הנושא: **׳שליחומטיקה׳ – הפוטנציאל שבפעילות למורי-מורים למתמטיקה**

__הוכן ע״י__: גרייסי ויניצקי-לנדמן.

__תקציר__: במאמר מציגה המחברת פעילות משולבת מחשב, שהופעלה במסגרת הקורס למורי-מורים למתמטיקה. בפעילות נחשפו המשתתפים לבעיה בשם ׳שליחומטיקה׳ השייכת לקובץ ׳בעיות החודש׳ אשר פותח במסגרת המרכז הארצי למתמטיקה ׳קשר חם׳ [בעיית החודש מס׳ 26].
במהלך הפעילות ניתנה למשתתפים הזדמנות לבנות מודל מתמטי לסיטואציה פשוטה יחסית. כמו כן, חוו המשתתפים חוויה אותנטית של למידה וביצוע רפלקציה על התהליך שהם עצמם עברו.

__מילות מפתח__: אלגברה, בעיות מילוליות, פונקציה קווית, פונקציה רציפה, פונקציה מחזורית, טרנספורמציות של פונקציה, הזזה, שיקוף, מתיחה, מודל מתמטי, עזרי הוראה, מחשב, לומדה.

__החומר פורסם במסגרת__: על״ה 32, סיוון תשס״ד - יוני 2004, עמודים 35-38.

__החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה__: 4 עמודים.

'שליחומטיקה' - הפוטנציאל שבפעילות למורי-מורים למתמטיקה

גרייסי ויניצקי-לנדמן
California State Polytechnic University, Pomona
csupomona@greisyw.edu

בשורות הבאות תוצג פעילות שהופעלה במסגרת הקורס למורי-מורים למתמטיקה, אשר התנהל מטעם המרכז הארצי למתמטיקה "קשר חם" במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון בין השנים תשנ"ח-תש"ס. מטרות פעילות זו היו:

א. להדגים מודל של פעילות למורי-מורים למתמטיקה בבית-ספר על-יסודי;
ב. לאפשר למשתתפים חוויה אותנטית של למידה וביצוע רפלקציה על התהליך שהם בעצמם עברו;
ג. לחשוף את המשתתפים לדרכי תכנון וניתוח של פעילות למורי-מורים ולפוטנציאל הטמון בפעילות המתוארת.

בנוסף, כיוון שפעילות זו הופעלה בשלבים הראשונים של הקורס, היא אפשרה למנחים להכיר את ולמשתתפים להכיר אלה את אלה.

בפעילות נחשפו המשתתפים לבעיה בשם 'שליחומטיקה' השייכת לקובץ 'בעיות החודש' אשר פותח במסגרת המרכז הארצי למתמטיקה 'קשר חם' [בעיה מס' 26].

הבעיה

'שליחומטיקה' הוא שרות למשלוח איגרות מתמטיות בעזרת יוני דואר בין שני ישובים: צחור ואפור. השרות פועל ללא הפסקה, 24 שעות ביממה, במשך כל ימות השנה. אם יונה מתעייפת, היא מוחלפת אוטומטית, ללא הפסד זמן.

בישוב צחור יש יונים לבנות ובישוב אפור – יונים אפורות.

שתי יונים יצאו בו זמנית: הלבנה מהישוב צחור לישוב אפור והאפורה מאפור לצחור. היונים עפו זו לקראת זו במהירויות קבועות, השונות זו מזו. הן נפגשו במרחק 5 ק"מ מהישוב צחור, המשיכו בדרכן, הגיעו ליעדיהן ומיד החלו לחזור.

פגישתן השניה התרחשה במרחק 3 ק"מ מהישוב אפור, לאחריה המשיכו לעוף: הלבנה לישוב צחור והאפורה לישוב אפור. כל יונה הגיעה לישוב ממנו יצאה והחלה מיד לעוף אל הישוב האחר.

