הנושא: מה עוד אפשר לעשות עם תיכוני משולש?

הוכן ע"י: יונתן אחיטוב.

תקציר: במאמר שני פרקים.
בפרק הראשון מוצגות שתי טענות עיקריות:

1. בהינתן משולש כלשהו, אפשר לבנות משולש שני, אשר צלעותיו תהיינה שוות באורכן לאורכי התיכונים במשולש המקורי וזוויותיו שוות בגודלן לשלוש הזוויות שבין שלושת התיכונים.
2. אם בונים משולש שצלעותיו הן תיכוני משולש נתון, (משולש התיכונים יכונה להלן 'הבן' של המשולש המקורי), ואם בונים גם למשולש התיכונים 'בן', אז 'הנכד' דומה ל'סבא', ויחס הדמיון הוא 3:4.

לטענות אלה מוצגות שתי הוכחות שונות, האחת באמצעים קלאסיים, והשניה בעזרת ווקטורים.
כהמשך לטענה השניה מוצגות שלוש סדרות הנדסיות אינסופיות בעלות מנה משותפת.

בפרק השני מוצגת השאלה האם יש הכרח לדלג מ'סבא' ל'נכד' כדי לקבל משולש דומה. כתשובה מוצגת משפחה חדשה של משולשים המכונה *משולשים תיכוניים*, בה נשמר הדמיון במעבר ממשולש האב למשולש התיכונים שלו (הבן). בפרק זה נחקרות עוד תכונות גיאומטריות מגוונות של משפחה זאת.
המחבר משלב מושגים מגיאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה ואלגברה.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, משולש, תיכון, דמיון, שטח משולש, מעגל, טריגונומטריה, משפט הסינוסים, וקטורים, אלגברה, סדרות, סדרה הנדסית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 30, אביב תשס"ג, 2003, עמודים 5-12.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

חקירה מתמטית

מה עוד אפשר לעשות עם תיכוני משולש?

יונתן אחיטוב
בית הספר המקיף דנציגר, קרית שמונה

מבוא
בספרי הלימוד המוכרים של הגיאומטריה והטריגונומטריה, מופיעות תכונות אחדות, ידועות למדי, הקשורות לתיכוני המשולש. המאמר שלפניכם תורם לידע הקיים, ומתפרש לתחומי מתמטיקה נוספים.
בפרק הראשון – שתי טענות עיקריות:

1. בהינתן משולש כלשהו, אפשר לבנות משולש שני, אשר צלעותיו תהיינה שוות באורכן לאורכי התיכונים במשולש המקורי וזוויותיו שוות בגודלן לשלוש הזוויות שבין שלושת התיכונים.
2. אם בונים משולש שצלעותיו הן תיכוני משולש נתון, (משולש התיכונים יכונה להלן 'הבן' של המשולש המקורי), ואם בונים גם למשולש התיכונים 'בן', אז 'הנכד' דומה ל'סבא', ויחס הדמיון הוא $3:4$.

לטענות אלה תוצגנה שתי הוכחות שונות, האחת באמצעים קלאסיים, והשניה בעזרת ווקטורים.
כהמשך לטענה השניה תוצגנה שלוש סדרות הנדסיות אינסופיות בעלות מנה משותפת.

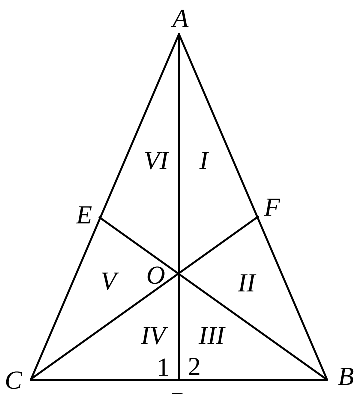
בפרק השני מוצגת השאלה האם יש הכרח לדלג מ'סבא' ל'נכד' כדי לקבל משולש דומה. כתשובה מוצגת משפחה חדשה של משולשים המכונה *משולשים תיכוניים*, בה נשמר הדמיון במעבר ממשולש האב למשולש התיכונים שלו (הבן). בפרק זה נחקרות עוד תכונות גיאומטריות מגוונות של משפחה זאת.

פרק ראשון

מה עוד אפשר לעשות עם תיכוני משולש?

נדון בתכונות אחדות של תיכוני משולש שאינן מוכרות בדרך כלל, תוך שילוב בין מושגים מגיאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה ואלגברה ברמה תיכונית גבוהה. בחלק מההוכחות נשתמש גם בחישובי חיצים (ווקטורים), ונוכל לחוש באלגנטיות ובעצמה שיש בכלי מתמטי חשוב זה.

טענה 1 – מוכרת למדי
שלושת התיכונים מחלקים את המשולש לשישה משולשים השווים בשטחם.



