הנושא: **על גלגלים לא עגולים**

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: במאמר מוצגת חקירה מתמטית הדנה בשאלת הקיום של צורה חליפית יעילה לגלגל. בעזרת מעט מאד מתמטיקה והרבה שכל ישר מובילה אותנו המחברת לגלות, כצפוי, שהגלגל העגול הוא יחיד ומיוחד, אבל יש מקרים רבים בהם עדיף להשתמש בגלגלים לא עגולים.

מילות מפתח: כתב העת עלי"ה, עלי"ה 33, גלגל, הוכחות, הוכחה, חקירה, חקירה מתמטית, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מושגים, בניות, מקום גיאומטרי, מעגל, משולש, משולש שווה צלעות, משולש רולו, ריבוע, מחומש משוכלל, מצולע, רדיוס, מחוג, מרכז, רוחב, מרחק, עקום, עקום קעור, עקום קמור, מדידות, שטח, היקף, אינטואיציה, הגדרה.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 33, תשס"ה, עמודים, 62-67

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

בעיה לעניין

על גלגלים לא עגולים[1]

נצה מובשוביץ-הדר
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
nitsa@tx.technion.ac.il

פתח-דבר

הגלגל הוא אחת ההמצאות הקדומות והבסיסיות בתרבות האנושית. לא רק בכלי רכב למיניהם הגלגלים הם רכיב מרכזי. מטבעות ואסימונים, מכסים לסירים, תקליטים ותקליטורים, ואביזרים רבים אחרים, לכולם אותה צורה גלילית במידות שונות של היקף ועובי, כמתבקש מהצורך השימושי.

האם יש תחליף לצורה הבסיסית, המעגלית, של הגלגל? ככל שיקשה להאמין בכך – התשובה היא כן. האם המשולש הוא תחליף טוב? אולי הריבוע? המחומש? מצולע משוכלל אחר? - מסתבר שלא. ובכל זאת יש תחליף.

ואם אכן כך הוא – אולי יש יותר מתחליף אחד? – כמה יש?

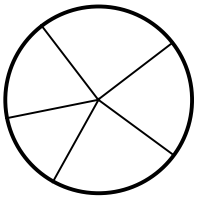
האם כל תחליף יעיל באותה מידה? ולמה צריך בכלל תחליף?

בעזרת מעט מאד מתמטיקה והרבה שכל ישר נגלה, כצפוי, שהגלגל העגול הוא יחיד ומיוחד, אבל יש מקרים רבים בהם עדיף להשתמש בגלגלים לא עגולים. זוהי עדות לכושר ההמצאה של האדם – במיטבו.

המעגל בעין בוחנת

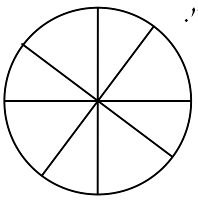
במתמטיקה מקובל לומר שהמעגל הוא המקום ההנדסי של הנקודות במישור שהמרחק מכל אחת מהן אל נקודה מסוימת באותו מישור הוא גודל קבוע. המשמעות של האמירה הזאת נגזרת מהמשמעות המקובלת של המילה 'מקום' בשפה הטבעית, כגורם הקובע סדר וארגון. אם אומרים, למשל, שבבית שלנו המקום של המסמרים הוא בקופסה הירוקה שבארגז הכלים, אז הסדר הטוב לו אנו מצפים הוא:

(א) שכל המסמרים יהיו באותה קופסה, (ב) שלא יהיה בקופסה שום דבר אחר פרט למסמרים. כלומר, כל דבר שאיננו מסמר איננו נמצא בקופסה, אלא במקום אחר מחוץ לקופסה, וכמו כן שאין מחוץ לקופסה אף לא מסמר אחד. יש לנו סיבה לכעוס אם יימצא בקופסה הזאת בורג למשל, או אם יימצא מסמר על הרצפה. כי הסדר הטוב מחייב שכל המסמרים יהיו בקופסה ורק הם יהיו בה. באופן דומה,



