לבעיות מתמטיות ניתן ללמוד שידעו, כנראה, טבלה זו בעל-פה, שכן כאשר נדרשו לחשב שליש מכמות, חישבו שני שלישים ממנה, ואחר-כך חילקו את התוצאה ב-2.

להלן כמה דוגמאות מתוך ה- EMLR הקשורות לשברי יחידה. התבוננו בדוגמאות הבאות:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}\quad ;\quad \frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=\frac{1}{16}\quad ;\quad \frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{21}+\frac{1}{42}=\frac{1}{14}\quad ;\quad \frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}\quad ;\quad \frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{48}+\frac{1}{96}=\frac{1}{32}\quad ;\quad \frac{1}{96}+\frac{1}{192}=\frac{1}{64}$$

- האם ניתן להצביע על חוקיות מסוימת שהיתה ידועה למצרים ? נסו להוכיח חוקיות זו.

בפפירוס נמצאו גם הדוגמאות הבאות:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$$

- האם תוכלו למצוא את הכלל המתאים לשני מקרים אלה ?
- האם תוכלו להרחיב את הכללים שמצאתם, עבור שברי יחידה נוספים ?

כפל וחילוק שברים

כפי שצוין לעיל, לצורך ביצוע פעולות כפל וחילוק של מספרים טבעיים, נעזרו המצרים בכפל ובחילוק מספרים ב-2. באופן דומה ביצעו פעולות של כפל וחילוק שברי יחידה.

בפפירוס רינד, מוצגת שיטה חכמה בה השתמשו המצרים לצורך פתרון בעיות מסויימות המתייחסות לכמויות. בעיות כאלה ניתן לפתור כיום באמצעות משוואות ממעלה ראשונה. השיטה בה נקטו המצרים מבוססת על ניחוש פתרון ובדיקתו. אגב, עד סוף המאה ה-19 שימשה השיטה המצרית של ניחוש פתרון ובדיקתו, בהוראת מתמטיקה בארה"ב.

נדגים את השיטה באמצעות בעיה מתוך פפירוס רינד.

בעיה 24 בפפירוס רינד:

כמות ועוד $\frac{1}{7}$ ממנה שווה ל-19. מהי הכמות?

מתחילים מכמות כלשהי, אשר מכפלתה בשבר היחידה היא 1. כלומר נתחיל מהמספר 7. במקרה זה $1\frac{1}{7}$ של 7 שווה 8. בכתיב שלנו: $7\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)=8$. המספר בו נצטרך לכפול את 8 כדי לקבל 19, הוא המספר בו יש לכפול את 7, ניחוש הפתרון, על מנת למצוא את הכמות המבוקשת.

לכן, בשלב הראשון נחלק את 19 ב- 8 ובשלב השני נכפול את המנה המתקבלת ב-7:

שלב ראשון

1	8
2	$16\leftarrow$
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	$2\leftarrow$
$\frac{1}{8}$	$1\leftarrow$
$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	19

שלב שני

$\rightarrow 1$	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
$\rightarrow 2$	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\rightarrow 4$	$9+\frac{1}{2}$
7	$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$

בכתיב שלנו, מתקבל: $19=\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$

בפפירוס רינד מופיעות עשר בעיות נוספות מסוג זה, ונראה שכותב הפפירוס הדגים בעיות דומות עם מספרים שונים כדי להציג גישה כללית לפתרון סוג זה של בעיות.

שורשים ריבועיים

בפפירוסים מופיעים לעיתים קרובות ריבועים של מספרים רציונאליים, אולם שורשים כמעט ואינם מופיעים. גם כאשר יש חישובים הדורשים הוצאת שורש ריבועי, הדרך לחישוב אינה מוצגת. סביר להניח שהיו למצרים טבלאות מוכנות של ריבועים של מספרים, בהן נעזרו לצורך מציאת שורשים ריבועיים כמודגם להלן בחישוב $\sqrt{40}$. בהנחה שקיימות טבלאות של ריבועי מספרים, הרי שיופיע בהן:

ריבוע המספר	מספר
$39+\frac{1}{16}$	$6+\frac{1}{4}$
$40+\frac{1}{9}$	$6+\frac{1}{3}$

כך ש- $\sqrt{40}$ נמצא בין $6+\frac{1}{3}$ לבין $6+\frac{1}{4}$, וקרוב יותר ל- $6+\frac{1}{3}$. אם קירוב זה איננו מספיק, אפשר להמשיך במציאת קירוב לשורש באמצעות כפל סטנדרטי.

