הנושא: סדרות, אינדוקציה ונוסחאות נסיגה
הזדמנות לקישוריות בין תחומים במתמטיקה, חלק ב׳

הוכן ע״י: חמוטל דוד.

תקציר: בחלק זה של המאמר מוצגות שתי בעיות המזמנות אפשרות קישור בין הנושאים הבאים: סדרות, נוסחאות נסיגה ואינדוקציה מתמטית, המופיעים בתכנית הלימודים במסגרת לימוד האלגברה. שתי הבעיות מוצגות בצירוף פתרון מלא, המאפשר דיון באפשרויות הקישור ובערכים מוספים, שניתן לשלב במהלך ההוראה. חלק מהדיון המופיע במאמר זה פורסם כ״בעיית חודש״ על-ידי המרכז הארצי ״קשר חם״ – לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי. הבעיה השניה עוסקת מעט גם בקומבינטוריקה.

מילות מפתח: כתב העת על״ה, על״ה 33, אלגברה, סדרות, סדרה הנדסית, סדרה כללית, סדרת הפרשים, איבר כללי, נוסחת נסיגה, אינדוקציה, אינדוקציה מתמטית, בעיות מילוליות, תבנית מספר, מספרים טבעיים, מספרים ופעולות, קומבינטוריקה, אלכסונים, אלכסונים במצולע, הוראת המתמטיקה, תפיסות מוטעות, השערה, הכללה, הוכחה, שיטת חקר.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 33, תשס״ה, עמודים, 56-61

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

חקירה מתמטית

סדרות, אינדוקציה ונוסחאות נסיגה
הזדמנות לקישוריות בין תחומים במתמטיקה
חלק ב

חמוטל דוד
"קשר חם" – המרכז הארצי למתמטיקה
hamutal@tx.technion.ac.il

רציונאל

בחלקו הראשון של המאמר, (עלייה 32) עמדנו על כך שתכנית הלימודים במתמטיקה של בית-הספר העל-יסודי מתפרשת על פני תחומים רבים ומגוונים של המתמטיקה, הנלמדים, לרוב, באופן בלתי תלוי זה בזה. הפרדה זו היא מלאכותית ותורמת ליצירת תדמית מעוותת אצל התלמידים ביחס למהותו ואופיו של העיסוק במתמטיקה. בחלקו הראשון של המאמר הבאנו אפשרויות לקישוריות בין הנושאים: הגדרת סדרה על-פי איבר כללי, הגדרת סדרה בעזרת כלל נסיגה והוכחה באינדוקציה מתמטית. גם בחלק השני של המאמר, המופיע כאן, תידון האפשרות לקישוריות ביניהם. הקישוריות תודגם באמצעות פתרון של שתי בעיות: הבעיה: 'חציית מדבר', שהתפרסמה כ'בעיית חודש' מספר 45[1], ובעיה העוסקת בספירה של אזורים המתקבלים בעיגול, כאשר מסמנים על שפתו נקודות ומחברים אותן על-פי כללים מסוימים.

חציית מדבר – בעיה

מטייל מתכנן לעבור מסלול מדברי בהליכה במהירות של 20 ק"מ ביום. ביכולתו לשאת על גבו צידה, המספיקה לו לשלושה ימים בלבד. בנקודת ההתחלה של המסלול המדברי נמצאת כל הצידה הדרושה לו. כדי לחצות את המסלול המתוכנן, הוא יכול להשאיר חלקים מהצידה שהוא נושא בתחנות אותן יבחר בדרכו.

א. מהו מספר הימים הקטן ביותר, הדרוש למטייל כדי לעבור מסלול מדברי שאורכו 80 ק"מ? היכן כדאי למטייל לקבוע את התחנות?

ב. מהו מספר הימים הקטן ביותר, הדרוש למטייל כדי לעבור מסלול מדברי שאורכו 100 ק"מ? 120 ק"מ? היכן כדאי לו לקבוע את התחנות בכל אחד מהמקרים?

