הנושא: האם יש פה סתירה?
- המשך סיפור -

הוכן ע"י: מיכאל בלאוסוב.

תקציר: המאמר הנו המשך למאמר: 'האם יש פה סתירה?' שהופיע בגיליון הקודם (32) של על"ה. המאמר המקורי מטפל בקונפליקט הנוצר מהצעה של שני פתרונות שונים למשוואה מעריכית. הצורך בהמשך נבע משתי סיבות: במאמר נפלה טעות באחד מהשיקולים המתמטיים; טעות זו הובילה לתגובה מעניינת, של אחד הקוראים. במאמר המשך זה מובא תיקון לטעות, והתייחסות לתגובתו של הקורא, המחדדת את המסר של המאמר המקורי.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, מספרים ופעולות, חזקות ושורשים, פסוק אמת, קבוצות מספרים, מספרים אי רציונליים, אלגברה, משוואה מעריכית, פונקציה מעריכית, פונקציה חד- חד ערכית, פונקציה קמורה, תכונות פונקציה, פונקציה הפוכה, סדרות, טורים, טורים אינסופיים, אינדוקציה מתמטית, הגדרה, פרדוקסים, גבול, הוכחה, סתירה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 72-68

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

קוראים וכותבים

האם יש פה סתירה?
- המשך סיפור -

מיכאל בלאוסוב
מכון אקדמי טכנולוגי, חולון
ביה"ס ע"ש בליך, רמת-גן
belousov@nonstop.net.il

המאמר 'האם יש פה סתירה?' שהתפרסם בגיליון 32 של עלי"ה עסק בפתרון קונפליקט שנוצר מניסיון לפתור את המשוואות: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ (1) ו- $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4$ (2). המאמר הכיל גם הוכחה מוטעית. ההוכחה הנכונה מופיעה בגרסה האלקטרונית של העיתון של קשר חם: http://kesher-cham.technion.ac.il

עד לפרסום ההוכחה המתוקנת באתר היתה בידי הקוראים רק הגרסה השגויה של המאמר. גרסה שהולידה תגובה מנומקת של אחד הקוראים. אלא שההוכחה המתוקנת שהציע הקורא גם היא היתה שגויה, והולידה אצלי קונפליקט נוסף. מציאת הטעות בהוכחתו אינה עניין של מה בכך. ברצוני להזמין אתכם הקוראים למשימה זו, היות ולעניות דעתי, דווקא טעות זו מאירה ומדגישה את המסר העיקרי שרציתי למסור במאמרי 'האם יש פה סתירה'. כדי שתוכלו לעשות זאת, הרי לפניכם תזכורת.

תזכורת

במאמר 'האם יש פה סתירה?' התבוננו בשתי המשוואות הבאות:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2 \quad (1) \qquad \text{ו-} \qquad x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4 \quad (2)$$

קיבלנו כי $x=\sqrt{2}$ הוא פתרון משותף להן, ועוררנו קונפליקט: האם ייתכן שלשתי משוואות בעלות אותו אגף שמאלי ואגפים ימניים שונים זה מזה יהיה אותו פתרון? האם ייתכן שפונקציה אחת: $f(x)=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ תקבל שני ערכים שונים (2 ו- 4) עבור אותו ערך של x $(\sqrt{2})$?

אפשר להסביר את הקונפליקט בשני אופנים:

א. טעות שעשינו בדרך הפתרון

או

ב. טעות שעשינו בפרוש המושגים – אולי שייכנו בטעות תכונות של פונקציה לביטוי: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

על-פי הכתוב במאמר ההסבר לקונפליקט תלוי למעשה בהגדרת הביטוי $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

אם מגדירים את הביטוי $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ כפתרון y של המשוואה $x^y=y$ אזי עבור אותו ערך של x הביטוי $x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ יכול לקבל שני ערכים שונים זה מזה. אין שום סתירה בכך שלמשוואה יש שני פתרונות או אף יותר.