היות והריבוע של $6+\frac{1}{3}$ גדול מ-40, והיות ומתקיים: $6+\frac{1}{3}=6+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$, הרי שצריך להוסיף ל- $6+\frac{1}{4}$ שבר יחידה הקטן מ- $\frac{1}{12}$. נבחר לדוגמא את $\frac{1}{16}$.

עתה יש למצוא את הריבוע של $6+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$.

1	6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$		
2	12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		
4	25	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$		
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$
$6+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$	38	$1+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{256}$
	39	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{256}$

בכמה השתפר הקירוב ?

משוואות ממעלה שנייה

המצרים פתרו בעיות שיש בהן משוואות ממעלה שנייה באמצעות שיטת הניחוש. שתי בעיות כאלה מופיעות בפפירוס הנקרא 'פפירוס ברלין'. פפירוס זה נכתב, בערך, בשנת 1800 לפנה"ס, חלקים נרחבים ממנו עוסקים בנושאים רפואיים[1], כלכליים וגיאוגרפים (למשל – גיאות ושפל של הנילוס). הפפירוס נרכש על-ידי ג'וזפה פסלקווה, ונמכר לפרדריק ווילהלם הרביעי, מלך פרוסיה, בשנת 1827, עבור מוזיאון ברלין.

'פפירוס ברלין' נמצא במצב לא טוב, ולכן במהלך שחזורו נתנו לו מספר פרשנויות. שתים מהבעיות המתמטיות המופיעות בו נפתרות כיום בקלות בעזרת מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, האחת ממעלה שנייה, והאחרת ממעלה ראשונה. להלן אחת הבעיות:

השטח של ריבוע הוא 100 יחידות שטח, והוא שווה לשטח של שני ריבועים קטנים יותר. הצלע של ריבוע קטן אחד היא $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ מהצלע של האחר. מהן הצלעות של כל אחד משני הריבועים הקטנים? (נא פתרו את הבעיה בעזרת מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים). הפתרון אותו הציע כותב הפפירוס נוסח באופן הבא:

תמיד קח ריבוע עם צלע 1. שטחו 1.

הצלע של האחר היא $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

הכפל זאת ב- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, וזה נותן $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$, השטח של הריבוע האחר.

יחד יש לשני הריבועים שטח של $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$.

מצא את השורש הריבועי של $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$.

זה $1+\frac{1}{4}$.

מצא את השורש הריבועי של 100. זה 10.

חלק 10 ב- $1+\frac{1}{4}$. זה נותן 8. הצלע של רבוע אחד.

ההמשך ניזוק, ולפי השחזור נראה כי כך היה:

קח $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ מ- 8. מתקבל 6 - מידת אורך הצלע של הריבוע האחר.

- האם תוכלו להסביר את הפתרון ?

בעיות גיאומטריות במישור

פפירוס מוסקבה נכתב עוד לפני פפירוס רינד (הערכה – 1850 לפנה"ס). בניגוד לפפירוס רינד, לא ידוע מי כתב אותו. הוא מכיל 25 בעיות מתמטיות ונמצא במוזיאון של מוסקבה. פפירוס זה נקרא גם פפירוס גולנישצ'ב, על שם האספן הרוסי שרכש אותו במחצית המאה ה-19. אורכו כאורך פפירוס רינד ורוחבו כרבע ממנו.