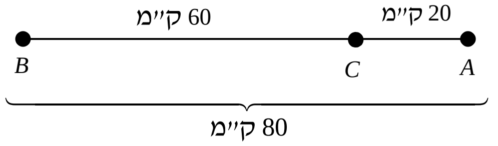
ג. התוכלו להכליל?

הקוראים מוזמנים לקחת אתנחתא מקריאת המאמר ולנסות את כוחם בפתרון הבעיה. התנסות עצמית בפתרון יכולה לתרום להפנמת הפוטנציאל הגלום בעיסוק בבעיה, ולהאיר אף היבטים נוספים, שאינם עולים ממאמר זה.

חציית מדבר – פתרון

א. מהירות המטייל היא 20 ק"מ ביום, והוא יכול לשאת על גבו צידה המספיקה לו לשלושה ימים לכל היותר. כדי לעבור בתנאים אלה, מסלול הארוך מ- 60 ק"מ, עליו לקבוע תחנות בהן ישאיר מזון בדרכו, ויחזור לתחילת המסלול כדי לקחת לדרכו צידה נוספת.

נניח כי הקטע AB מתאר את המסלול של המטייל.



איור 1 – המסלול באורך 80 ק"מ

---

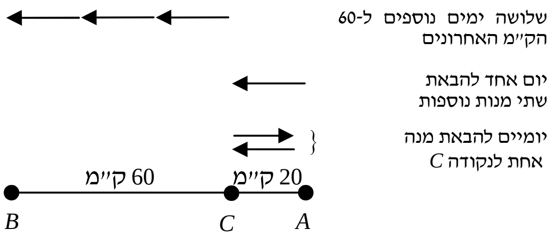
[1] בעיית החודש הוא מפעל של המרכז הארצי "קשר-חם" שבמסגרתו נשלחות לבתי הספר בכל שנה מספר בעיות רב-כיווניות. עד כה יצאו לאור 62 בעיות. אפשר לראותן באתר הבית של "קשר חם": http: kesher-cham.technion.ac.il

כדי לעבור את 60 הקילומטרים האחרונים של המסלול, זקוק המטייל לכך שבנקודה C, המרוחקת 20 ק״מ מנקודת ההתחלה A של המסלול, תהיה לו צידה, שתספיק לו לשלושה ימים. לצורך הדיון נניח, כי המזון מחולק למנות, כך שכל מנה מספיקה ליום אחד בדיוק. אם יגיע המטייל לנקודה C עם שלוש מנות מזון, יוכל לחצות את המדבר כולו. כיצד יעשה זאת?

יצא לדרכו מהנקודה A, כשעל גבו שלוש מנות. יצעד במשך יום אחד, במהלכו ישתמש במנה אחת. בסוף היום יגיע לנקודה C, יניח בה מנה אחת ויחזור למחרת לנקודה A, (שהרי להמשיך אינו יכול – מדוע?). מהלך החזרה יארך גם הוא יום שלם, בו ישתמש המטייל במנה השלישית שנותרה על גבו. ביום השלישי יעמיס על גבו שלוש מנות נוספות ויתחיל לצעוד. הקטע AC של המסלול יימשך שוב יום שלם, בו ישתמש המטייל במנה אחת. בסוף היום, כאשר יגיע לנקודה C, תיוותרנה על גבו שתי מנות. יחד עם המנה שהשאיר בנקודה זו תהיינה לו שלוש מנות, המספיקות בדיוק לסיום המסלול בשלושה ימים נוספים.

באופן זה תימשך דרכו של המטייל שישה ימים.