שרטוט 1

קל להוכיח טענה זו על-ידי שימוש בנוסחה לשטח משולש ומציאת משולשים בעלי גובה משותף לצלעות בעלות אורכים זהים. מסיבות שתתבררנה בהמשך, נוכיח את הטענה בשימוש בכלים טריגונומטריים.

הוכחה:

נתבונן במשולשים III ו- IV:

$$S_{III}=\frac{BD\cdot OD\cdot \sin D_2}{2}$$

$$\frac{CD\cdot OD\cdot \sin D_1}{2}=S_{IV}$$

אולם: $BD=CD$

$\angle D_2=180^\circ-\angle D_1$

לכן: $S_{III}=S_{IV}$

באופן דומה ניתן להראות גם את שני השוויונים: $S_I=S_{II}$ ו- $S_V=S_{VI}$.

עתה נתבונן במשולשים III ו- VI:

$$S_{III}=\frac{\frac{1}{3}AD\cdot\frac{2}{3}BE\cdot\sin\angle BOD}{2}=\frac{\frac{1}{3}BE\cdot\frac{2}{3}AD\cdot\sin\angle AOE}{2}=S_{VI}$$

באופן דומה ניתן להראות גם את שני השוויונים: $S_I=S_{IV}$ ו- $S_{II}=S_V$.

מכאן ברור שכל ששת המשולשים הקטנים שווים בשטחם: $S_I=S_{II}=S_V=S_{VI}=S_{III}=S_{IV}$

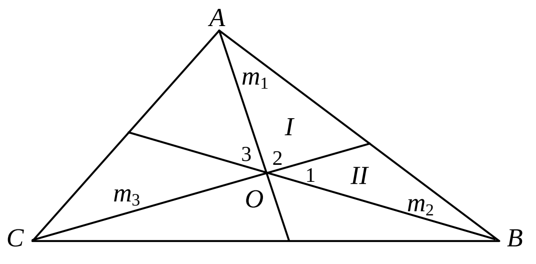
מ.ש.ל.

טענה 2

שלושת התיכונים במשולש ושלוש הזוויות שביניהם מקיימים את השוויון הבא:

$$\frac{m_1}{\sin\angle O_1}=\frac{m_2}{\sin\angle O_2}=\frac{m_3}{\sin\angle O_3}$$

כאשר: m_1, m_2 ו- m_3 הם תיכוני המשולש והזוויות $\angle O_3$, $\angle O_2$ ו- $\angle O_3$ הן הזוויות ביניהם כמתואר בשרטוט 2.



שרטוט 2

הוכחה:

נתבונן שוב במשולשים I ו- II. לפי טענה 1: $S_I=S_{II}$, כלומר:

$$\frac{\frac{1}{3}m_3\cdot\frac{2}{3}m_1\cdot\sin\angle O_2}{2}=\frac{\frac{1}{3}m_3\cdot\frac{2}{3}m_2\cdot\sin\angle O_1}{2}$$

מכאן, נקבל:

$$\frac{m_1}{\sin\angle O_1}=\frac{m_2}{\sin\angle O_2}$$

ובאופן דומה נקבל למשל:

$$\frac{m_2}{\sin\angle O_2}=\frac{m_3}{\sin\angle O_3}$$

השוויון שהוכח כאן מזכיר, בצורתו, את משפט הסינוסים, ואולי אפשר לכן לכנותו, בחוסר דיוק לשוני מסוים, בשם משפט 'סינוסי התיכונים'.

כך מתעוררת כמעט מאליה השאלה הבאה:

האם לכל משולש ניתן לבנות משולש 'חדש' שצלעותיו שוות באורכן לאורכים של שלושת התיכונים שלו, וזוויותיו שוות בגודלן לשלוש הזוויות שבין שלושת התיכונים, לפי ההתאמה הנ"ל?

התשובה החיובית לשאלה זאת נובעת באופן מיידי מהטענה הבאה:

טענה 3 (משפט הפוך למשפט הסינוסים המוכר)

אם נתונים 3 קטעים באורכים a,b,c ו- 3 זוויות α,β,γ שסכומן 180° ואם מתקיים השוויון:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

אז קיים משולש שאורכי צלעותיו הם a,b,c וזוויותיו α,β,γ בהתאמה.

הוכחה:

נקצה קטע באורך a. בקצהו האחד נעביר קרן היוצרת עמו זווית β, ובקצה השני נקצה קרן היוצרת זווית γ. נדאג כי שתי הקרניים תימצאנה מאותו צד של הקטע, ואז מובטח לנו שהן תיפגשנה, שהרי סכום הזוויות β ו- γ קטן מ- 180°.

