# התנהגות אלגוריתמית בלמידת מתמטיקה
## (חלק שני)

מאת: שלמה וינר

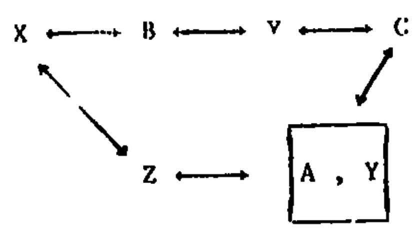
בחלק הראשון של מאמר זה[1] הצגנו מספר הנחות מקובלות, לדעתנו, על מורים רבים ואנשי הוראת מתמטיקה באשר לדרכי החשיבה של תלמיד המתמטיקה. אם נשאל את עצמנו מה אנו מצפים, למשל, מתלמיד שסיים קורס באלגברה, אנו עשויים להשיב כי צריכים להימצא אצלו:

A – מאגר של אלגוריתמים;

B – מנגנון המנתח בעיות נתונות וקובע את הטיפוס והמבנה שלהן;

C – מנגנון המתאים אלגוריתם-פיתרון לבעיות לאחר שהסוג והמבנה שלהן נקבעו.

כאשר בעיה מתמטית X מוצגת לתלמיד, אמור להתרחש תהליך זה: הבעיה X מפעילה את המנגנון B הקובע את הטיפוס והמבנה שלה; נקרא להם Y. Y מפעיל את המנגנון C הפועל על Y ועל מאגר האלגוריתמים A, ובוחר מתוכו אלגוריתם Z לפיתרון X. בסופו של דבר מופעל Z על X כדי לקבל את התשובה הסופית. ובשרטוט·




השתמשנו בשרטוט בחצים דו-כיווניים כדי להצביע על כך שבמנגנונים יכולים להתרחש מספר תהליכי משנה של בחינה ובחינה מחדש לפני שמתקבלת החלטה סופית בדבר טיפוס השאלה, המבנה שלה וסוג האלגוריתם המתאים לפיתרונה. למותר לציין, כי המודל שאנו מציגים כאן לתהליך פיתרון בעיה שגרתית הוא פשוט במידה קיצונית ויש להסתכל עליו כעל סכימה גסה בלבד. למרות זאת הוא עשוי להביא תועלת מסויימת כאשר מנסים לנתח את התנהגות תלמידי המתמטיקה בפותרם בעיות.

---

ראה על"ה 2, עמ' 10–15.

התהליכים המתוארים במודל הנ"ל אינם מתייחסים לשאלת "הידיעה מדוע" שהוזכרה בחלק הקודם של המאמר. אלה תהליכים שאנו מצפים כי יתרחשו כשהתלמיד פותר בעיה מתמטית טיפוסית הניתנת לו בבחינת שליש, בחינה שנתית או בחינת בגרות - בחינות שההצלחה בהן משמשת קנה מידה לשליטה או לאי-שליטה בחומר הנלמד. בבחינות כאלה, כשמוצגת לתלמיד בעיה טיפוסית, אנו מצפים שהוא ידע לנתח אותה, לקבוע את סוגה והמבנה שלה, להתאים לה אלגוריתם-פיתרון ולהשתמש בו לפיתרון הבעיה.

כבר אמרנו בסוף החלק הקודם של המאמר, כי תהליכים אלה (התנהגות אלגוריתמית אמיתית) אילו התרחשו, היו צריכים להשביע את רצוננו גם בהעדרה של ידיעת "מדוע". למרבית הצער, קיימים תהליכים אחרים, פשוטים יותר, היכולים להביא לתלמיד את ההצלחה המיוחלת בבחינות, ומספר ניכר של תלמידים יעדיף אותם על התהליכים האלגוריתמים האמיתיים שתיארנו.