מעוף היונים נמשך כך ללא הפסקה: יונה המגיעה לאחד הישובים, מסתובבת וחוזרת מיד אל הישוב האחר.

נסמן ב- v_1 ו- v_2 את מהירויות היונה הצחורה והיונה האפורה בהתאמה וב-s את המרחק בין היישובים צחור ואפור.

1. מיצאו ביטוי אלגברי המבטא את היחס בין המהירויות של שתי היונים.
2. מהו המרחק בין שני הישובים?
3. באיזה מרחק מהישוב צחור תיפגשנה היונים בפעם השלישית?
4. מדוע נכון לומר, שהפגישה הרביעית תתקיים בדיוק באמצע הדרך בין שני היישובים?
5. היכן תתקיים הפגישה החמישית? הפגישה ה- 15?
6. בהנחה, שהשרות נמשך לבלי סוף, היכן תתקיים הפגישה ה- 1996?

במבט ראשון, הבעיה שייכת לתחום המוכר בשם 'בעיות מילוליות' או 'בעיות תנועה'. במובן זה, מודגם כאן שפעילות למורי-מורים לא מחייבת בהכרח להמציא בעיות. לעומת זאת, פעילות מסוג זה מחייבת <u>עושר</u> או <u>פוטנציאל</u> בארבעת המישורים הבאים: התוכני (מתמטי), הדידאקטי, הטכנולוגי והארגוני. בהמשך יוצגו הפעילות וניתוחה לפי ארבעה מישורים אלה.

הפעילות

בחלק הראשון של הפעילות, המורים נתבקשו לפתור את הבעיה ללא הכוונה מוקדמת. באופן לא מפתיע כולם נגשו למשימה באמצעות כתיבת משוואות, כי זאת הדרך בה הם מלמדים את תלמידיהם.

הפתרון שנמצא לסעיפים הראשונים הוא:

$$s = 12 \text{ ק"מ} \quad ; \quad v_1 : v_2 = 5:7$$

לאחר מכן, נוספו הנתונים: $v_1 = 5$ קמ"ש, $v_2 = 7$ קמ"ש והמשתלמים נתבקשו לתאר את הסיטואציה באמצעות הלומדה Algebra Animator™ שלא הייתה מוכרת להם. לשם כך, ניתן הסבר קצר על הלומדה והמורים התחילו לעבוד בקבוצות קטנות. בלומדה זו המורים הכינו 'סרט' אנימציה המתאר שני אובייקטים (היונים) שנעים לפי תנאי הבעיה. לאחר מכן נתבקשו המשתלמים לבנות מודל אחר בלומדה מתמטי-x המוכרת להם. בהמשך הוצגו המודלים השונים והתנהל דיון על אופן בנייתם. לקראת סוף הפעילות תוארו תהליך תכנון הפעילות ושיקולי המנחה בעת תכנון זה. המשתתפים עמדו על הצלחות ונקודות מכשול של הפעילות.

ניתוח הפעילות

<u>המישור התוכני</u>

בפעילות זו פגשו המורים בעיה מתחום תוכן המוכר להם היטב, אולם נחשפו לפתרונות בגישה פונקציונאלית או גרפית (גלעד, 2000). הפונקציות בהן מדובר הן הפונקציות המתארות את אורך המסלול שעברה כל יונה כתלות בזמן המעוף שלה. לפי נתוני הבעיה, הפונקציות רציפות, מחזוריות ומוגדרות בתחום מפוצל. בנוסף לכך, ניתן לזהות, שהגרף של כל אחת מהן מתקבל כהזזה ושיקוף של חלק ממנו. זיהוי זה יכול להוביל לכתיבה יעילה של התבניות של הפונקציות, אם מנתחים את המשמעות האלגברית של הטרנספורמציות האלו. (הגרפים של הפונקציות מופיעים בנספח).