המשמעות של המעגל כמקום (הנדסי) של הנקודות שתכונתן היא שוויון המרחקים מנקודה מסוימת, היא (א) אם מחפשים במישור נקודות שמרחקן מאותה נקודה הוא גודל מסוים, מוצאים את כולן על מעגל אחד. (ב) אי-אפשר למצוא על אותו מעגל אף לא נקודה אחת שהמרחק ממנה אל הנקודה הקבועה, שונה מהמרחק המסוים הזה. על המעגל נמצאות, אפוא, כל הנקודות במישור שהן בעלות התכונה הנזכרת ורק נקודות כאלה. לנקודה הקבועה נהוג לקרוא מרכז המעגל ולמרחק הקבוע – מחוג או בלע"ז רדיוס המעגל.

למעגל כקו עקום סגור יש עוד תכונה מעניינת. נסביר אותה על ידי דוגמה נוספת 'מהחיים'. אם מנסים להעביר שולחן עגול מחדר לחדר, דרך פתח הדלת, אפשר לעשות זאת רק אם רוחב הפתח מספיק, כלומר אם הוא לפחות כ'רוחב' השולחן העגול. מה זה 'רוחב' של עיגול? - המרחק בין שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל בדיוק זו מול זו משני צדי המרכז, הוא



[1] נכתב בעקבות הרצאה בכנס השנתי של המרכז הארצי **"קשר חם"** – **ל**קידום, **ש**יפור **ור**ענון **ה**חינוך **המ**תמטי בישראל, בפסח תשס"ב.

'הרוחב' של העיגול או הקוטר, כפי שנהוג לקרוא לו. המעגל הוא בעל 'רוחב קבוע', כלומר, בכל הכיוונים המרחק בין שתי נקודות הנמצאות על היקף המעגל בדיוק זו מול זו משני צידי המרכז הוא הקוטר. לשולחן מלבני אין רוחב אחיד. אם הרוחב של פתח הדלת יותר קטן מצידו הארוך של המלבן, צריך לסובב את השולחן המלבני ולנסות אם צידו הצר יעבור דרך הפתח. המלבן, האליפסה, המשולש ועקומים סגורים רבים אחרים אינם בעלי רוחב קבוע, אבל המעגל הוא *עקום בעל רוחב קבוע*.

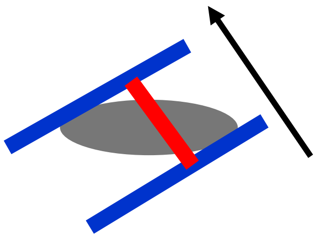
השאלות שנטפל בהן

כאמור, במאמר זה נטפל בשאלה – האם יש תחליף לצורה הבסיסית, המעגלית של הגלגל? לאור הדברים האחרונים, שאלה זו מובילה לשתי שאלות:

- האם המעגל כמקום (גיאומטרי) הוא יחיד?
- האם המעגל כעקום בעל רוחב קבוע הוא יחיד?

מה זה רוחב? – מאינטואיציה להגדרה

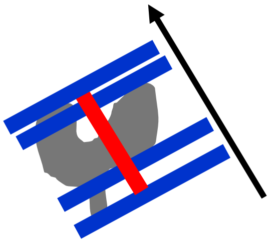
ההמחשה של העברת שולחן דרך פתח של דלת, אותה הבאנו לעיל כדי להבהיר את המשמעות של היות המעגל עקום בעל רוחב קבוע לעומת המלבן או האליפסה, גם אם היא מסברת את האוזן, איננה יכולה לשמש כדי לשפוט האם עקום סגור זה או אחר הוא בעל רוחב קבוע. לצורך זה נחוצה הגדרה יותר מהוקצעת. כבר ראינו שהרוחב תלוי בכיוון. ובכן, איך נגדיר את הרוחב של עקום סגור במישור?



