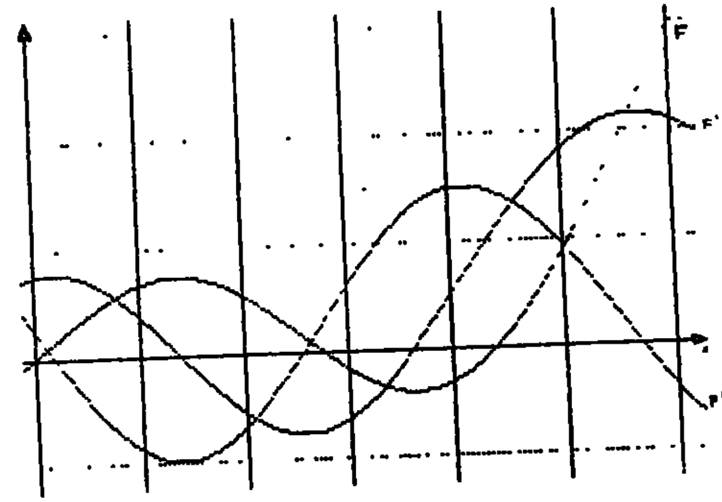
לראות, לאמוד, לדון ולהבין

מאת: עמוס ארליך ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת ת"א

במאמר זה נעלה מערכת הצעות שניתן להשתמש בהן לחזרה על רעיונות מרכזיים של האנליסה הנלמדים בחטיבה העליונה של ביה"ס התיכון. אין מדובר כאן בחזרה גרידא, אלא בחזרה שיש בה קישור של התבוננויות חדשות ומשפטים מוכרים, ויש בה נסיון להפוך דברים שהיו טעונים לימוד לדברים שחשים בהם באופן ישיר.
סדר ההצעות ניתן לשינוי, ובפרט, ניתן לדחות את ג עד אחר ד.

כולם מכירים בחשיבות הכרתן של עובדות מתמטיות, וכן בזה שהטמעת אינטואציות מתמטיות היא תנאי הכרחי לפעילות מתמטית יעילה. השימוש בגרפים לתיאור תופעות ולהצגת קשרים שבין תופעות הפך להיות נחלת הכלל, ושוב אינו מיוחד לעוסקים במתמטיקה. טכניקה של "מדרש תמונה" שבה מנחה המורה את התלמידים להתבונן בתמונה ולראות בה יותר ויותר דברים, מיושמת מזה שנים, ובהצלחה מרובה, על-ידי מורות לגיל הרך. ההצעות שתועלינה להלן אינן, אפוא, אלא פיתוח של רעיונות המוכרים למורים ומיושמים על ידם, והן אינן מיוחדות לא לתוכנית החדשה ולא לישנה.

על גליון בריסטול נשרטט גרפים של f, f' ו- f" כבציור המצורף (נתונים יפורטו להלן בנספח). מומלץ לשרטט את הגרפים בצבעים שונים. למשל: f בכחול, f' באדום ו- f" בירוק. גרפים אלה ישמשו בסיס לחזרה ולהתבוננות ודיון בנושאים מתמטיים שונים. להלן הציור, ואחריו שאלות והבהרות שניתן להציען לפני התלמידים.



נמליץ בפני הקורא לצבוע, בצבעים שונים, גם את הגרפים שבשרטוט שלנו.

א. <u>חשבון דיפרנציאלי</u>

1. היכן יש ל-f מקסימום (מקומי) והיכן מינימום? מה קורה ל- 'f באותם ערכי x? היכן יש ל- 'f מקסימום ומינימום? מהם ערכי "f שם?

2. נשוב ונתבונן בסביבת נקודת המקסימום של f. מה "עושה" f לפני נקודת המקסימום (משמאלה) ומה אחרי אותה נקודה? אילו סוגי ערכים מקבל f'(x) לפני ואחרי אותה נקודה?

3. פרט לזה ש- 'f שלילית משמאל לנקודה הנידונה וחיובית מימינה, ניתן לראות ש-'f יורדת שם. כיצד מתבטאת ירידתה של 'f בהתנהגותה של f?

4. נעבור אל נקודת המינימום של f. כיצד מתנהגות f ו- 'f בסביבת נקודה זאת?

5. לאור זה, מדוע שלילית "f בנקודת המקסימום של f וחיובית בנקודת המינימום?

6. נחזור אל הגרף של f ונראה, כי באזור אחד הוא גבנוני ובאחר שקערורי (קמור וקעור). מה על 'f באיזור הראשון ומה בשני? מה על "f באיזור הראשון ומה בשני?
מה קורה בנקודת המעבר?