נסמן את אורכי הצלעות שמול הזוויות β ו- γ ב- x ו- y בהתאמה. ברור שגודל הזווית בין שתי צלעות אלה הוא α, ובמשולש זה מתקיים משפט הסינוסים המוכר:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin\beta}=\frac{y}{\sin\gamma}$$

אבל, לפי הנתון:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

ולכן $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\beta}$, כלומר: $x=b$, ובאותו אופן $y=c$.

מ.ש.ל.[1]

טענה 4 (תוצאה)

בהינתן משולש כלשהו, אפשר לבנות משולש שני, אשר צלעותיו תהיינה שוות באורכן לאורכי התיכונים במשולש המקורי וזוויותיו שוות בגודלן לשלוש הזוויות שבין שלושת התיכונים, לפי ההתאמה הנ"ל.

הערה: משולש התיכונים ייקרא גם בכינוי 'הבן' של המשולש המקורי. יש לשים לב שאין אפשרות הבנייה הנ"ל מובנת מאליה. לשם השוואה – לא לכל משולש אפשר לבנות משולש 'בן' משלושת הגבהים.

טענה 5

אם בונים 'בן' גם למשולש התיכונים, אז 'הנכד' המתקבל דומה ל'סבא', ויחס הדמיון הוא $3:4$.

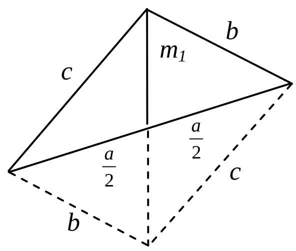
הוכחה:

השוויון הבא נקרא בשם 'שוויון המקבילית':

סכום ריבועי האורכים של האלכסונים במקבילית שווה לסכום ריבועי האורכים של ארבע צלעותיה.[2]

שוויון זה מאפשר לבטא את ריבוע האורך של תיכון לאחת מצלעות משולש בעזרת ריבועי האורכים של הצלעות. אם נסמן את התיכונים לצלעות a, b, c ב-m_1, m_2, m_3 בהתאמה אזי נוכל לקבל למשל:

$$m_1^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$



שרטוט 3

[1] הוכחה מעט יותר ישירה: נשרטט מעגל ברדיוס $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$. נחלק מעגל זה לשלוש זוויות מרכזיות: $2\alpha,2\beta,2\gamma$. משולש המיתרים המתאימים מקיים את הנדרש. (הוצעה ע"י פרופ' עזריאל לוי).

[2] שוויון זה מופיע לעתים כתרגיל בטריגונומטריה בפרק הדן במשפט הקוסינוסים, אך אפשר להוכיח אותו גם ללא שימוש בשיקולים טריגונומטריים תוך שימוש במשפט פיתגורס שלוש פעמים.

עתה, במשולש התיכונים הצלעות הן m_1, m_2, m_3. נסמן את התיכונים לשלוש צלעות אלה ב-m_{11}, m_{21}, m_{31} בהתאמה. על-ידי שימוש בנוסחה לריבוע האורך של התיכון, נחשב את m_{11}^2:

$$m_{11}^2=\frac{1}{4}(2m_2^2+2m_3^2-m_1^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cdot\frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)+2\cdot\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)-\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)\right)=$$

$$=\left(c^2+a^2-\frac{1}{2}b^2+a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{4}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}a^2\right)=\frac{9}{16}a^2$$

מכאן ברור כי: $\frac{m_{11}}{a}=\frac{3}{4}$

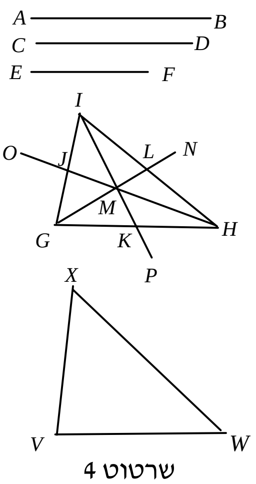
באופן דומה ניתן להראות כי: $\frac{m_{21}}{c}=\frac{3}{4}$; $\frac{m_{31}}{c}=\frac{3}{4}$.

ומכאן ה'נכד' דומה ל'סבא' ויחס הדמיון הוא אמנם 3:4.

מ.ש.ל.

כתוצאה מהדמיון בין ה'נכד' ל'סבא' אפשר לבנות משולש אם נתונים שלושת התיכונים שלו[3]:

נבנה את משולש התיכונים, ונעביר את שלושת התיכונים של משולש זה. אלה הן צלעות ה'נכד'. עתה נאריך כל אחת מצלעות אלה פי 4/3 ונקבל את שלוש צלעות המשולש המבוקש, הסבא. ההכפלה הנ"ל נוחה במיוחד אם משתמשים בתכונה המוכרת, לפיה נקודת מפגש התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס של $1/3:2/3$, כך שאפשר בקלות להוסיף לכל תיכון קטע השווה באורכו ל- 1/3 מאורכו שלו (גם בלי לבנות במפורש את 'הנכד'). כמודגם בשרטוט הבא:



שרטוט 4

[3] קיימות גם דרכים אחרות לביצוע בניה זאת, ללא שימוש במשפט הקודם. ר' למשל קלעי-תוחמן, הנדסת המישור חלק א', עמ' 140, תרגילים 16-17.