בעיות רבות בפפירוס זה עוסקות בחישובים של שטחי אדמה ושל נפחי כלים המשמשים לאכסון גרעינים. מתוך הכתבים עולה, שהמצרים הכירו את הנוסחא לחישוב שטח משולש (מחצית המכפלה של מידת אורך צלע במידת האורך של הגובה לאותה צלע). בנוסף, ידעו למצוא שטח מלבן באמצעות הכפלת מידת האורך במידת הרוחב, כפי שמקובל כיום. לדוגמא, בבעיה 49 ב-RMP נתון מלבן שאורכו 1000 אמות[2] ורוחבו 100 אמות, ומחפשים את שטחו. בבעיה 51 בפפירוס זה מוצאים שטח של משולש לפי מידות נתונות.

בבעיות העוסקות בחישוב שטח של עיגול, מתבצע החישוב על-ידי כך שמחסרים תשיעית מאורך הקוטר ומעלים בריבוע את מה שנשאר.

נדגים זאת באמצעות מעגל שמידת קוטרו היא 9 יחידות אורך. חישוב שטח העיגול בשיטות המקובלות כיום יתן: $\pi r^2 = \pi \cdot 4.5^2 = 63.61725...$

שטח העיגול על-פי השיטה המצרית יתקבל באופן הבא: נחסיר תשיעית מאורך הקוטר, ונקבל 8. נעלה את 8 בריבוע, ונקבל 64. שטח העיגול שמידת קוטרו 9 יחידות אורך, הוא 64 יחידות שטח.

בהינתן שקוטר המעגל הוא d, מהו שטח העיגול, בהתאם להנחיות אלו?

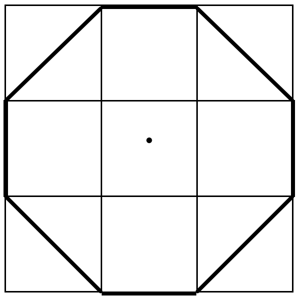
באיזה קירוב של π השתמשו המצרים ?

בעיה 48 ב-RMP גם היא עוסקת במציאת שטח של עיגול. בעיה זו הינה ייחודית בין 87 הבעיות שבפפירוס בכך שהצעה לפתרון ניתנה בה באמצעות איור הגיאומטרי, המופיע להלן, ולא באופן מילולי:

---

[1] בפפירוס זה מוזכר לראשונה מבחן לבדיקת הריון – "מבחן השעורה והחיטה": "...האשה מוכרחה להרטיב את זה מדי יום עם השתן שלה...אם זה יגדל, היא בהריון. אם השעורה גדלה, היא תלד בן. אם החיטה גדלה, היא תלד בת. אם שום דבר לא גדל, היא לא בהריון".

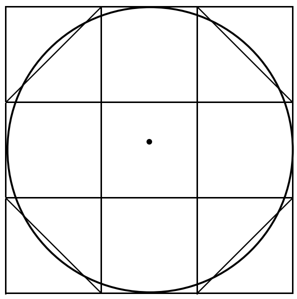
[2] 1 אמה שקולה ל- 0.485 מ'.



איור 1

מה ניתן להסיק מתוך האיור על המשמעות הגיאומטרית של חישוב שטח עיגול ?

אם נוסיף לשרטוט מעגל, כפי שמתואר באיור 2, ניתן להסיק שהכותב סבר ששטח המתומן קרוב דיו לשטח המעגל המבוקש. כמה מ'חלקי המעגל' נמצאים מחוץ למתומן וכמה מהם נמצאים בתוך המתומן, ומתוך התבוננות בשרטוט, אכן נראה, כי שני השטחים נראים מספיק קרובים.



איור 2

ננסח את הבעיה :

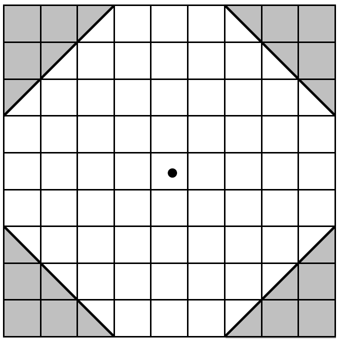
נתון עיגול שקוטרו d. שטח העיגול הוא כשטח המצולע בעל 8 צלעות המתקבל לאחר שמורידים את ארבעת המשולשים שווי השוקיים ה'פינתיים' של ריבוע בעל צלע d, כך שכל שוק של המשולש היא שליש מצלע הריבוע.