### 3. <u>ההתנהגות האלגוריתמית לכאורה</u>

כאשר מורה מלמד אלגוריתם, הוא מביא מספר דוגמאות לשימוש בו. חלק מדוגמאות אלה יכולות להיחשב כטיפוסיות. במקרה של שטח המלבן שבו עסקנו בחלק הקודם של המאמר, יכולה הדוגמה הבאה להיחשב טיפוסית.

$X_5$ : מהו שטחו של מלבן שצלעותיו 7 ס"מ ו- 5 ס"מ?

נחשוב כעת על תלמיד שאינו יודע את האלגוריתם לחישוב שטח מלבן, דהיינו, אם נשאל אותו כיצד מחשבים את שטחו של מלבן הוא לא ידע לומר: "שטח מלבן שווה למכפלת שתי צלעותיו", או משהו השקול לכך. למרות זאת, יוכל תלמיד זה לפתור בעיות דומות ל $X_5$ על סמך חיקוי הפיתרון של בעיות שאת פיתרונן ראה בעבר. במקרה זה יהיו בידי התלמיד:

A' - מאגר של דוגמאות טיפוסיות ותהליכי פיתרון;

B' - מנגנון הקובע לאיזה מבין הדוגמאות ב- A' דומה בעיה נתונה.

כאשר בעיה מתמטית X מוצגת לתלמיד יתרחש תהליך כזה:
X תגרום ל B' לפעול על A'. ב– A' תימצא בעיה שדרך פיתרונה הוא Z'. ייעשה חיקוי ל Z' על מנת לפתור את X. ובשרטוט:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & B' \arrow[r] & A' \arrow[dl] \\ & Z' \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

גם כאן, כבמקרה של התנהגות אלגוריתמית אמיתית, המודל שאנו מציעים הוא פשוט במידה קיצונית. נמחיש אותו בעזרת דוגמה. נניח כי הבעיה $X_6$ מוצגת לתלמיד.

$X_6$ : מהו שטחו של מלבן שצלעותיו הן 4 ס"מ ו 3 ס"מ?

קו מחשבות היפותתי לפיתרון בעיה זו יכול להיות:

(1) זוהי שאלת שטח הדומה ל $X_5$.

(2) בשאלות כאלה כופלים את שני המספרים שבשאלה. המספרים כאן הם 4 ו 3.

(3) התשובה תהיה $12 = 4 \cdot 3$.

נקרא לתהליך מסוג זה בשם **ת ה ל י ך א ל ג ו ר י ת מ י ל כ א ו ר ה.**
במקרה המיוחד דלעיל הוא שונה מהתהליך האלגוריתמי האמיתי רק בשלב אחד.
במקום (2) יופיע בתהליך האלגוריתמי האמיתי:

(2') השטח של מלבן הוא מכפלת צלעותיו. הצלעות כאן הן 4 ו 3.

שים לב כי הן (1),(2),(3) והן (1),(2'),(3) יביאו לאותה תוצאה במקרה של $X_6$. אולם, אם במקום $X_6$ תוצג לתלמיד הנ"ל $X_4$ (מהו שטחו של מלבן שאחת מצלעותיו 4 ס"מ והיקפו 12 ס"מ?), אזי תהליך הפיתרון האלגוריתמי לכאורה יביא גם כאן את התלמיד למכפלת שני המספרים, כלומר לתשובה שגויה.

התהליך האלגוריתמי לכאורה יביא את התלמיד לתשובות נכונות בחלק מהמקרים ולתשובות שגויות במקרים אחרים. כיוון שלבעיות רבות המופיעות במבחנים יש מבנה דומה לזה של הבעיות הטיפוסיות המוצגות על-ידי המורה, הרי שהתלמיד שהתנהגותו אלגוריתמית לכאורה יוכל להגיע להצלחה סבירה בקורסי המתמטיקה.

הוא לא יהיה תלמיד מצטיין, אבל בוודאי יוכל הוא להיות תלמיד בינוני. שאלות נוסח $X_4$ נחשבות בדרך כלל לשאלות בלתי הוגנות ולכן יופיעו אך מעט במבחנים. אולם, ברור כי רק באמצעות שאלות נוסח $X_4$ ניתן להבחין בין התנהגות אלגוריתמית אמיתית להתנהגות אלגוריתמית לכאורה.