AB, CD, EF הם שלושת התיכונים הנתונים.

ΔIGH הוא משולש התיכונים ('הבן').

שלושת התיכונים שלו הוארכו ב- $1/3$ ($ML=LN$ וכו').

ΔXVW הוא המשולש המבוקש ('האב').

תוצאה נוספת של טענה 5 כלולה במשפט הבא:

טענה 6

א. אם בונים 'שושלת' משולשים, בה כל 'בן' הוא משולש התיכונים של 'אביו', אז אורכי הצלעות המתאימות של המשולשים שיש ביניהם קשר של 'סבא' ו'נכד', יוצרים שלוש סדרות הנדסיות מתכנסות בעלות מנה $3/4$.

ב. שטחיהם של **כל** המשולשים בשושלת הנ"ל יוצרים גם הם סדרה הנדסית מתכנסת בעלת מנה $3/4$.

ג. סכומי ריבועי 3 הצלעות של כל המשולשים בשושלת הנ"ל יוצרים גם הם סדרה הנדסית מתכנסת בעלת מנה $3/4$.

הוכחה:

א. תוצאה ישירה של טענה 5.

ב. נתבונן שוב בשרטוט 2. לפי טענה 1 נקבל:

$$S_{\Delta ABC} = 6\cdot S_I = \frac{6\cdot\frac{1}{3}m_3\cdot\frac{2}{3}m_1\cdot\sin\angle O_2}{2} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{m_3\cdot m_1\cdot\sin\angle O_2}{2}$$

מצד שני, לפי טענה 4, אם נשרטט את משולש התיכונים של ΔABC, תהיה הזווית בין הצלעות m_1 ו- m_2 שווה ל- $\angle O_2$ ולכן שטחו של משולש התיכונים הוא:

$$S_{\Delta m_1m_2m_3} = \frac{m_3\cdot m_1\cdot\sin\angle O_2}{2}$$

מכאן מתקבל היחס המבוקש:

$$\frac{S_{\Delta m_1m_2m_3}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{4}$$

ג. נשתמש שלוש פעמים בנוסחה לחישוב אורך התיכון[4]:

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)+\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$$

$$= \frac{1}{4}(3a^2+3b^2+3c^2) = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

מ.ש.ל.

[4] גם השוויון המופיע בהוכחת סעיף זה נמצא כתרגיל בספרי טריגונומטריה שונים, אך ללא המשמעות המופיעה כאן, כחלק מסידרה הנדסית אין סופית. ר' למשל בני גורן, *טריגונומטריה*, עמ' 192, תרגיל 267.

הוכחות בעזרת ווקטורים[5]

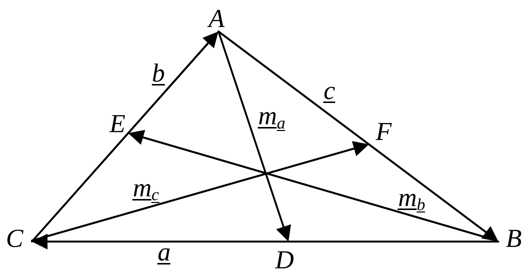
לחלק מהטענות שהוכחו לעיל באמצעים 'קלאסים' ניתן בקלות להציע הוכחות אלגנטיות בעזרת ווקטורים.

נסמן:

$$\overrightarrow{AD}=\underline{m_a}\quad \overrightarrow{BE}=\underline{m_b}\quad \overrightarrow{CF}=\underline{m_c}\qquad \overrightarrow{AB}=\underline{c}\quad \overrightarrow{BC}=\underline{a}\quad \overrightarrow{CA}=\underline{b}$$

(ר' שרטוט 5).

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ יוצרים משולש. נרצה להראות שגם $\underline{m_1}$, $\underline{m_2}$ ו- $\underline{m_3}$ יוצרים משולש. התנאי לכך ששלושה ווקטורים שאינם קולינאריים, ייצרו משולש הוא שסכומם אפס.



שרטוט 5

נחבר ווקטורית את שלושת התיכונים:

$$\underline{m_a}+\underline{m_b}+\underline{m_c} =$$

$$= \left(\underline{c}+\frac{1}{2}\underline{a}\right)+\left(\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}\right)+\left(\underline{b}+\frac{1}{2}\underline{c}\right)=$$

$$= \frac{3}{2}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) = \underline{0}$$

קיבלנו כי אכן הסכום הווקטורי של תיכוני המשולש המקורי הוא אפס, ולכן ניתן לבנות משולש שאלה צלעותיו. זהו חלק של טענה 4 לעיל.