בדקו את שטחו של המעגל כאשר אורך צלע הריבוע הוא 9.

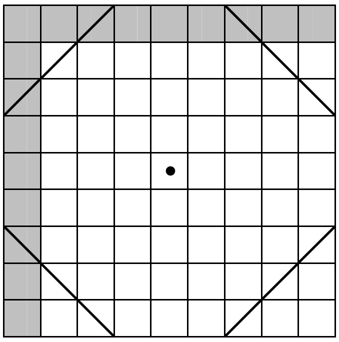
באיזה קירוב של π השתמשו המצרים במקרה זה?

איור 3 מציג את איור 2 בדרך שונה. נחלק כל אחת מהמשבצות לתשעה ריבועים זהים. מתוך איור 3א ניתן לראות שכדי לקבל את שטח המתומן יש להוריד מכל 'פינה' של הריבוע הנתון שלושה ריבועים קטנים שלמים ושלושה חצאי ריבועים (כלומר ארבעה וחצי ריבועים).

ובסך-הכל מארבע הפינות יש להוריד 18 ריבועים קטנים. באיור 3ב מוצגים הריבועים הקטנים שאותם יש להוריד במיקום שונה. הריבוע הקטן השמאלי-עליון צבוע פעמיים, אך ניתן להזניח קירוב זה.



איור 3א



איור 3ב

מכאן ניתן לראות בקלות ששטח עיגול שמידת קוטרו 9 יחידות אורך (חסום בריבוע שמידת אורך צלעו 9 יחידות), קרוב לשטח ריבוע שמידת אורך צלעו 8 יחידות (האם הצליחו המצרים לתרבע את המעגל?!...).

בנוסף לפפירוסים, ניתן היה ללמוד על המתמטיקה המצרית מתוך ציורי קיר. באחד המקדשים במצרים נמצאו על הקירות חישובים של שטחי שדות שצורתם מרובעת שהיו מיועדים כמתנה לאלים, כדוגמת הבעיה הבאה (בסימון של ימינו) :

נתון שדה מרובע. נסמן את אורכי צלעותיו ב- a, b, c, d (לפי הסדר). על מנת לגבות מיסים, חישב גובה המיסים את שטח השדה לפי הנוסחא הבאה :

$$S = \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}$$

האם נוסחא זו נכונה לכל מרובע ?

בדקו עבור מרובעים שונים האם בשל שיטת החישוב גובה המיסים: הפסיד כסף? הרוויח ? קיבל את המגיע לו?

בעיות גיאומטריות במרחב

פירמידות

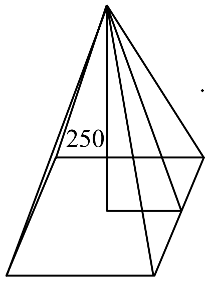
הפפירוסים והכתבים המצריים הקדומים כמעט ואינם מספקים מידע לגבי תכונות גיאומטריות ואריתמטיות של המבנים המפורסמים ביותר בעולם העתיק – הפירמידות הישרות (כידוע, הפירמידות היו ריבועיות). כל מה שידוע כיום הוא שהמצרים ידעו לחשב את :

1. שיפוע המקצוע של הפירמידה ביחס לבסיסה
2. נפח של פירמידה קטומה
3. נפח של פירמידה

על הידע שלהם לחישוב נפח פירמידה, ניתן ללמוד מהדרך בה הציגו חישובים של נפח של פירמידה קטומה (בעיה 14 בפפירוס מוסקבה). כל שאר המידע שלנו כיום לקוח מתוך בעיות 56,57,58,59,60 בפפירוס רינד. הבעיות הללו פשוטות ועוסקות בשיפועי מקצועות של פירמידה ישרה, ובזווית בין פאה לבין בסיס.