עבור $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ המוגדר כפתרון y של המשוואה $x^y=y$ אין שום קונפליקט בכך שלמשוואות (1) ו- (2) יש אותו פתרון $x=\sqrt{2}$ מכיוון שלמשוואה $\sqrt{2}^y=y$ יש שני פתרונות: $y_2=4, y_1=2$.

אם מגדירים את הביטוי $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ כגבול $\lim_{n\to\infty}\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$ שבו x מופיע n פעמים, אזי הביטוי לא יכול לקבל שני ערכים שונים עבור אותו ערך של x.

לכן לפחות לאחת המשוואות (1) ו-(2) אין אף פתרון.

אזכיר כי את משוואה (1) פתרתי בעזרת המשוואה:

$$(3)\quad x^2=2$$

ואת משוואה (2) פתרתי בעזרת המשוואה:

$$(4)\quad x^4=4$$

אך מכך שמשוואה (3) נובעת ממשוואה (1) לא נובע בהכרח שהפתרון החיובי שלה הוא הפתרון של משוואה (1). גם מכך שמשוואה (4) נובעת ממשוואה (2) לא נובע בהכרח שהפתרון החיובי שלה הוא הפתרון של משוואה (2).

הטעות שנכתבה בגיליון המודפס של על"ה 32:

רצינו לבדוק האם המספר $\sqrt{2}$ יכול להיות פתרון לכל אחת מהמשוואות (1) או (2). סימננו את הביטוי: $\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}}}_{n}$ שבו המספר $\sqrt{2}$ מופיע n פעמים ב- a_n.

רצינו לבדוק האם לביטוי זה קיים גבול, ואם כן למצוא את ערכו. ברור כי אם ערכו של הגבול הוא 2, אזי המספר $\sqrt{2}$ הוא פתרון של משוואה (1), ואם ערכו של הגבול הוא 4, אזי $\sqrt{2}$ הוא פתרון של משוואה (2). אך בודאי לא ייתכן כי $\sqrt{2}$ הוא פתרון של שתי המשוואות הללו. כמו כן ברור כי אם לביטוי הנ"ל יש גבול אינסופי, אזי לאף אחת מהמשוואות (1) או (2) אין פתרון. ואכן:

נכתבה הטענה לפיה לכל n טבעי מתקיים: $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\sqrt{2}$.

מטענה זו נובע כי לביטוי הנ"ל יש גבול אינסופי, ומכך נובעת המסקנה השגויה, כי לשתי המשוואות (1) ו-(2) אין אף פתרון.

אך למעשה טענה זו ניתנה ללא הוכחה והיא אינה נכונה.

בגרסת האתר של המאמר מופיעה הוכחה מפורטת לכך שאם נגדיר את הביטוי $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ כגבול $\lim_{n\to\infty}\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$ אזי למשוואה (1) יש פתרון. ערך הפתרון הוא $\sqrt{2}$ היות ו- $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}}}_{n}=2$. במצב זה כמובן למשוואה (2) אין פתרון.

ההוכחה המפורטת לטענה האחרונה מופיעה בנספח למאמר זה.

הוכחה וקונפליקט נוסף

נעבור להוכחתו של הקורא:

נתבונן בפונקציה: $(R1)\quad y=\lim_{n\to\infty}\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$

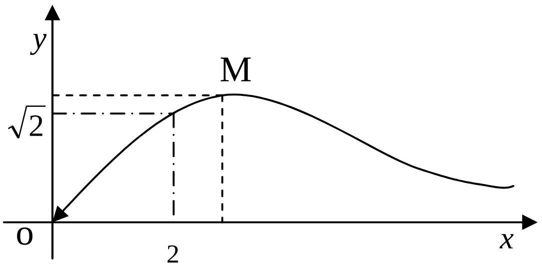
כיוון שמספר ה-x–ים הוא אינסופי אפשר לרשום:

$$(R2)\quad y=x^y$$

מכאן: $x=y^{\frac{1}{y}}$ ולכן הפונקציה ההפוכה לפונקציה (R1) היא: $(R3)\quad y=x^{\frac{1}{x}}$

בתחום הקיום של הפונקציה ההפוכה!

באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה (R3):



הנקודה $M(e,e^{\frac{1}{e}})$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה (R3). ברור שהפונקציה ההפוכה ל-(R3) (הפונקציה (R1)) קיימת אך ורק כאשר $0<x\le e^{\frac{1}{e}}$ והטווח של הפונקציה (R1) הוא: $e\ge y>0$.

<u>כידוע</u>, למשוואה:

$$(R4)\quad x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$$

יש פתרון אחד ויחיד והוא $x=\sqrt{2}$. התוצאה הזו מתאימה לתחומים הנ"ל!

<u>ברור אם כן מאליו</u> כי למשוואה: $(R5)\quad x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4$ אין ולא יכול להיות פתרון, כיוון ש- $4>e$!

לכן אסור בהחלט לנסות לפתור אותה בדומה למשוואה (R4)!

אם נסמן: $a_n = \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$ (כאן x מופיע פעמים)

אזי הסדרה: $(an)_{n=1}^{\infty}$ תתכנס בתחום $0 < x \le e^{\frac{1}{e}}$ והערך המקסימלי של a_n יהיה e! למשוואה (R4) יש, אם כן, פתרון $x = \sqrt{2}$ ולמשוואה (R5) אין פתרון, כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא יכולה להתכנס ל-4 עבור אף ערך של x!"

והרי תגובתי:

ראשית, אני מודה לקורא ששלח את הוכחתו. העיסוק בעניין העמיק את הבנתי באשר לחשיבות העיסוק בקונפליקטים. ברצוני להעיר, שקונפליקטים המוצגים במהלך הוראה, מכילים באופן מכוון תהליכי מחשבה שגויים. יצירת הקונפליקט מזמנת ללומד את האפשרות להתייחס לשגיאות אלה, שהן בדרך כלל נחבאות מן העין, ונובעות מתהליך שגרתי בעשייה המתמטית. ניתוח מצב הבעיה ותהליך הפתרון השגוי מולידים הבנה שלמה יותר של המושגים המתמטיים. מדברים אלה עולָה מייד התנגדותי לטענת הקורא כי *"אסור לנסות לפתור את המשוואה* (2)". הרי עצם הניסיון לפתור אותה יצר את הקונפליקט והעמיק את הבנתנו באשר לצורך בהגדרה מדויקת של מושגים, במקרה שלנו, ההתייחסות היא לביטוי: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$. בהארה זו, של חשיבות העיסוק בקונפליקטים אני רואה את הערך המוסף של הטעות שקרתה בסוף המאמר.

ומה עוד? כיצד נפתור את הקונפליקט שנוצר כעת? היכן הטעות בהוכחה של הקורא?

נשים לב כי לפי הוכחה זו הביטוי: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ מוגדר בעזרת הגבול: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$. אך אין באף אחד משלבי ההוכחה כל התייחסות למושג הגבול. בהוכחה המוצעת על-ידי הקורא יש התייחסות למושג הפונקציה ההפוכה ולעובדה שערך הפונקציה (R1) בנקודה x הוא פתרון של משוואה (R2).

קל לראות, כי אם נציב $x = \sqrt{2}$ ב- (R2), אזי גם עבור $y = 2$ וגם עבור $y = 4$ נקבל פסוק אמת, ואי-אפשר להתכחש לכך[1]. מכאן אפשר להסיק כי עבור $x = \sqrt{2}$ למשוואה (R2) יש לפחות שני פתרונות: $y_1 = 2$, $y_2 = 4$ (במאמר 'האם יש פה סתירה' הוכח שאת המילה 'לפחות' במשפט האחרון אפשר להחליף במילה 'בדיוק'). לכן ההתאמה המוגדרת בעזרת המשוואה (R2) (מבלי להשתמש בתכונות נוספות) היא התאמה שאינה חד ערכית. כאשר הופכים התאמה זו מגיעים לְפונקציה, כלומר להתאמה חד-ערכית שאינה חד-חד ערכית. ואכן קל לראות שאם נציב $y = \sqrt{2}$ ב- (R3) אזי גם עבור $x = 2$ וגם עבור $x = 4$ נקבל פסוק אמת בהתאם לפסוקי האמת הנ"ל. המצב מוכר לנו מטיפול בפונקציה: $f(x) = x^2$. זוהי פונקציה שאינה חד-חד ערכית. כדי שנוכל להגדיר פונקציה הפוכה לה, עלינו להתייחס לתחום חלקי שלה בו היא חד-חד ערכית ורק אז, ההיפוך ייתן פונקציה, כלומר התאמה חד-ערכית. אך אין אנו חייבים להתבונן אך ורק בתחום בו $x \ge 0$. זוהי רק אחת מהאפשרויות. האפשרות השניה היא להתבונן בתחום בו $x \le 0$. במקרה הראשון $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ואילו במקרה השני $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