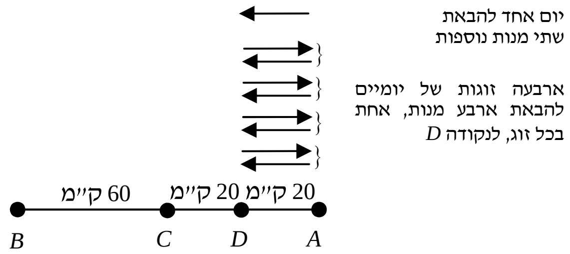
איור 2 מציג את דרכו של המטייל במסלול בן 80 הק״מ:



איור 2 – דרכו של המטייל במסלול בן 80 הק״מ

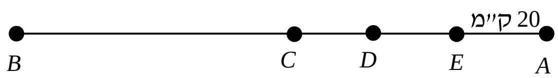
ב. כדי לתכנן את דרכו של המטייל במסלול באורך 100 ק״מ, נשתמש בידוע לנו לגבי מסלול באורך 80 ק״מ. מסלול באורך 100 ק״מ ארוך בדיוק ב- 20 ק״מ ממסלול באורך 80 ק״מ. אנו יודעים כבר, כי כדי לעבור מסלול באורך 80 ק״מ, זקוק המטייל לשישה ימים. על-כן, אם יגיע המטייל לנקודה D המרוחקת 20 ק״מ מנקודת ההתחלה A של מסלול באורך 100 ק״מ, עם שש מנות מזון, יוכל לחזור על מהלך הדרך, כפי שתואר בסעיף א ולעבור את המדבר כולו. כיצד יעשה זאת?

צעידה למרחק 20 ק״מ (לנקודה D) במשך יום אחד וחזרה לנקודת ההתחלה במשך יום נוסף מאפשרת למטייל להשאיר בנקודה D מנה אחת. על המטייל לחזור על מהלך זה ארבע פעמים במשך שמונה ימים. ביום התשיעי יעמיס על גבו שלוש מנות, וכשיגיע לנקודה D תיוותרנה על גבו שתי מנות. (דרכו זו של המטייל בתשעת הימים הראשונים, לקראת מעבר המסלול המדברי באורך 100 ק״מ מתוארת באיור 3).



איור 3 – דרכו של המטייל בתשעת הימים הראשונים במסלול באורך 100 ק״מ

יחד עם ארבע המנות, שכבר השאיר שם, תהיינה לו בדיוק שש מנות, המספיקות למעבר שארית המסלול (80 ק״מ). בסה״כ תארך דרכו חמישה-עשר ימים.
באופן דומה לתכנון חציית מדבר באורך 120 ק״מ נשתמש בידוע לנו לגבי מסלול באורך 100 ק״מ.



איור 4 – מסלול באורך 120 ק״מ

אם יגיע המטייל לנקודה E המרוחקת 20 ק״מ מנקודת ההתחלה עם 15 מנות, יוכל לחצות את המדבר כולו. כדי להגיע לנקודה E עם 15 מנות, זקוק המטייל לשלושה-עשר זוגות של ימים, שבכל אחד מהם ישאיר מנה אחת בנקודה E, וליום נוסף אחד בו יגיע לנקודה זו עם שתי מנות על גבו. כך תימשך הדרך כולה ארבעים ושנים ימים, על-פי החישוב:

$$2 \cdot 13 + 1 + 15 = 42$$

ג. אפשרויות ההכללה פתוחות, רבות ומגוונות.
נסמן ב- n מספר טבעי. לאור המתואר לעיל טבעי לחפש כלל על-פיו ניתן לחשב את מספר הימים הדרוש למטייל לצורך חציית מדבר באורך: $(60 + 20n)$ ק״מ עבור כל

n טבעי. מהלך הפתרון של הדוגמאות הפרטיות מוביל לניסוח של כלל נסיגה, הפותר בעיה זו.