השימוש בגישה הפונקציונאלית לפתרון בעיות 'מילוליות' אינו נפוץ, ולכן זהו חידוש לגבי המורים. עבור אלה שלא פגשו את השימוש בשיטת 'הטרנספורמציות' של פונקציות – הזזות, שיקופים, מתיחות וכו' – זאת הזדמנות מתאימה לדון בנושא, המשלב היבטים אלגבריים עם היבטים גיאומטריים. למורים ניתנה הזדמנות לפגוש מושגים מוכרים להם ולחזק את הבנתם במידת הצורך.

<u>המישור הדידאקטי</u>

יתכן והתרומה הגדולה ביותר של פעילות זו היא ההזדמנות לבנות מודל מתמטי לסיטואציה פשוטה יחסית. בדיקת המודל נעשית על ידי המשתתפים עצמם ולא על-ידי 'גורם חיצוני' היודע מראש מה צריך להתקבל. הקריטריונים לבדיקת המודל נקבעים על-ידי המשתתפים, אשר יתכן שלא כולם מסכימים על חשיבותו של קריטריון זה או אחר. מצב זה רצוי ביותר, אנשים שאינם מסכימים זה עם זה, לכאורה, נוצר דיון פורה וכתוצאה מכך מתרחשת למידה אמיתית. הפעילות מדגימה מדוע העבודה בקבוצות קטנות, של שניים או שלושה משתתפים, יכולה להיות יעילה גם בלימודי מתמטיקה בכלל, ולא רק בשיעורי חקר וגילוי. הדיון שנערך בין הקבוצות הביא את המשתתפים לשיחה משמעותית על הקשיים בהם נתקלו ועל הדרכים שהציעו לבניית המודל המתמטי לסיטואציה הנתונה. אחד הקריטריונים היה *פשטות* המודל. קריטריון זה הופעל בשתי דרכים שונות, דרכים שהתגלו אפילו מנוגדות זו לזו:

פשטות הקריאה: החברים בקבוצה א נגשו לפתרון לפי דבריהם "בצורה הפשוטה ביותר", שהיא הכתיבה של תבנית הפונקציה, לכל קטע מהמסלול. הם הציגו את הפתרון הבא, אותו כינו "אינטואיטיבי ופשוט להבנה מכיתה ט ומעלה". אם $x_1(t)$ מתאר את אורך המסלול של היונה הצחורה לאחר זמן t ו- $x_2(t)$ מתאר את אורך המסלול של היונה האפורה לאחר זמן t, ניתן לומר ש:

$$x_1(t) = \begin{cases} -5t+12 & 0 \le t < \frac{12}{5} \\ 5t-12 & \frac{12}{5} \le t < \frac{24}{5} \\ -5t+36 & \frac{24}{5} \le t < \frac{36}{5} \\ 5t-36 & \frac{36}{5} \le t < \frac{48}{5} \\ -5t+60 & \frac{48}{5} \le t < \frac{60}{5} \\ 5t-60 & \frac{60}{5} \le t < \frac{72}{5} \\ \vdots & \end{cases}$$

פשטות הכתיבה (קריטריון זה כונה 'אלגנטיות'): החברים בקבוצה ב השתמשו בתכונות הפונקציה כדי ליעל ולקצר את הכתיבה של תבנית הפונקציה. לדעתם

"פתרון לבעיה מתמטית צריך להיות לא רק נכון, אלא גם אלגנטי וחסכוני". במודל שלהם מופיע שימוש בשיקולי הזזה, אשר נובעים מהמחזוריות שבבעיה. להלן המודל שהם הציגו:

$$x_1(t)=\begin{cases} f(t)=-5t+12 & 0\le t<\frac{12}{5} \\ g(t)=5t-12 & \frac{12}{5}\le t<\frac{24}{5} \\ f(t-24) & \frac{24}{5}\le t<\frac{36}{5} \\ g(t-24) & \frac{36}{5}\le t<\frac{48}{5} \\ f(t-48) & \frac{48}{5}\le t<\frac{60}{5} \\ g(t-48) & \frac{60}{5}\le t<\frac{72}{5} \\ \vdots & \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} p(t)=7t & 0\le t<\frac{12}{7} \\ q(t)=-7t+24 & \frac{12}{7}\le t<\frac{24}{7} \\ p(t-24) & \frac{24}{7}\le t<\frac{36}{7} \\ q(t-24) & \frac{36}{7}\le t<\frac{48}{7} \\ p(t-48) & \frac{48}{7}\le t<\frac{60}{7} \\ q(t-48) & \frac{60}{7}\le t<\frac{72}{7} \\ \vdots & \end{cases}$$

לאחר הצגת המודל של קבוצה א לא היה צורך בהסבר נוסף, כי הוא מתאר בצורה שקופה את הסיטואציה. מודל זה מתאים לשימוש הן בלומדה Algebra Animator™ והן בלומדה מתמטי-*x*, (באחרונה יש להחליף את שמות המשתנים, כי היא מחייבת כתיב מהצורה $y=f(x)$). ייתכן שמבחינה מתמטית אין הבדל בין הדרכים האלו לכתיבת שתי הפונקציות, אבל מבחינה תיכנותית ומבחינה דידאקטית ההבדלים הם משמעותיים ביותר. הפונקציות שהתלמיד פוגש הן מופשטות וכאן המשתתפים חייבים לתת את הדעת לא רק לתבנית המקשרת בין המשתנה הבלתי תלוי למשתנה התלוי, אלא גם לבחירת המשתנים עצמם. אם המודל הראשון היה שקוף, המודל השלישי דרש הסבר מהמציגים, כי לא כל המשתתפים הצליחו לפענח אותו בקלות.

להלן המודל שבנתה הקבוצה השלישית:

$$x_1(t)=\begin{cases} f(t)=\begin{cases} a(t)=12-5t & 0\le t<\frac{12}{5} \\ -a\left(t-\frac{12}{5}\right)+12 & \frac{12}{5}\le t<\frac{24}{5} \end{cases} \\ f\left(t-\frac{24}{5}\right) & \frac{24}{5}\le t<\frac{48}{5} \\ f\left(t-\frac{48}{5}\right) & \frac{48}{5}\le t<\frac{72}{5} \\ \vdots & \end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} g(t)=\begin{cases} b(t)=7t & 0\le t<\frac{12}{7} \\ -b\left(t-\frac{12}{7}\right)+12 & \frac{12}{7}\le t<\frac{24}{7} \end{cases} \\ g\left(t-\frac{24}{7}\right) & \frac{24}{7}\le t<\frac{48}{7} \\ g\left(t-\frac{48}{7}\right) & \frac{48}{7}\le t<\frac{72}{7} \\ \vdots & \end{cases}$$

מודל זה מדגים בצורה ברורה את תפקיד ההוכחה *כאמצעי לשכנוע*. שכן, נדרשה הוכחה לכך שהמודל אכן מתאים למצב המתואר בבעיה. בהוכחה היה צורך לכלול הסברים והנמקות לשיקולים שהופעלו בבניית המודל.

ההטרוגניות של כיתת המשתלמים תרמה רבות לפעילות, כי כל קבוצה פיתחה מודל אחר וכבר בשלב זה ניתן היה להתרשם ממגוון הפתרונות ולדון בהם. המודל האחרון אלגנטי ומתוחכם, אך מסיבות הקשורות לאופי הלומדות, ניתן ליישמו רק בלומדה מתמטי-*x*.

<u>המישור הטכנולוגי</u>

הבעיה שנבחרה היא בעלת פוטנציאל במישור הטכנולוגי, כי היא מזמנת התנסויות של:

1. תרגום הבעיה לסביבות ממוחשבות – במקרה זה הלומדות Algebra Animator™ ומתמטי- *x*. אשר נבחרו על-ידי המנחה של הפעילות;
2. ניתוח יתרונות ומגבלות של כל אחת מהסביבות שנבחרו;
3. השוואה בין שתי הסביבות הממוחשבות ודיון בבחירת אחת מהן לפי הצורך.