באופן דומה כדי שניתן יהיה להגדיר פונקציה הפוכה לפונקציה $y = x^{\frac{1}{x}}$ יש בידנו אפשרות התייחסות לשני תחומים. כך נוכל ליצור שתי פונקציות הפוכות ולא רק אחת:

א) האפשרות הראשונה היא להתבונן בתחום $0 < x \le e$ (מקרה זה הופיע בהוכחתו של הקורא),

ב) האפשרות השנייה היא להתבונן בתחום $x \ge e$.

במקרה בו מתבוננים בפונקציה החד-חד ערכית: $y = x^{\frac{1}{x}}$ בתחום: $0 < x \le e$ מתקיים: $0 < y \le e^{\frac{1}{e}}$, מקבלים את הפונקציה ההפוכה שהיא כמובן רק אחת משתי הפונקציות החד ערכיות המוגדרות באמצעות שוויון (R2).

[1] כדאי כאן להזכיר את הויכוח הישן באשר לפתרון משואה מעריכית כמו: $(x-3)^{|x|} = (x-3)^2$. אם מתייחסים אל כל אחד מאגפי המשוואה כאל פונקציה, הרי שיש להגביל את קבוצת הפתרונות בתחום: $x > 3$ ואז יתקבל רק הפתרון: $x = 4$, עבור בסיס השווה לאחד. אולם ראוי להתייחס גם לעובדה שהצבת הערכים: $2, -2, 3$ במקום x במשוואה נותנת גם היא פסוק אמת. ואז...הכל עניין של הגדרה!

את הפונקציה השניה מקבלים כהפוכה לפונקציה החד-חד ערכית: $y = x^{\frac{1}{x}}$ בתחום: $x \ge e$, בו מתקיים: $1 < y \le e^{\frac{1}{e}}$. – כאן אני משתמש ב-

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

בהוכחה שהוצעה על-ידי הקורא לא היתה התייחסות לפונקציה ההפוכה השנייה, לכן היא אינה נכונה. כי אם היתה התייחסות כזאת, הרי שהיה מקבל את המספר $\sqrt{2}$ גם כפתרון של המשוואה (R5) וקביעה זו היתה בסתירה להגדרת הביטוי: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

כגבול: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n}$

מהכתוב במאמר 'האם יש פה סתירה?' אפשר להבין מדוע בדרך 'האלגברית' ללא שימוש בתכונות של גבולות לא ניתן להוכיח שלמשוואה (R5) (היא משוואה (2)) אין פתרון.

נספח - הסיום המתוקן לדיון בקונפליקט

טענה: אם נגדיר את הביטוי: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

כגבול: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n}$, אזי המספר $\sqrt{2}$ הוא פתרון למשוואה (1) ולמשוואה (2) אין פתרון. במהלך ההוכחה נשתמש בתכונות של גבולות.

כפי שהוכח בשתי גרסאות המאמר 'האם יש פה סתירה?' אם למשוואה (1) יש פתרון אזי הוא שווה ל-$x = \sqrt{2}$ וטענה דומה נכונה גם למשוואה (2).

נסמן את הביטוי: $\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}}_{n}$ שבו המספר $\sqrt{2}$ כתוב n פעמים ב- a_n. אם קיים הגבול הסופי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ והוא שווה ל-y, אזי המספר y חייב לקיים את המשוואה $\sqrt{2}^{\,y} = y$.