להלן בעיה 56, העוסקת בשיפוע של מקצוע של פירמידה (בתרגום המידות למטרים. בסוגריים נתונות המידות המצריות המקוריות). הנתונים היו של מידות הגובה 130.76 (250) וצלע הבסיס 188.36 (360) של הפירמידה, מבלי שנשאלה כל שאלה.

הפתרון המוצע בפפירוס לצורך מציאת שיפוע הצלע הוא הפתרון הבא :



מצא $\frac{1}{2}$ מ- 360. זה 180.

חלק את 180 ב- 250, זה $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$.

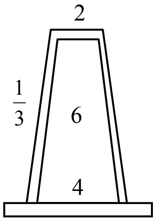
מה מצאו המצרים בחישוב זה ?

יש לזכור שעל מנת לקבל אותו שיפוע עבור כל אבן ואבן, היה על המצרים לשמר בקפדנות יחסים אלה. סביר להניח שבשל גודלן של הפירמידות, העבודה התבצעה בו זמנית מכיוונים שונים, והיה צורך להבטיח שבסופו של דבר תיפגשנה כל פאות הפירמידה בקודקוד משותף.

הבעיות האחרות בנושא זה דומות, למעט בעיה 57, בה נדרש למצוא את הגובה.

פירמידות קטומות

הבעיה היחידה שאיננה ב-RMP ועוסקת בפירמידות, היא בעיה 14 בפפירוס מוסקבה. מפתרון בעיה זו ניתן לראות שלמצרים היתה שיטה סטנדרטית למציאת הנפח של פירמידה קטומה :



השרטוט הנלווה לבעיה 14, כפי שהופיע בפפירוס

גובהה של פירמידה 6 [יחידות מידה] בסיסה התחתון 4 [יחידות מידה] והעליון-2. את ה-4 הזה, תעלה בריבוע. התוצאה 16. תכפיל 2 ב-4 הזה. התוצאה 8. את ה-2 הזה, תעלה בריבוע. התוצאה 4. תוסיף ל-16 את ה-8 הזה ואת ה-4 הזה. התוצאה 28. מצא $\frac{1}{3}$ של 6.

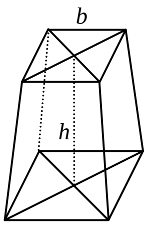
התוצאה 2.

חשב פעמיים 28. התוצאה 56.

$$V(4^2+2\cdot 4+2^2)\cdot\frac{1}{3}\cdot 6=(16+8+4)\cdot\frac{1}{3}\cdot 6=28\cdot 2=56$$

אם נחליף את הנתונים בסימון כללי : a צלע הבסיס התחתון, b צלע הבסיס העליון, h גובה הפירמידה, נקבל:

$$V=(a\cdot a+b\cdot a+b\cdot b)\cdot\frac{1}{3}\cdot h=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$



האם נכונה הנוסחא אותה הציעו המצרים לחישוב נפח של פירמידה קטומה?

סיכום

במאמר הוצג חלק קטן מתוך הידע המתמטי שהיה נחלתם של מי שחיו במצרים העתיקה. מתוך הפפירוסים ניתן ללמוד שהחישובים המתמטיים שימשו את המצרים הן לצרכים פרקטיים והן לצורך שעשוע אינטלקטואלי. בהתחשב באמצעים שעמדו לרשותם, לא נותר לנו אלא להתפעל ולהתפעם נוכח היכולת המתמטית המופלאה שהפגינו.

רשימת מקורות

אביטל ש. (תשכ״ט) : *שברים מצריים – שברי יחידה*, גיליונות לחשבון 16,17 (מתוך אתר האינטרנט של ״קשר חס״).

דוזורציב י., ויניצקי ג., קופר א. (1997) : *תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה*, הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל

קאשי מ. (1995) : *מתמטיקה מצרית*, סדנאות מטעם ״קשר חס״ למרכזי המקצוע מתמטיקה (מתוך אתר האינטרנט של ״קשר חס״).

Gillings R. J. (1972): Mathematics in the time of the Pharaohs, Dover Publications, Insc, N.Y.