בחלק הקודם של המאמר טענו כי התנהגות אלגוריתמית אמיתית עשויה להיות מלווה ידיעה או אי-ידיעה של המושגים המופיעים בבעיה נתונה. דבר זה נכון גם בשביל התנהגות אלגוריתמית לכאורה. תיאורטית, לא חייב להיות קשר בין סוג ההתנהגות שאדם בוחר בשעת פיתרון בעיה לבין ידיעתו או אי-ידיעתו את המושגים המופיעים בבעיה. תיאורטית, יכול אדם לנהוג באופן אלגוריתמי אמיתי במצב מסויים, לדעת את המושגים ו"לדעת מדוע", בעוד שבמצב אחר עלול הוא לנהוג באופן אלגוריתמי לכאורה. הבחירה בין שתי ההתנהגויות, כשזו קיימת, תלויה בהקשר האינטלקטואלי. היא תלויה במידות הערנות, הריכוז, הזהירות והרצון המצויות בפלוני אלמוני ברגע שבו מוצגת לו הבעיה. מאידך, תלמיד יכול להעדיף ללמוד סוג מסויים של התנהגות על פניו של סוג אחר. כאן יש למוטיבציה תפקיד מרכזי, לכישורים האינטלקטואליים אין בהכרח חשיבות מכרעת.

ההתנהגות האלגוריתמית לכאורה אינה לדעתנו התנהגות בעלת ערך אינטלקטואלי ואין לעודד אותה. היה עדיף שתהליכים אלגוריתמים לכאורה לא יתרחשו כלל בסופה של הוראה, אם כי אפשר להבין אותם ולהרשות אותם בתחילת ההוראה של נושא מסויים. התהליכים האלגוריתמיים לכאורה מבוססים על הבחנה בדמיון שטחי וחיקוי דרכי פיתרון. הם אינם מלווים בחשיבה אנליטית, בבקרה או בבחינת התשובות הסופיות. אם יכולנו להיות שבעי רצון במידה מסויימת מההתנהגות האלגוריתמית האמיתית, בהנחה שמקבלים אותה כאחת ממטרות ההוראה של המתמטיקה, הרי שאיננו יכולים להשלים עם התנהגות אלגוריתמית לכאורה בתור תוצאה עיקרית של עמלנו כמחנכים. אם אכן כזה הוא המצב - אפשר, בהחלט, להעלות ספק בדבר כדאיותה של ההוראה.

ובכל זאת, יש "סיבות טובות" לכך שההתנהגות האלגוריתמית לכאורה כל כך נפוצה. כמה מהן שייכות לתחום הפסיכולוגיה הקוגניטיבית. אחרות נובעות ממבנה ההוראה והלמידה של המתמטיקה. נתחיל באלה הקוגניטיביות.

## 4. הבחנה בדמיון וחיקוי

כאמור לעיל, התהליכים האלגוריתמים לכאורה מבוססים על הבחנה בדמיון ועל חיקוי. מחוץ להקשר המתמטי, אלה שתי יכולות מופלאות המקדמות את התפתחותו האינטלקטואלית של כל אדם. למרות שהן עלולות למלא תפקיד שלילי בלמידת המתמטיקה בשלבים מסויימים, אין ברצוננו לדכא אותן. יש להן חשיבות במצבים רבים. בעזרת חיקוי (ועוד כמה יכולות ידועות ובלחי ידועות) לומד הילד את שפת אמו. בעזרת חיקוי (ויכולות נוספות) לומדים ילדים בגיל 3-14, בעברם מארץ לארץ, שפה זרה. הם עושים זאת טוב יותר מהוריהם הלומדים את השפה הזרה שלא על-ידי חיקוי. מבטא הילדים בשפה הזרה טוב לאין ערוך מזה של הוריהם. כיוון שאנו עוסקים כאן בחיקוי בלמידת מתמטיקה ולא בחיקוי באופן כללי, נצטמצם למספר דוגמאות בלמידת המתמטיקה שבהן ההבחנה בדמיון והחיקוי ממלאים תפקיד מרכזי.