נסמן ב- a_n את מספר הימים הדרוש למטייל לחציית מדבר באורך $(60+20n)$ ק״מ. a_{n+1} מסמל את מספר הימים הדרוש לחציית מדבר הארוך ב-20 ק״מ בלבד ממסלול כזה. על-פי התהליך שתיארנו a_{n+1} מורכב מ- (a_n-2) זוגות של ימים בהם מביא המטייל מנה אחת לנקודה המרוחקת 20 ק״מ מנקודת ההתחלה, עוד יום אחד להבאת שתי מנות ועוד a_n ימים לחציית החלק הנותר של המדבר. מכאן מקבלים בקלות כלל נסיגה לסדרת הימים הדרושים למעבר מדבר באורך $(60+20n)$ ק״מ.

$$a_{n+1} = \overbrace{\underbrace{2\cdot(a_n-2)}_{\text{מספר המנות המובאות כל אחת בנפרד}} + \underbrace{1}_{\text{יום אחד להבאת שתי מנות}}}^{\text{מספר הימים לחציית 20 הק״מ הראשונים}} + \overbrace{a_n}^{\text{מספר הימים לחציית החלק הנותר של המדבר}}$$

מכאן מתקבל כלל הנסיגה הבא:

$$a_{n+1}=3\cdot a_n-3$$
$$a_1=6$$

מה עוד ניתן להפיק מן העיסוק בבעיה?

מהלך הפתרון של הבעיה הוביל לניסוח כלל נסיגה, המגדיר את הסדרה. מעניין לחפש גם הגדרה ישירה של איברי הסדרה באמצעות n. לא מיידי למצוא כלל כזה על-ידי חישוב ישיר מכלל הנסיגה, שכן המקדם של a_n בהגדרת a_{n+1} אינו 1. ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה הם: 6, 15, 42, 123. (ניתן לבדוק לפי כלל הנסיגה.) קל לראות שסדרת ההפרשים של סדרת ארבעת האיברים הראשונים הללו היא: 9, 27, 81. זוהי סדרה הנדסית. מכאן רב הפיתוי לשער, כי סדרת ההפרשים של הסדרה כולה, זו שהוגדרה ע״י כלל נסיגה היא סדרה הנדסית, עם איבר ראשון 9 ומנה 3. אם השערה זו נכונה, ניתן לבטא את איברי הסדרה באמצעות n באופן הבא:

כדי להגיע מ- 6, שהוא האיבר הראשון בסדרה, ל- a_n, יש להוסיף לו $(n-1)$ הפרשים, המהווים בעצמם סדרה הנדסית. כך:

$$a_n = 6+\left(\text{סכום של } n\text{-1 איברים בסדרת ההפרשים}\right) = 6+\frac{9\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} = 6+\frac{3^{n+1}-9}{2}$$

הצדקת ההשערה יכולה להיעשות (לפחות) בשלוש דרכים:

א. ניתן להוכיח על-ידי שימוש באינדוקציה מתמטית, כי כלל הנסיגה מגדיר בדיוק אותה סדרה כמו הכלל הישיר.

ב. ניתן להוכיח על-ידי שימוש באינדוקציה מתמטית, כי סדרת ההפרשים של הסדרה המוגדרת בעזרת כלל הנסיגה היא סדרה הנדסית בעלת מנה 3.

ג. ניתן להציב את הנוסחה המשוערת להגדרת האיבר הכללי בנוסחת הנסיגה המגדירה את הסדרה, ולבדוק שמתקיימת זהות.

ההוכחות לא תובאנה במסגרת זו.

ראוי לתת את הדעת גם לסוגיה הבאה: במהלך הדיון שלעיל צוין, כי הגדרת הסדרה באמצעות האיבר הכללי שלה, כלומר באמצעות n בלבד, נבנתה ע״י השערה בלבד. אי-לכך הועלה הצורך בהוכחת ההגדרה, והוצעו שלוש דרכים לכך. הגדרת הסדרה בעזרת כלל נסיגה נבנתה מתוך תהליך הפתרון.

האם לא צריך להוכיח כי כלל זה אכן מגדיר את הסדרה?!