נסמן את התיכונים לצלעות $\underline{m_a}$, $\underline{m_b}$, $\underline{m_c}$ של משולש התיכונים ב- $\underline{m_1}$, $\underline{m_2}$, $\underline{m_3}$ בהתאמה. נחשב, לדוגמה, את $\underline{m_1}$:

$$\underline{m_1} = \underline{m_b}+\frac{1}{2}\underline{m_a} = \left(\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\underline{c}+\frac{1}{2}\underline{a}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})+\frac{5}{4}\underline{a} =$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})+\frac{3}{4}\underline{a} =$$

$$= \underline{0}+\frac{3}{4}\underline{a} = \frac{3}{4}\underline{a}$$

[5] בעקבות הערה חשובה של דר' אלה שמוקלר

באופן דומה ניתן להראות גם כי:

$$m_3 = \frac{3}{4}c \quad ; \quad m_2 = \frac{3}{4}b$$

ומכאן הוכחה של טענה 5 לעיל.

פרק שני

בעקבות התוצאות הקודמות, מתעוררת השאלה הבאה: האם הכרחי הדילוג מ'סבא' ל'נכד' בסידרה ההנדסית של אורכי צלעות המשולשים, או, בניסוח אחר – האם קיים משולש הדומה למשולש התיכונים שלו?

קיימת תשובה טריביאלית אחת: משולש שווה צלעות, עבורו יחס הדמיון יהיה $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, אך זאת אינה האפשרות היחידה.

טענה 7

משולש דומה למשולש התיכונים שלו אם ורק אם ריבוע האורך של אחת הצלעות שלו שווה לממוצע של ריבועי האורכים של הצלעות האחרות.

הוכחה:

נראה ראשית כי אם $a \le b$ אז $m_a \ge m_b$. ואמנם, לפי הנוסחה לחישוב ריבוע האורך של התיכון:

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) - \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) =$$

$$= \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$$

לכן, אם אגף ימין חיובי, אז אגף שמאל חיובי ולהיפך. במלים אחרות, אם שתי צלעות שונות באורכן, אז התיכון לצלע הקצרה ארוך מחברו.

לפיכך, אם משולש התיכונים דומה למשולש המקורי, ומתקיים $a \le b \le c$ אז היחסים בין הצלעות הם:

$$\frac{m_c}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_a}{c} = k$$

לכן נוכל להציב בשלוש התבניות עבור ריבועי האורכים של תיכוני המשולש $m_c = ka, m_b = kb, m_a = kc$ ולקבל:

$$m_a^2 = k^2c^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$m_b^2 = k^2b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$m_c^2 = k^2a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$$

על-ידי חיסור המשוואה השלישית מהראשונה נקבל:

$$k^2(c^2 - a^2) = \frac{1}{4}(3c^2 - 3a^2) = \frac{3}{4}(c^2 - a^2)$$

לכן, גם אם $c \ne a$, נקבל שוב את יחס הדמיון $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.[6]

אם נציב עתה ערך זה של k בכל אחת משלוש התבניות הנ"ל לחישוב התיכונים, ונבצע קצת אלגברה לא מסובכת, נקבל אותו שוויון: $a^2 + c^2 = 2b^2$

כלומר: $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$[7]

בכיוון השני, נניח ששלוש צלעות במשולש מקיימות:

$$b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$$

כלומר: $a^2 + c^2 = 2b^2$

על-ידי הצבות מתאימות בשלוש התבניות של ריבועי האורכים של תיכוני המשולש נקבל:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{3}{4}c^2$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) = \frac{1}{4}(2(a^2 + c^2) - b^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(4b^2 - b^2) = \frac{3}{4}b^2$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2a^2 - c^2) = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2a^2 - c^2) = \frac{3}{4}a^2$$

מכאן אפשר לקבל את הפרופורציה:

$$\frac{m_c}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן משולש התיכונים אמנם דומה למשולש המקורי. מ.ש.ל.

למשולשים בעלי תכונה זו יש, אם כך תכונה מעניינת: ריבועי האורכים של צלעותיהם יוצרים סדרה חשבונית, ואילו האורכים של צלעותיהם ושל **כל** צאצאיהם יוצרים שלוש סדרות הנדסיות מתכנסות!

דוגמא:

ניקח משולש שצלעותיו הן באורך $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ (זהו, דרך אגב, משולש ישר זווית).