7. נערוך "טיול" לאורך הגרף של f, משמאל לימין, ונציין לעצמנו מתי העלייה תלולה ומתי מתונה, מתי ירידה מתונה ומתי תלולה, ומה "עושה" 'f במקביל. בטיול שני נעקוב אחר הקשרים שבין 'f ונגזרתה ''f.

*8. עיון באיזורים הימניים ביותר של f ו- 'f יראה משהו נוסף: כאשר השיפוע גדול, שינוי קטן בשיפוע גורם שינוי זעיר בלבד ב ז ו ו י ת השיפוע, כי $(\arctan(x))' = 1/(x^2 + 1)$; הפעם הנוסחה היא העוזרת להבין את מה שרואים.

ב. חשבון אינטגרלי

1. נתבונן בתחום הכלוא בין הגרף של 'f ובין ציר x, בין x=4 ובין x=6, ונאמוד את שטחו.

בפעם הראשונה יהיה צורך בעזרה: התחום כולל ריבוע-יחידה שלם, שני ריבועים כמעט שלמים ושתי תוספות. מקצת מהתוספת העליונה ישלים את הריבוע השכן לה. השאר יצטרף לתוספת השנייה או יעבוד ישירות להשלמת הריבוע החסר השני.

השטח שאמדנו צריך לשוות ל- $f(6) - f(4)$. בדוק אם אמנם כך הוא הדבר.

2. תרגילית נוספים מסוג זה יתיחסו לשטח הכלוא בין הגרף של "f ובין ציר ה x, בין נקודת החיתוך האמצעית שלהלן ובין הימנית, או בין $x = 3$ ובין $x = 4$, ולהפרש הערכים המתאימים של 'f.

3. כשנטפל בשטח המוגבל ע"י "f מתחת לציר x, נמצא כי הפרש ערכי 'f יהיה שלישי! זה מתקשר עם העובדה שכאשר "f שלילית, 'f יורדת.

4. כעת נתבונן בתחום שבין הגרף של 'f ובין ציר x, שגבולו השמאלי הוא ב- 0, וגבולו הימני הוא נקודה x ה"נוסעת" ימינה.

השטח יהיה $f(x) - f(0)$, ומכיוון שאצלנו $f(0) = 0$, יהיה השטח שווה ל- $f(x)$. נעקוב אחר השינויים בשטח, ובמקביל נעקוב אחר שינוי $f(x)$.

אחרי "טיול" הסתכלותי אחד נעיין במה שקורה כאשר x גדל בפסיעה Δx קטנה: את מידת הגידול של $f(x)$ נסמן $\Delta f(x)$.

לשטח בו אנו מתבוננים תתווסף "פרוסה" הקרובה למלבן שרחבו Δx וגבהו $f'(x)$, לכן שטחה הוא, בקירוב, $f'(x) \cdot \Delta x$.

השוויון המקורב $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ אינו מפתיע (כי $f'(x) = \Delta f(x)/\Delta x$). אדרבה, הוא מסביר מדוע סך כל השטחים המצטברים שווה להפרש הכולל שבין ערכי f.

ג. מי הן הפונקציות?

1. הקרובה ביותר למשהו מוכר היא "f. היא מזכירה סינוס, לכן נשער שהביטוי המתאר אותה יכיל sin. נכתוב טיוטה ראשונה:

$$y = \ldots\sin\ldots$$

2. גרף הסינוס מתנודד תנודות סימטריות ביחס לציר x בעוד שהפונקציה שלנו משתרעת בין 1 - ובין 1.5 ו"ציר האמצע" שלה הוא בגובה 1/4. לכן נתקן את הטיוטה ונכתוב:

$$y = 1/4 + \ldots\sin\ldots$$

3. החלק מיוצג כ ע ת ע"י ...sin... נמוך ב- 1/4 מהגרף של "f, אך בהשוואה לסינוס, הוא נראה מהופך מעלה-מטה, לכן נהפוך סימן ונכתוב:

$$y = 1/4 - \ldots\sin\ldots$$

4. ועדיין, תחום התנודות של הפונקציה שלנו גדול פי אחד ורבע מזה של סינוס. לכן נכתוב:

$$y = 1/4 - 5/4 \cdot \ldots\sin\ldots$$

5. החלק המיוצג כעת ע"י ...sin... כבר דומה למדי לגרף הסינוס: הוא יוצא מראשית הצירים, עולה אל 1, חוזר אל ציר x, יורד אל 1-, חוזר אל הציר ומתחיל מחזור חדש. (לתיאור "f אנו זקוקים למשהו בעל תנודה יותר גדולה. לזאת דואגת ההכפלה ב-(4/5). ואולם המחזור החדש אינו מתחיל כאשר $x = 2\pi$ אלא כאשר $x = 5.5$.