כמה אזורים בעיגול? – בעיה

על מעגל כלשהו מסמנים נקודות ומחברים אותן זו עם זו. אם מסמנים נקודה אחת בלבד, אין נקודה נוספת לחבר אותה עמה, ולכן אין חלוקה של המעגל, במלים אחרות מספר האזורים,'הנוצרים' בעיגול בתהליך זה הוא אחד, העיגול עצמו. אם מסמנים שתי נקודות ומחברים אותן זו עם זו, נוצרים שני אזורים.

א. כמה אזורים נוצרים בעיגול באופן זה, כאשר מסמנים שלוש, ארבע, או חמש נקודות?

ב. כאשר עוברים למספר רב יותר של נקודות יש להקפיד על קיום התנאי הבא: יש לסמן את הנקודות על המעגל, כך שכאשר מחברים כל שתים מהן בעזרת ישר, לאף שלשה של ישרים אין נקודה משותפת, כלומר כל נקודת חיתוך של ישרים המתקבלת בתוך העיגול היא נקודת חיתוך של שני ישרים בדיוק.

כמה אזורים נוצרים בעיגול באופן זה, כאשר מסמנים שש נקודות?

ג. יש לבנות נוסחה המתארת את מספר האזורים הנוצרים לכל מספר טבעי n של נקודות, המסומנות באופן זה.

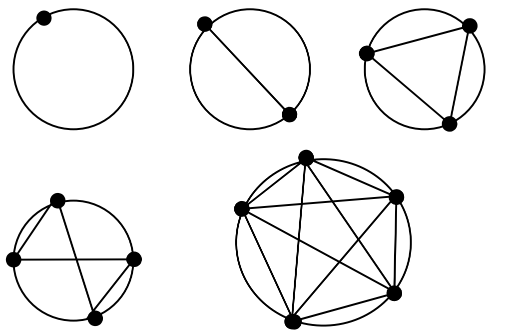
לפתרון הבעיה דרוש ידע בסיסי בקומבינטוריקה. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם בפתרון הבעיה לפני המשך הקריאה.

כמה אזורים בעיגול? – פתרון

מספרי האזורים הנוצרים על-ידי סימון נקודה אחת, שתים, שלוש וארבע נקודות מרוכזים בטבלה 1 להלן.

מספר הנקודות	1	2	3	4	5
מספר האזורים	1	2	4	8	16

טבלה 1 – מספרי האזורים הנוצרים בעיגול לפי מספר הנקודות שעל שפתם



איור 5 – אזורים בעיגולים לפי מספר הנקודות שעל שפתם

מהו מספר האזורים הנוצרים בעיגול, כאשר מסמנים שש נקודות על המעגל?

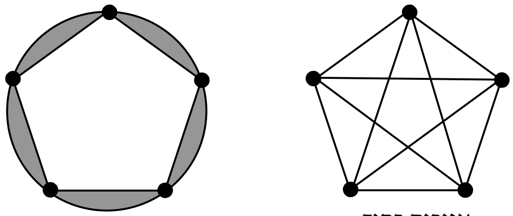
נחוצה ספירה זהירה ביותר! סדרת המספרים שהתקבלה עבור 5,4,3,2,1 נקודות, מזמינה את ההשערה, כי מספר האזורים הנוצרים הוא חזקה של שתים. ספירה זהירה מראה, כי סימון שש נקודות על מעגל ומתיחת ישרים בין כל שתים מהן, תוך הקפדה על קיום התנאי הרשום מעלה, מוביל ליצירת שלושים ואחד (31) אזורים בלבד. התוצאה מפתיעה ומזכירה לכולנו, כי אל לנו להסיק מסקנות נמהרות על-סמך מקרים פרטיים, גם כאשר מספרם רב (חמישה במקרה זה). במתמטיקה נחוצה הוכחה כללית!