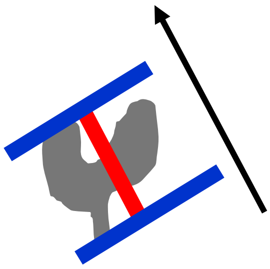
נתחיל בעקום קמור.[2] הרוחב של עקום, בכיוון מסוים (!), הוא המרחק בין שני משיקים לעקום, אשר ניצבים לכיוון הנתון (הם מקבילים ביניהם) ולכן המרחק ביניהם הוא אורך הקטע הניצב לשניהם). כאמור, חשוב לשים לב לכך שהגדרת הרוחב מותנית בכיוון.

ההגדרה שלעיל הולמת עקום קמור, כי לעקום סגור קמור יש, בכל כיוון, בדיוק שני משיקים שניצבים לכיוון הנתון, והמרחק ביניהם הוא גודל אחד ויחיד הקובע את הרוחב באותו כיוון.

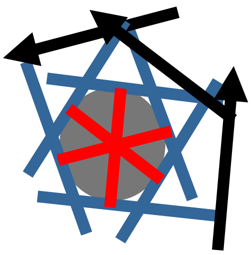
אבל לעקום קעור יכולים להיות יותר משני משיקים שונים הניצבים לכיוון אחד מסוים.



עלינו לתקן, אם כך, את ההגדרה, כדי שתחול גם על עקומים קעורים. לצורך זה נחליף את המשיקים ב'קווים תומכים'. קו תומך הוא קו שיש לו בדיוק נקודה אחת משותפת עם העקום, כלומר, כל יתר הנקודות שלו הן מחוץ לעקום! מכאן שכל קו תומך הוא משיק, אבל לא כל משיק הוא גם קו תומך. משיק וקו תומך הם מושגים מתלכדים כשמדובר בעקום סגור קמור, אבל לא כשמדובר בעקום סגור קעור. נחליף איפוא בהגדרת הרוחב של עקום, את המילה: משיקים במלים: קווים תומכים, ואז היא תחול גם על עקומים קעורים: *הרוחב של עקום (קמור או קעור) בכיוון מסוים הוא המרחק בין שני קווים תומכים בעקום שניצבים לכיוון הנתון*.



אם נבדוק את הרוחב של המעגל לפי ההגדרה הזאת, נראה שההגדרה מתלכדת עם ההסבר האינטואיטיבי שניתן קודם. בכל כיוון שנבחר הרוחב הוא הקוטר, והמעגל הוא עקום (קמור) בעל רוחב קבוע.



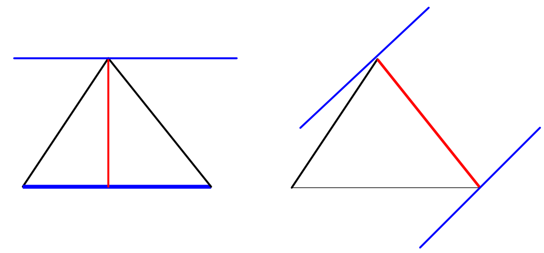
המעגל הוא אפוא עקום 'שווה רוחב'. בכל הכיוונים במישור יש לו אותו רוחב. המרחק בין שני קווים תומכים בכל כיוון הוא אותו מרחק, הקוטר של המעגל.

עתה נחזור אל השאלות היסודיות ששאלנו –

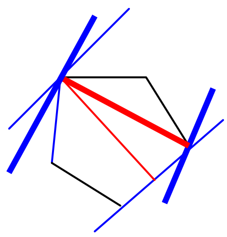
האם יש עוד עקומים שווי-רוחב או שהמעגל הוא היחיד?

[2] על קו עקום סגור אומרים שהוא קמור אם"ם הקטע המחבר כל שתי נקודות שלו נמצא בשלמותו בתוך העקום. אם יש זוג של נקודות שפה (נקודות על הקו העקום) שהקטע המחבר אותן נמצא ולו רק בחלקו מחוץ לעקום, העקום נקרא קעור.