נזכור, כי $\sin cx$ שונה מ $\sin x$ רק באורך המחזור, לכן מבוקש c כך שכאשו x שווה 5.5, שווה cx ל- 2π.

לכן $c = 2\pi/5.5 = 1.142$

לכן $y = 1/4 - 5/4 \cdot \sin(2\pi x/5.5)$

כלומר: $f''(x) = 0.25 - 1.25 \cdot \sin(1.142\,x)$

6. מכאן שבשביל d מסויים

$$f'(x) = 0.25\,x + 1.25/1.142 \cdot \cos(1.142\,x) + d$$

למציאת d נשתמש בזה ש- $f'(0)$ הוא, בקירוב, 0.75, ונקבל $d = 0/345$.

כלומר: $f'(x) = 0/25\,x - 0.345 + 1.095 \cdot \cos(1.142x)$

7. נשרטט (בפועל או בהנחת סרגל בלבד) את הגרף של

$$y = 0.25\,x - 0.345$$

ונראה שהגרף של 'f הוא, אכן, תנודה גלית הרוכבת על ישר זה.

8. מהלך דומה יתן

$$f(x) = x^2/8 - 0/345\,x + 0.959\sin(1.142\,x)$$

זהו גל הרוכב על פרבולה.

ד. <u>מה היה קורה אילו</u>

אילו היינו מזיזים את הגרף של f כלפי מעלה או כלפי מטה, לא היה הדבר משנה את השיפועים, ולכן f' היתה נשארת כמות שהיא, והוא הדין ל- "f. הזזת f' כלפי מעלה לא היתה משנה את "f, אך היתה מחייבת שינויים ב- f. "נרים", אפוא, את f'ב- 1/3 יחידה ונמצא תוצאות העולות מזה.

1. שתי נקודות החיתוך של f' עם ציר x תתקרבנה זו אל זו (ואל $x = 2.5$), אך בכל אחת מהן ימשיך הגרף לעבור מצדו האחד של הציר אל צדו השני. מה אומר הדבר על עלייה וירידה ומקסימום ומינימום של f בנקודות החדשות?

2. לכל אורך הגרף של f היה שיפועו עולה (ב-1/3). אם נשאיר את $f(0)$ במקומו, היכן, בקירוב, יחתוך הגרף את $x = 1$?

3. ירידה מתונה תהפוך לעלייה מתונה, ורק ירידה יותר תלולה תישאר ירידה, אך תתמתן. היכן, בקירוב, תחל הירידה הראשונה? היכן נפגוש את $x = 2$?

4. כיצד ייראה הגרף של f בין $x = 2$ ובין $x = 3$? הראה באצבע!

5. מה יהיה $f(6)$?

6. התוכל לקבל תוצאות אלה בשיקולים "אינטגרליים" המדברים על $f(x)$ כעל השטח המצטבר תחת f'?

7. נוסיף ונגביה את הגרף של f' עד שישיק לציר ה x בנקודת המינימום שלו. נקבל נקודה שבה $f'(x) = 0$, אך f' חיובית בשני צדדיה. מה קורה שם ל- f?

<u>נתונים לצורך שרטוט הגרפים</u>

X	F(X)	F'(X)	F''(X)
-.2	-.144	.671	.533
0	0	.749	.25
.2	.153	.771	-.034
.4	.304	.737	-.302
.6	.444	.652	-.542
.8	.563	.523	-.74
1	.652	.36	-.887
1.2	.705	.172	-.975
1.4	.72	-.026	-1
1.6	.695	-.223	-.96
1.8	.632	-.406	-.856
2	.535	-.562	-.696
2.2	.41	-.681	-.486
2.4	.266	-.754	-.238
2.6	.112	-.774	.035
2.8	-.04	-.739	.319
3	-.18	-.647	.6
3.2	-.295	-.5	.863
3.4	-.376	-.303	1.093
3.6	-.413	-.065	1.28
3.8	-.4	.206	1.414
4	-.33	.497	1.486
4.2	-.2	.796	1.495
4.4	-.011	1.091	1.439
4.6	.235	1.368	1.321
4.8	.534	1.616	1.148
5	.879	1.824	.927
5.2	1.261	1.985	.672
5.4	1.67	2.092	.395
5.6	2.095	2.143	.11
5.8	2.524	2.137	-.168
6	2.946	2.077	-.424
6.2	3.352	1.97	-.645
6.4	3.731	1.822	-.819