מהו, אם-כן, הכלל המגדיר את הסדרה? בהמשך לעיסוק בשתי הבעיות הקודמות (גם זו בה עסקנו בחלק א של המאמר בעל"ה 32), נרצה גם כאן להצביע הן על הגדרת הסדרה באמצעות האיבר הכללי שלה והן על כלל נסיגה המגדיר אותה.

בניית נוסחה לאיבר הכללי:

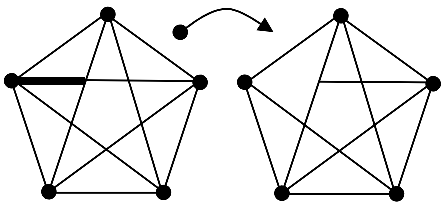
סימון n נקודות על מעגל וחיבורן ע"י n קטעים באופן ציקלי בלבד יוצר מצולע קמור בעל n צלעות החסום במעגל. מספר האזורים הנוצר בתהליך שתואר לעיל מורכב ממספר האזורים הנוצרים בתוך המצולע וממספר האזורים הנוצרים מחוץ לו. מחוץ למצולע נוצרים n אזורים בדיוק, לכן נותר למצוא דרך לחישוב מספר האזורים הנוצרים בתוך המצולע בלבד (ולהוסיף לתוצאה את הגודל n לקבלת מספר האזורים הכולל).

בציור מודגם המצב עבור סימון חמש נקודות על המעגל. רואים כי נוצרים חמישה מקטעים חיצוניים למחומש ועוד אחד-עשר אזורים פנימיים למחומש.



איור 6 –אזורים חיצוניים ופנימיים הנוצרים מסימון 5 נקודות על מעגל

נביט במצולע הקמור שנוצר. האזורים אותם אנו מעוניינים למנות, נוצרו על-ידי חיבור אלכסוניו. נשים לב, כי הסרת קטע אחד של אלכסון, שבין שתי נקודות חיתוך, של שני אלכסונים, או בין נקודת חיתוך לקודקוד של המצולע, מורידה אזור אחד בדיוק מהספירה הכוללת, כפי שניתן להבחין בציור:



איור 7 – הסרת קטע אחד של אלכסון

בשל ההגבלה על אופן סימון הנקודות והישרים, יחד עם הסרת קטע של אלכסון נעלמות גם נקודות החיתוך שעליו. לכן התהליך של הסרת אלכסונים בזה אחר זה יכול לעזור למניית האזורים במצולע, דרך מניית נקודות החיתוך הנעלמות ביחד עימם.

נבחר אלכסון אחד ונסיר אותו:

מספר האזורים שירדו = מספר נקודות החיתוך שהיו על אלכסון זה + 1

נבחר אלכסון נוסף ונסיר אותו:

מספר האזורים שירדו = מספר נקודות החיתוך שנשארו על אלכסון זה + 1

נמשיך כך עד שנסיר את כל האלכסונים. בשלב זה נישאר עם אזור אחד שהוא המצולע כולו.

נסכם:

מספר האזורים הנוצרים בתוך המצולע = מספר נקודות החיתוך שנוצרות בתוך המצולע + מספר האלכסונים + 1

נחשב את מספר האלכסונים במצולע קמור בעל n צלעות: נשים לב, כי כל קודקוד מ- n הקדקודים מחובר ל- $(n-3)$ קדקודים. הוא אינו מחובר על-ידי אלכסון לעצמו ולשני שכניו, אליהם הוא מחובר על-ידי צלעות המצולע. אולם כל אלכסון באופן זה נספר פעמיים (משני קצותיו) ולכן יש לחלק את המכפלה $n(n-3)$ בשתים. כלומר מספר האלכסונים הוא: $\frac{n(n-3)}{2}$.