אורכי התיכונים הם בהתאמה $\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ וקל לוודא שאמנם מתקיימת הפרופורציה:

$$\frac{3/2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{1}}$$

6 לא בדקנו את האפשרות שהמשולש שו"ש אך לא שו"צ, אך לא קשה להשתכנע שבמקרה כזה משולש התיכונים אינו יכול להיות דומה למשולש המקורי.

7 באופן כללי, אם מתקיים יחס כזה בין שלושה מספרים, אז קוראים ל-b בשם **הממוצע הריבועי** של a ו-c.

מהו התנאי לקיומם של משולשים בעלי תכונה זו? הטענה הבאה עונה על השאלה.

טענה 8

אם שלוש צלעות משולש, $a \le b \le c$, מקיימות את השוויון: $a^2+c^2=2b^2$, אז היחס בין אורך הצלע הבינונית לאורך הצלע הקצרה נמצא בתחום:

$$1 \le \frac{b}{a} < \sqrt{3}+1$$

הוכחה:

לשם הפשטות נקבע כי אורך הצלע הקצרה a הוא 1.

לפיכך מתקיים השוויון: $1+c^2=2b^2$ לכן $c^2=2b^2-1$

כמו כן מתקיים אי-שוויון המשולש: $1+b>c$

לכן: $(1+b)^2>c^2$

על-ידי הצבה נקבל: $(1+b)^2>2b^2-1$

פתרון אי-שוויון ריבועי זה הוא: $1-\sqrt{3}<b<1+\sqrt{3}$,

אבל $1\le b$, ומכאן השלמת ההוכחה של האי-שוויון הכפול.

מ.ש.ל.

נכנה משולש הדומה למשולש תיכוניו בשם *משולש תיכוני* (medianic triangle).

האם קיימות תכונות גיאומטריות 'טהורות' למשולש תיכוני, מלבד התבנית האלגברית $a^2+c^2=2b^2$ הקושרת את שלוש צלעותיו? כיצד אפשר לבנות משולש תיכוני?

בהמשכו של פרק זה אשתדל לענות על שאלות אלה. לשם הפשטות, 'ננרמל' כל משולש תיכוני על-ידי הקביעה שאורך הצלע הבינונית יהא 1. את שלוש הצלעות במשולש 'מנורמל' נסמן ב-

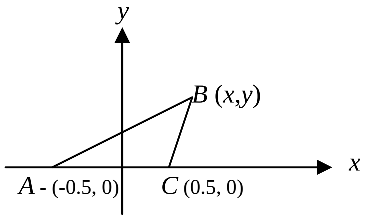
$$\hat{a}=\frac{a}{b},\ \ \hat{b}=1,\ \ \hat{c}=\frac{c}{b}$$

והתבנית הנ"ל תהיה, כמובן, $\hat{c}^2+\hat{a}^2=2$.

ניקח קטע באורך $\hat{b}=1$ ונשרטט את כל משולשי התיכונים אשר קטע זה הוא הצלע הבינונית המשותפת שלהם. (בהמשך יתברר שבנייה כזאת אמנם אפשרית).

מהו המקום ההנדסי של כל הקדקודים הנותרים?

תשובה, המפתיעה בפשטותה, מתקבלת בעזרת גיאומטריה אנליטית. מטעמי סימטריה נמקם את ראשית הצירים באמצע הצלע $\hat{b}$. ושוב, מטעמי פשטות, נטפל תחילה רק במקרים בהם המשולש נמצא מעל צלע זו, כך שהצלע $\hat{c}$ משמאל והצלע $\hat{a}$ מימין. את הקדקוד הנותר נסמן ב - $B(x,y)$. (ר' שרטוט 6)



שרטוט 6

החשבון הבא מדבר בעד עצמו:

$$(x+0.5)^2+y^2=\hat{c}^2$$

$+$

$$(x-0.5)^2+y^2=\hat{a}^2$$

$$2x^2+0.5+2y^2=\hat{c}^2+\hat{a}^2=2$$

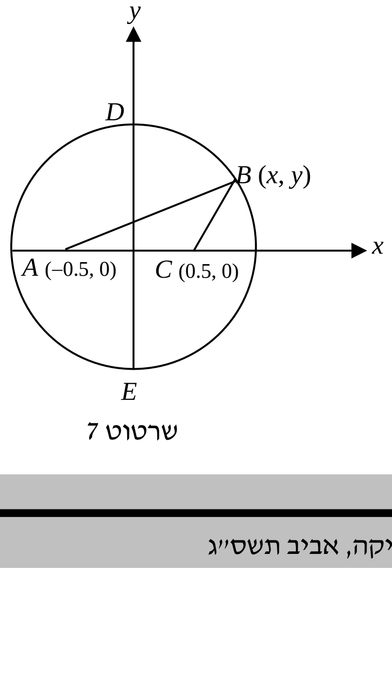
מכאן נקבל מייד: $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

אם נאפשר עתה למשולש להיות גם מתחת לצלע $\hat{b}$, ונאפשר לצלע הארוכה יותר, $\hat{c}$, להיות מימין, ולצלע הקצרה, $\hat{a}$, משמאל, נגלה כי כל הקדקודים B מונחים על מעגל בעל מחוג שאורכו $\frac{\sqrt{3}}{2}$!