נבדוק תחילה האם בין המצולעים קיים אחד שהוא שווה-רוחב. אם בכלל יש כזה, הרי ברור שהוא חייב להיות משוכלל (שווה-צלעות ושווה זוויות), שהרי מצולע שאיננו משוכלל בודאי שאיננו שווה-רוחב. מבין המשוכללים – האם משולש שווה-צלעות הוא עקום שווה-רוחב? – קל לראות שלא. הרוחב בכיוון של כל אחת מהצלעות הוא הגובה מהקדקוד שממולה. ואילו הרוחב בכיוון שניצב לאחת הצלעות הוא כאורך הצלע. לכן הרוחב בכיוונים שונים אינו אותו רוחב.



האם הריבוע הוא עקום שווה רוחב? – ודאי שלא. הרי רוחבו בכיוון של זוג צלעות נגדיות שונה מרוחבו בכיוון האלכסון.

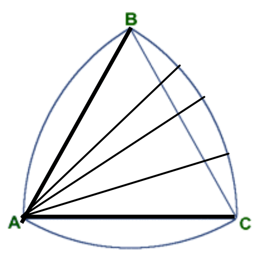


מה בנוגע למחומש משוכלל? או משושה משוכלל? אולי אחד מהם הוא שווה רוחב? לא קשה להשתכנע שאף אחד מהם איננו כזה, ובכלל אף מצולע משוכלל איננו עקום שווה רוחב שכן בכל אחד מהם אפשר למצוא לפחות שני כיוונים שבהם הרוחב איננו אותו רוחב. דרך אגב, מדוע מכסה של סיר, או להבדיל, מכסה של פתח הביוב הוא בדרך כלל עגול (ולא ריבוע או מצולע משוכלל אחר)? – האם מכסה עגול יכול ליפול פנימה? האם מכסה של פתח ריבועי יכול ליפול פנימה?

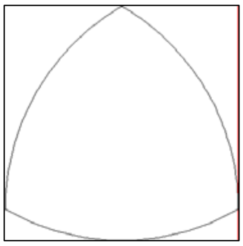
עד כה, לא כל כך הצלחנו לאתר קווים שווי-רוחב כמו המעגל. אנחנו נוטים להאמין שאין כאלה, לא כן?

ואף על פי כן...

נבנה משולש שווה צלעות ABC. מקדקוד A כמרכז נחוג קשת BC שמחוגה $AB = AC$ אח״כ, מקדקוד B כמרכז נחוג קשת CA שמחוגה אף הוא כאורך הצלע של המשולש.

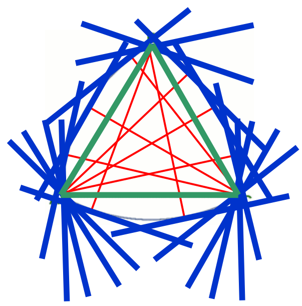


לבסוף מקדקוד C כמרכז נחוג קשת AB בעלת אותו מחוג.



בקיצור, על כל צלע של המשולש שווה הצלעות, נבנה קשת שמרכזה על הקדקוד שממול ומחוגה כאורך הצלע. מתקבל 'משולש-קשתות' ABC'. ל'משולש' זה קוראים משולש רולו Reuleaux Triangle.

משולש רולו הוא עקום שווה-רוחב, שכן על פי בנייתו בכל כיוון, המרחק בין שני קווים תומכים השייכים לאותו כיוון – מידתו כמידת המחוג של הקשת שאותה בנינו. (בשרטוט – המשיקים מסתירים את משולש רולו)

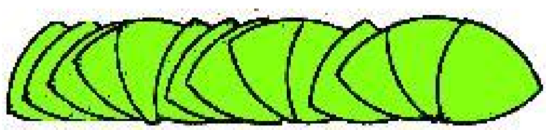


משולש רולו נקרא על שמו של פרנץ רולו

Franz Reuleaux (1829-1905) שהיה מהנדס ומתמטיקאי ולימד בבי״ס תיכון בברלין, בגרמניה: The Royal Technical High School.