נותר לחשב את מספר נקודות החיתוך של אלכסוני המצולע. כיון שבכל נקודת חיתוך נפגשים בדיוק שני אלכסונים, כל נקודה כזאת נקבעת בדיוק על-ידי ארבעה קדקודים של המצולע. לכן מספר נקודות החיתוך של אלכסוני המצולע הוא כמספר האפשרויות לבחור קבוצות של ארבעה עצמים מתוך n עצמים, כלומר:

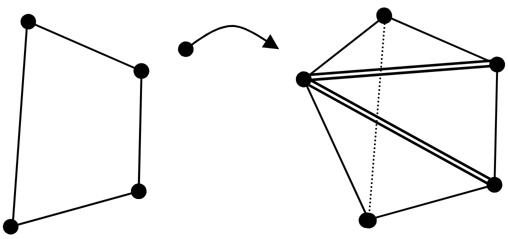
$$\binom{n}{4}=\frac{n!}{4!\cdot(n-4)!}$$

לסיכום: מספר האזורים הנוצרים, כאשר מסמנים n נקודות על מעגל, באופן שניתן לחבר כל שתים מהן על-ידי ישר, כך שכל נקודת חיתוך היא של שני ישרים בדיוק הוא:

n	+	1	+	$\frac{n(n-3)}{2}$	+	$\binom{n}{4}$
↑		↑		↑		↑
מספר המקטעים שמחוץ למצולע		המצולע כולו ללא אלכסונים		מספר האלכסונים במצולע		מספר נקודות החיתוך של האלכסונים במצולע

בניית כלל נסיגה:

אופן הבנייה של הנוסחה לאיבר הכללי בסעיף הקודם מזמין, לדעתי, לחפש כלל נסיגה להגדרת הסדרה. התהליך של הסרת אלכסונים בזה אחר זה נראה קשור לתהליך שיביא להגדרת כלל הנסיגה, אם כי בכיוון הפוך. למעשה עלינו לבדוק מהי ההשפעה של הוספת קודקוד אחד למצולע על מספר האזורים הנוספים בעיגול. כמו קודם, ברורה ההשפעה על מספר המקטעים החיצוניים למצולע: סימון נקודה נוספת על המעגל מוסיפה מקטע חיצוני אחד. נבחן את ההשפעה על מספר האזורים הפנימיים למצולע. לצורך פישוט הדיון נביט בהוספת קודקוד למצולע בעל ארבע צלעות (מרובע) והפיכתו למחומש.



איור 8 – ההשפעה של הוספת קודקוד למרובע על מספר האזורים הפנימיים

ברור כי מספר האזורים שנוספו מושפע ממספר האלכסונים שנוספו. במעבר ממרובע למחומש צלע אחת של המרובע הפכה לאלכסון, ונוספו שני אלכסונים, שמוצאם בקודקוד הנוסף. בסך-הכל נוספו שלושה אלכסונים. באופן כללי מספר האלכסונים הנוספים במעבר ממצולע בעל $n-1$ צלעות למצולע בעל n צלעות הוא:

1	+	$(n-3)$
↑		↑
הצלע שהופכת לאלכסון		האלכסונים הנוספים היוצאים מהקודקוד

ומה הלאה? הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם בפתרון הבעיה: מציאת כלל נסיגה עבור מספר האזורים הנוצרים בעיגול.

אתאר כאן את תהליך החשיבה והפתרון בו נקטתי. כיוון שלא הצלחתי למצוא בקלות את הקשר בין מספר האלכסונים שנוספים לבין מספר האזורים הנוספים במעבר ממצולע בעל $n-1$ צלעות למצולע בעל n צלעות, יצרתי כלל נסיגה מנוסחת האיבר הכללי שכבר מצאתי. חישבתי את ההפרש בין שני איברים סמוכים בסדרה וקיבלתי:

$$\left[\binom{n}{4}+\frac{n(n-3)}{2}+1+n\right]-\left[\binom{n-1}{4}+\frac{(n-1)(n-4)}{2}+1+(n-1)\right]=$$

$$=\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}-\frac{(n-1)!}{(n-5)!\cdot 4!}+\frac{n(n-3)}{2}-\frac{(n-1)(n-4)}{2}+1=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-4)!\cdot 3!}+n-2+1$$