אפשר בקלות להראות שגם ההיפך נכון: אם נחבר נקודה כלשהי שעל המעגל הקנוני הנ"ל (פרט לשתי נקודות החיתוך של ציר x), עם שתי הנקודות A ו-C, נקבל משולש תיכוני.

ואמנם,

$$\hat{c}^2+\hat{a}^2=(x+0.5)^2+y^2+(x-0.5)^2+y^2=$$
$$2x^2+0.5+2y^2=2(x^2+y^2)+0.5=$$
$$2\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=2=2\hat{b}^2$$



שרטוט 7

מכאן קיבלנו את המקום הגיאומטרי של קדקודי הזווית הבינונית במשולש תיכוני מנורמל. (ראה ציור 7). אפשר עתה לנסח טענה בדבר המקום הגיאומטרי הקשור למשולש תיכוני כלשהו, אך, לצורך הפשטות, ננסח תכונה זאת כך:

טענה 10

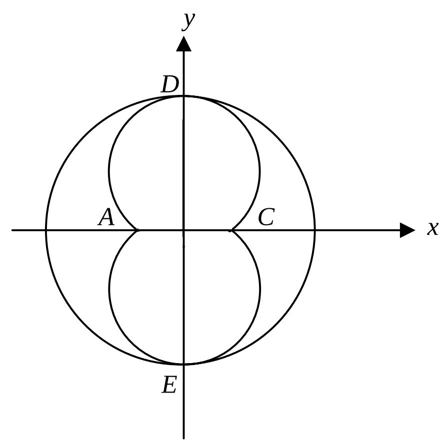
משולש הוא משולש תיכוני, אם ורק אם הקדקוד מול הצלע הבינונית מונח על מעגל שמרכזו אמצע צלע זאת, ואורך מחוגו גדול פי $\frac{\sqrt{3}}{2}$ מאורכה של צלע זו.

טענה 11

המידה של הזווית הבינונית במשולש תיכוני איננה עולה על $60°$.

הוכחה:

נתבונן שוב בשרטוט 7. הצלע AC נראית מהנקודות D ו- E בזווית בת $60°$. נוסיף לשרטוט 7 שני מעגלים העוברים האחד דרך A, C, D והשני דרך A, C, E (כמתואר בשרטוט 8).



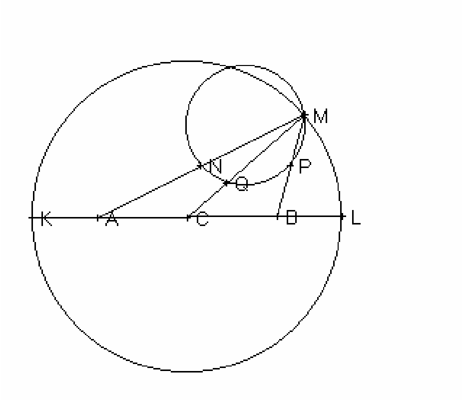
שרטוט 8

שתי הקשתות הגדולות בשני המעגלים שהוספנו הנשענות על צלע זו כמיתר, ועוברות דרך הנקודות D ו- E, הן המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים את הקטע AC בזווית של $60°$. לפיכך, יתר הנקודות שעל המעגל הקנוני, שהוא חיצוני למעגלים שהוספנו, פרט לנקודות ההשקה D ו- E, הן חיצוניות לשתי קשתות אלה, ולכן מנקודות אלה רואים את הצלע בזווית הקטנה מ- $60°$.

הערה: קל להשתכנע שאין מגבלות כלשהן לגבי גודלן של שתי הזוויות האחרות.

טענה 12

קדקוד הזווית הבינונית של משולש תיכוני, אמצעי הצלעות הכולאות זווית זאת, ונקודת המפגש של שלושת התיכונים נמצאים על מעגל אחד. (ר' שרטוט 9). הוכחת טענה זאת נשארת כתרגיל.



שרטוט 9

בניות של משולשים תיכוניים

נעיר תחילה כי בכל בנייה גיאומטרית של משולש נחוצים שלושה אילוצים, או נתוני בנייה; בדרך כלל זוויות, צלעות או קטעים אחרים הקשורים למשולש. כאשר בונים משולש תיכוני, תכונתו המיוחדת היא אילוץ אחד, ולכן נחוצים רק שני נתוני בנייה נוספים.