הוא לא היה הראשון שחקר את העקום המעניין הזה. עוד בשנת 1778 המתמטיקאי השוויצרי הנודע ליאונרד אוילר (1707-1783) חקר עקומים שווי-רוחב.

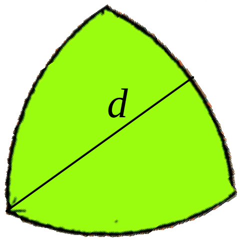
אם מגלגלים את משולש רולו לאורך קו ישר הקצה העליון שלו נוגע כל הזמן בקו המקביל המרוחק מהקו התחתון כרוחבו של משולש רולו.



נראה שמשולש רולו יכול אולי לשמש כתחליף לגלגל...

משולש רולו לעומת מעגל

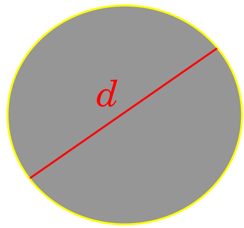
הבה נשווה את המעגל ואת משולש רולו שיש להם אותו רוחב d.



היקף $l = 3\frac{2\pi d}{6} = \pi d$

שטח $S = 3\frac{\pi d^2}{6} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d^2}{2}$

משולש רולו שרוחבו d



היקף $l = 2\pi\frac{d}{2} = \pi d$

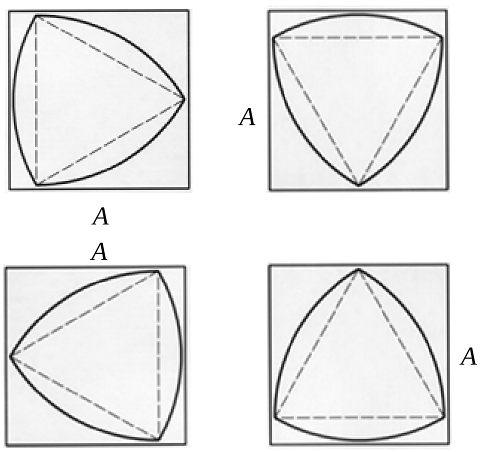
שטח $S = \frac{\pi d^2}{4}$

מעגל שרוחבו d

מסתבר שלשניהם אותו היקף אבל שטחו של המעגל גדול משטחו של משולש רולו. לפיכך השימוש במשולש רולו כתחליף למעגל עשוי להיות כלכלי יותר, כי הוא צורך פחות חומר גלם להפקתו ותופס פחות שטח.

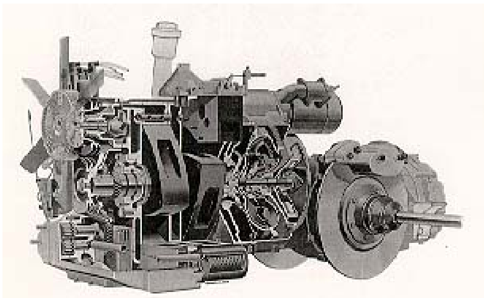
שימושים שונים במשולש רולו

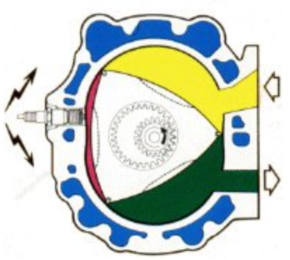
בשנת 1917 נרשם פטנט על מקדחה שקודחת חורים רבועים (!). הממציא הוא הרי וואטס Harry Watts. העקרון שעליו מושתתת המקדחה הוא משולש רולו. כאשר משולש רולו מסתובב 'במקום אחד' הוא כלוא בתוך ריבוע. נסו לתאר לכם את הצורה שיגלף סכין הצמוד לנקודה A הנה כך:



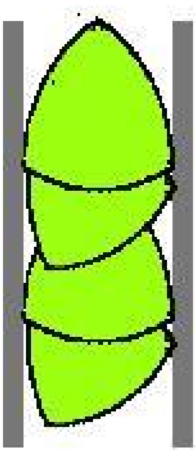
המנוע של וונקל

המנוע של וונקל Wankel נוסה ב-1960 ע"י פליכס היינריך וונקל (1902-1988)





ידית לקידום סרט הקולנוע במקרן המרת תנועה סיבובית לתנועה ליניארית עם הפסקות קצובות הודות לכך שהחלק המסתובב הוא משולש רולו (הדגמה).