הוכחנו במאמר 'האם יש פה סתירה?' כי למשוואה הזו יש שני פתרונות: $y_1 = 2, y_2 = 4$. אם נוכיח שהסדרה (a_n) עולה ולכל n טבעי $a_n < 2$ אזי נסיק כי קיים הגבול הסופי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le 2$. לפי הנאמר לעיל, אם קיים הגבול הסופי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ערכו יכול להיות שווה ל-2 או ל-4, אך בגלל החסימות ינבע כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

כלומר רק למשוואה (1) יש פתרון ואילו למשוואה (2) אין פתרון.

נוכיח שהסדרה (a_n) עולה באינדוקציה מתמטית:

בדיקה: עבור $n = 1$: $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2}^1 = a_1$. נניח כי עבור $n = k$ טבעי מסוים מתקיים $a_{k+1} > a_k$.

נוכיח כי מכך נובע שגם עבור העוקב לו $n = k+1$ מתקיים $a_{k+2} > a_{k+1}$. כיוון שלכל n טבעי $a_n > 0$ האי-שוויון $a_{k+2} > a_{k+1}$ שקול לאי-שוויון $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} > 1$.

ואמנם: על-פי הגדרת הסדרה: $a_{k+1} = \sqrt{2}^{a_k}$ ו- $a_{k+2} = \sqrt{2}^{a_{k+1}}$.

נובע מכאן: $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{\sqrt{2}^{a_{k+1}}}{\sqrt{2}^{a_k}} = \sqrt{2}^{a_{k+1}-a_k}$. אולם $\sqrt{2} > 1$ ולפי ההנחה $a_{k+1} - a_{k+}1 > 0$. לכן $\sqrt{2}^{a_{k+1}-a_k} > 1$. כלומר $\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} > 1$. מכאן, על-פי עקרון האינדוקציה המתמטית הוכח כי הסדרה (a_n) היא סדרה עולה.

נוכיח כעת (גם הפעם באינדוקציה מתמטית) כי הסדרה חסומה מלעיל על ידי המספר 2, כלומר: $a_n \le 2$ לכל n טבעי. למעשה, נוכיח טענה חזקה יותר: $a_n < 2$ לכל n טבעי.

בדיקה עבור $n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. נניח כי עבור $n = k$ טבעי מסוים מתקיים $a_k < 2$. נוכיח כי מכך נובע שגם עבור העוקב לו $n = k+1$ מתקיים $a_{k+1} < 2$. נשים לב כי: $\sqrt{2} > 1$. על-פי הנחתנו: $a_k < 2$ על כן $\sqrt{2}^{a_k} < \sqrt{2}^2 = 2$. על-פי הגדרת הסדרה: $a_{k+1} = \sqrt{2}^{a_k}$ לכן קיבלנו את הדרוש. כלומר, על-פי עקרון האינדוקציה המתמטית נובע שהסדרה (a_n) חסומה מלעיל על-ידי המספר 2. ובסך-הכל, כנאמר לעיל, רק השוויון:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}}}_{n}=2$$
מתקיים, ואילו השוויון:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}}}_{n}=4$$
אינו מתקיים. כלומר: רק למשוואה (1) יש פתרון ואילו למשוואה (2) אין פתרון.

הערת המערכת

הבעיה שהוצגה במאמר זה מוכרת ומקובל ליחס אותה למתמטיקאי השוויצרי ליאונרד אוילר (Leonard Euler, 1707-1783).

הקונפליקט מוצג גם בספר: 'אחד שווה אפס ועוד הפתעות מתמטיות' של נצה מובשוביץ הדר וג'ון ווב, המביא אוסף של פרדוקסים, הטעיות ואתגרי חשיבה במתמטיקה. שם מגדירים מייד בתחילת הדיון את משמעות הסימול: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ כגבול: $\lim_{n\to\infty}\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}_{n}$ ומסבירים כי פתרון הקונפליקט טמון בהנחה המוטעית כי לשתי המשוואות: $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ (1) ו- $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4$ (2) יש פתרון.