ניתן למיין את הבניות של משולשים תיכוניים לשלוש קבוצות, לפי נתוני הבנייה, ובהתאם – לפי שיטת הבנייה, לשלש הקבוצות:

א. נתונה הצלע הבינונית b

ב. נתונה צלע אחרת, a ואחת מזוויות המשולש.

ג. נתונות שתי הצלעות זו הקצרה ביותר וזו הארוכה ביותר, a ו-c בסימון הקודם

המופיעות בשלש המסגרות הבאות.

א. נתונה הצלע הבינונית b

במקרים אלה, שרטוט המעגל המתואר בטענה 10 הוא כלי עזר עיקרי. נכנה מעגל זה בשם 'מעגל הקדקוד הבינוני'[8] ובראשי תיבות מק"ב.

כל אחת משלוש הבניות המופיעות בטבלה הבאה, מתחילה בבניית מק"ב סביב אמצע b.

הנתון הנוסף	תמצית תאור הבנייה	הגבלות
צלע נוספת a. (אין הכוונה לצלע הקצרה דווקא)	קשת ברדיוס a סביב אחד מקצוות b. הקדקוד השלישי ימצא על מפגש המק"ב והקשת.	לפי הוכחת **טענה 8** לעיל, נקבל את ההגבלה: $\sqrt{3}-1<\frac{b}{a}\le\sqrt{3}+1$
זווית סמוכה ל- b. (למשל $\hat{A}$)	בניית $\hat{A}$. הקדקוד השלישי ימצא על מפגש המק"ב וקרן הזווית.	
הזווית מול $\hat{B}$	מעגל הראיה ב- $\hat{B}$ של קטע b. הקדקוד השלישי ימצא על מפגש המק"ב ומעגל הראיה.	לפי טענה 11, הבנייה אפשרית אם ורק אם $\hat{B}$ איננה גדולה מ- $60°$.

ב. נתונה צלע אחרת, a ואחת מזוויות המשולש

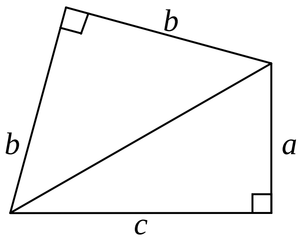
במקרה זה נבנה תחילה משולש דומה למבוקש: ניקח קטע באורך $\hat{b}$ ונבנה מק"ב סביב אמצעו.

(אין כל הגבלות בנייה).

הנתון הנוסף	תמצית תאור הבנייה
$\hat{C}$	נבנה את $\hat{C}$ בקצה הקטע $\hat{b}$. נחבר את הקצה השני של הקטע עם נקודת המפגש של המק"ב וקרן הזווית. קבלנו את $\hat{B}$. עתה נבנה את המשולש המבוקש לפי הצלע a ושתי הזוויות שלידה.
$\hat{A}$	דומה מאד לבניה הקודמת.
$\hat{B}$	דומה לבניה לפי צלע b וזווית $\hat{B}$ בסעיף הקודם, אלא שגם כאן בונים תחילה משולש דומה למבוקש על קטע באורך $\hat{b}$ ואחר-כך את המשולש המבוקש לפי הצלע a ושתי הזוויות שלידה.

ג. נתונות שתי הצלעות זו הקצרה ביותר וזו הארוכה ביותר, a ו- c בסימון הקודם[9]

נבנה משולש ישר זווית שניצביו הם a ו- c. על היתר של משולש זה נבנה משולש ישר זווית נוסף, שווה שוקיים, כך שהיתר משותף לשני המשולשים. השוק של המשולש השני היא הצלע השלישית, b, של המשולש המבוקש. (ר' שרטוט 10).



שרטוט 10

הבנייה לפי שלושת הקטעים a, b ו- c אפשרית, כמובן, רק אם מתקיים אי שוויון המשולש. התבוננות בשרטוט 10 לעיל מראה שהיחס בין a ו- c מקיים את האי-השוויון הבא:

$$1\ge\frac{a}{c}>\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$$

(a מסמנת כאן את הצלע הקצרה מבין השלוש) זהו התנאי לכך שהבנייה של המשולש תתאפשר. (ניתן להגיע לאותה מסקנה גם על-ידי חישוב דומה להוכחת טענה 8 לעיל.)

[8] זהו, כמובן, קיצור לשון.

[9] בניית הממוצע הריבועי של שני קטעים נתונים קשורה לבעיות נוספות בגיאומטריה, למשל הבעיה הבאה: בהינתן טרפז כלשהו, איך ניתן לחלקו לשני טרפזים שווי שטח על-ידי קטע המקביל לבסיסים? ניתן להוכיח שקטע החלוקה המבוקש, המקביל לבסיסי הטרפז וחוצה את שטחו, הוא הממוצע הריבועי של שני הבסיסים.