האסימון: אסימון או מטבע בצורת משולש רולו יכולים לשמש להפעלת אוטומט שרגיש למגע בשני עברי הפתח אליו משלשלים את המטבע. – האם זה יעיל כמו העגול?

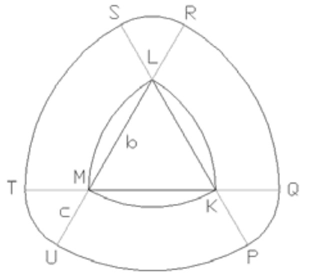
מסתבר שבעבר היה אסימון כזה בשימוש באיי בריטניה אבל האנגלים התלוננו על כך שהוא קורע את הכיסים...

'נשפץ' את משולש רולו

א פשר 'לעגל' את הפינות' של משולש רולו באופן הבא: בונים משולש שווה צלעות MLK.

מנקודה M כמרכז חגים קשת ברדיוס MR (יותר ארוך

מצלעו של המשולש שווה צלעות), עד שמגיעים לנקודה Q, בה הקשת חותכת את המשך הצלע MK.
מעבירים את עוקץ המחוגה לנקודה K וחוגים קשת ברדיוס KQ עד לנקודה P בה היא חותכת את המשך הצלע LK.



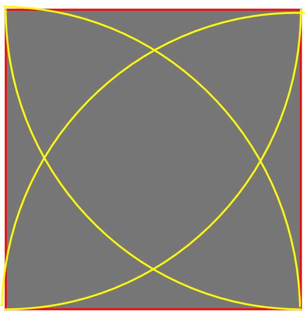
מנקודה L כמרכז חוגים קשת ברדיוס LP עד שמגיעים לנקודה U. בה הקשת חותכת את המשך הצלע LM. מעבירים את עוקץ המחוגה לנקודה M וחוגים קשת ברדיוס MU עד לנקודה T בה היא חותכת את המשך הצלע KM.

לבסוף, מנקודה K כמרכז חוגים קשת ברדיוס KT עד שמגיעים לנקודה S, בה הקשת חותכת את המשך הצלע LK. מעבירים את עוקץ המחוגה לנקודה L וחוגים קשת ברדיוס LS עד לנקודה R בה היא חותכת את המשך הצלע KM.

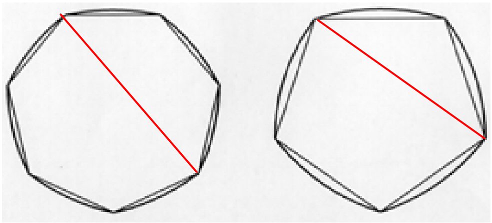
האם העקום המתקבל הוא עקום שווה רוחב?

האם משולש רולו הוא התחליף היחיד לגלגל גלילי?

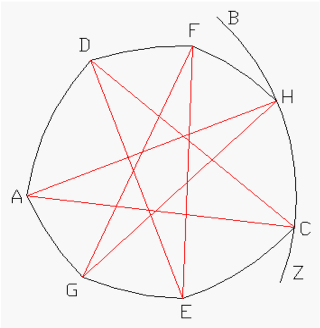
ננסה לבנות בנייה דומה למשולש רולו על ריבוע. האם מה שמתקבל הוא עקום שווה רוחב?
לא ממש, לא כן?
אבל על מחומש משוכלל כן מתקבל עקום שווה רוחב, ובעצם על כל מצולע משוכלל שמספר צלעותיו אי-זוגי, גם כן, – האם אתם רואים מדוע?