במצב זה ניסיתי להסביר לעצמי את התוצאה שהתקבלה. שמתי לב כי המחובר הראשון שווה בדיוק למספר האפשרויות לבחור שלושה עצמים מתוך $n-1$ עצמים, וכי בין המחוברים הנוספים ניתן להבחין גם במספר האלכסונים הנוספים. כעת חזרתי לניתוח המצב 'הגיאומטרי'. במעבר ממצולע בעל $n-1$ צלעות למצולע בעל n צלעות, מספר האזורים הנוספים, על-פי שיקולים דומים לסעיף הקודם שווה לסכום הבא:

{מספר האלכסונים הנוספים היוצאים מהקודקוד הנוסף בלבד! ללא הצלע הנוספת !!!} + {מספר הנקודות הנוספות שיוצרים האלכסונים היוצאים מהקודקוד הנוסף} + 1 (האזור המשולש הנוצר בין הקודקוד הנוסף ושני הקודקודים הסמוכים אליו)

לאחר החישוב האלגברי, קל יותר לשים לב לכך שמספר נקודות החיתוך הנוספות הוא בדיוק כמספר האפשרויות לבחור שלושה עצמים מתוך $(n-1)$, שכן גם כאן: נקודת חיתוך נקבעת על-ידי ארבע נקודות. אולם אנו מעוניינים רק בספירת הנקודות הנוספות בשל הוספת קודקוד מסוים, לכן הוא צריך להיות אחד מהארבעה. נותר אם כן לבחור שלושה קדקודים אחרים מתוך $(n-1)$ הקדקודים הנותרים. מספר האלכסונים הנוספים היוצאים מהקודקוד הנוסף הוא בדיוק $n-2$, המופיע בהפרש שחושב ונשאר עוד אחד עבור האזור המשולש, הנוצר מחיבור הקודקוד הנוסף לשני קדקודים סמוכים שהיו קיימים קודם. נוסחת הנסיגה המתקבלת, אם-כן, להגדרת הסדרה היא:

$$a_1=1\ ;\ a_2=2\ ;\ a_3=4$$

$$a_n=a_{n-1}+\underbrace{\frac{(n-1)!}{(n-4)!\cdot 3!}}_{\text{מספר נקודות החיתוך הנוספות}}+\underbrace{n-2}_{\text{מספר האלכסונים הנוספים היוצאים מהקודקוד הנוסף}}+\underbrace{1}_{\text{האזור המשולש הנוצר בין הקודקוד הנוסף לשנים הסמוכים אליו}}$$

סיכום

ניתן לטפל במספר רב של בעיות אחרות בגישה זו. במהלך הטיפול בבעיה האחרונה טיפלנו למעשה גם בבעיה נוספת, אמנם פשוטה הרבה יותר. חישבנו והגדרנו את סדרת המספרים הנוצרת ממספר האלכסונים במצולע קמור בעל 1, 2, 3, ... n צלעות, הן בעזרת האיבר הכללי של הסדרה והן בעזרת כלל נסיגה. ראוי לציין, כי הזהות בין שתי ההגדרות של אותה סדרה הוכחה במקרה זה באופן גיאומטרי בלבד, אף כי ניתן לעשות זאת גם בעזרת חישובים אלגבריים ישירים או באמצעות אינדוקציה מתמטית.

ולבסוף ראוי לציין, כי יש חשיבות רבה לשילוב בין הנושאים כמדגימים את שלמותה ואחדותה של המתמטיקה. זאת במיוחד לאור העובדה שעל פי המבנה החדש של בחינות הבגרות, תלמידי 5 יח"ל נבחנים בשני שאלונים נפרדים בנושאים שעלו במאמר זה: איבר כללי של סדרה, סדרה הנדסית, הגדרת סדרה על-פי כלל נסיגה ואינדוקציה מתמטית.