<u>המישור הארגוני</u>

כפי שתואר לעיל, פעילות זו הועברה בראשית הקורס למורים-מורים למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. בשלב האחרון של הפעילות נחשפו המשתתפים לשיקולי המנחה בעת תכנון הפעילות, לרפלקציה שלה על הפעלתה ולאחר מכן התנהל דיון בו המשתתפים חשפו את התרשמויותיהם.

פעילות כזאת, המורכבת משלב של התנסות לימודית, ומלווה בדיון בין המשתתפים וברפלקציה על התהליכים שעברו הם והמנחה נמצאה במבנה מתאים לתוכניות של התפתחות מקצועית של מורים.

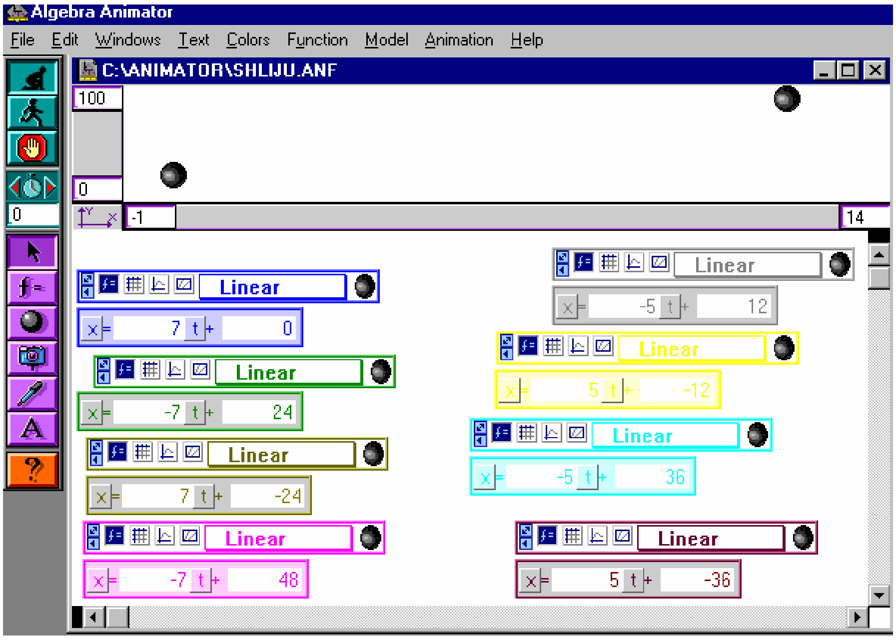
מקורות:

גלעד, ש. (2000): *שאלות מילוליות במשתנה אחד בגישה גרפית*, המרכז לטכנולוגיה חינוכית.

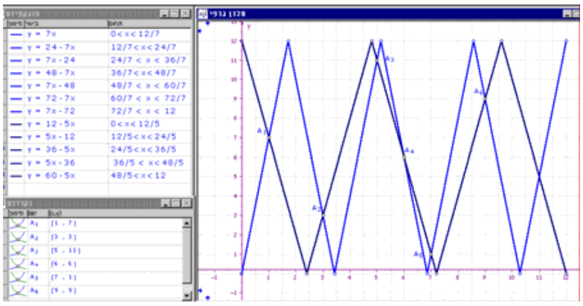
קשר חם – המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי, *50 בעיות ופתרונותיהן, בעיית החודש 26*.

נספח

הצגת הבעיה בלומדה: Algebra Animator™



הצגה גרפית של הבעיה באמצעות הלומדה: מתמטי-x.



הצגה גרפית של הפונקציה $y(x)$ המתארת את אורך המסלול של היונה הצחורה לאחר זמן x