כך שבעצם קיימים עקומים סגורים שווי-רוחב, לא אחד ולא שניים אלא ללא ספור.



האם כולם בנויים על בסיס של מצולעים משוכללים או שמא יש גם אחרים? נבחן את הבנייה הבאה:



מנקודה A כמרכז נחוג קשת BZ במחוג כלשהו כרצוננו ונסמן עליה נקודות HC. מ- C כמרכז נחוג קשת AD באותו רדיוס, הנקודה D תיבחר באופן שרירותי. נשמור על אותו מחוג ונמשיך באופן דומה לחוג מ-D כמרכז קשת CE, מ-E קשת DF, מ-F קשת EG, מ-G קשת FH ולבסוף מ-H קשת GA. מה התקבל? – עקום בלתי רגולארי לחלוטין, אבל - שווה רוחב!!!

ובכן יש ויש תחליף לגלגל העגול (הגלילי) והרבה יותר מאחד. לפני שנעבור לשאלתנו הבאה (האם כל התחליפים יעילים במידה שווה?) נעמוד על שתי תוצאות מפתיעות למדי.

שתי תוצאות מפתיעות

- משפט ברביאר: (Barbier) ההיקף של כל העקומים שווי-הרוחב d הוא πd . ההוכחה מופיעה בספר:
Ross Honsberger (1970): Inginuity in Mathematics, *MAA New: Mathematical Library 23, pp.157-164*
- מבין כל העקומים שווי הרוחב d, משולש רולו הוא בעל השטח הקטן ביותר: בקירוב $0.704d^2$ והמעגל הוא בעל השטח הגדול ביותר: בקירוב $0.785\, d^2$.

ולמרות הכל – מדוע הגלגלים עגולים?

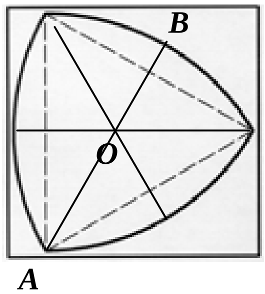
האם במשולש רולו יש נקודה הזכאית לשם 'מרכז' הגלגל?

המועמדת 'הטבעית' היא נקודת המפגש של הגבהים (חוצי הזוויות, התיכונים) של המשולש שווה הצלעות עליו נבנה משולש רולו, אבל כמסתבר:

$AO =$ בקירוב $0.577d$

$BO =$ בקירוב $0.423d$

ולכן אפילו היא לא יכולה להיות 'מרכז' הגלגל. אין במשולש רולו נקודה אחת שמרחקיה שווים מכל נקודות ההיקף שלו.



ייחודו של המעגל

המעגל הוא העקום שווה הרוחב היחיד שיש לו מרכז, אין אף עקום אחר שכל הנקודות עליו מרוחקות באותה מידה מנקודה קבועה במישור.

כמקום גיאומטרי הוא בעל התכונה שכל הנקודות שעליו מרחקן מנקודה אחת במישור קבוע ורק הנקודות שעליו הן בעלות תכונה זו. לפיכך, בעצם, לא קיים עקום סגור שהנקודות שעליו מהוות קבוצה חלקית של נקודות המעגל. אף כי קיימים עקומים סגורים רבים שהם שווי-רוחב, בסופו של דבר אין תחליף לגלגל המעגלי.

ומה הלאה...?

עקומים שווי-רוחב הם עקומים חסומים בריבוע. הם מתנועעים תוך השקה לארבע צלעותיו.

יש גם עקומים שחסומים במשולש שווה-צלעות. הם: מתנועעים תוך השקה לשלוש צלעותיו ונקראים עקומים שווי-גובה. עקום אחד כזה ראינו כשניסינו לבנות בניית רולו על ריבוע. פלח אחד מהשניים הנוצרים באופן זה, שתי קשתות מקדקודים נגדיים, מהווה עקום שווה-גובה – **צא ולמד...**