### א. ידע לא-ורבלי

לעתים קרובות מדובר על ידע לא-ורבלי בלמידת מתמטיקה. טוענים, למשל, כי לילדים בגיל 6 עד 8 יש ידע לא-ורבלי של החוק הקומוטטיבי של החיבור או הכפל. טענה זו איננה ברורה. לפיה יש בשכלו של הילד משהו השקול לקביעה כי $a + b = b + a$ לכל שני מספרים a ו b, ומשהו זה אינו ורבלי. טענה זו באה להסביר את העובדה שהילד יודע כי $a + b = b + a$ לכל שני מספרים מיוחדים הניתנים לו. ההסבר לכך יכול להיות הרבה יותר פשוט וברור. לילד היה ניסיון מסויים שהראה לו במספר מקרים כי תוצאת החיבור של שני מספרים אינה תלויה בסדר שבו הוא מחבר את המספרים. הוא לומד לדעת כי $2 + 3 = 3 + 2$ וכי $5 + 3 = 3 + 5$. בשלב מאוחר יותר מבקשים ממנו לחשב $3 + 11$ והוא מבצע את החישוב. אחר כך הוא נשאל כמה הם $11 + 3$? תשובתו תהיה: אותו דבר כמו $3 + 11$. הוא יודע, אם כך, כי לאחר שחישב את $3 + 11$ אין הוא צריך לחשב שוב את $11 + 3$, שכן התוצאה תהיה זהה לזו של חישוב $3 + 11$. ידיעה זו מבוססת על ההנחה כי חיבור 11 ו 3 דומה לחיבור 5 ו 3, ומה שנכון בשביל 5 ו 3, יהיה נכון גם בשביל 11 ו 3.

את התשובה שנתן התלמיד בשביל 5 + 3 לאחר שחישב את 3 + 5 הוא מחקה (תוך שינויים מתאימים) במקרה של 11 + 3 לאחר שחישב 3 + 11. יש לשים לב כי החיקוי, הן במקרה זה והן במקרה הכללי, אינו מבוסס על הוראות מילוליות. אם פעולה מסויימת מבוססת על הוראות מילוליות, שוב אין היא פעולת חיקוי. לפיכך, רצוי להשתמש בחיקוי כאשר לתלמיד אין יכולת להבין ולשנן הוראות מילוליות.

ב. מציאת הכפולה המשותפת הקטנה ביותר

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר היא דוגמה למצב שבו לתלמידים אין היכולת להבין ולשנן הוראות מילוליות לביצוע משימה. אם אין הקורא או הקוראת משוכנעים בכך, ינסו הם לנסח באופן כללי הוראות למציאת כפולה משותפת מינימלית של שני מספרים, וישתכנעו כי ניסוח זה הוא מעבר ליכולת התלמידים שאותם מלמדים נושא זה, תלמידי כיתה ה'. הנושא מופיע בדרך כלל בקשר לחיבור שברים (מציאת מכנה משותף קטן ביותר). מראים לילדים כמה דוגמאות, ואחר כך הם מסוגלים למצוא כפולה משותפת של כל שני מספרים הניתנים להם בספר הלימוד או בשיעור. חיקוי במקרה זה, כמו במקרה הקודם, הוא דבר חיובי ביותר.

ג. בעית הסטודנטים והפרופסורים

בעיה זו העסיקה במשך זמן לא מבוטל כמה מהחוקרים בהוראת מתמטיקה בארצות הברית (Rosnick & Clement, 1980 ו Rosnick 1981). מדובר בשאלה הבאה: באוניברסיטה מסויימת על כל 6 סטודנטים יש פרופסור אחד. ציין ב S את מספר הסטודנטים וב P את מספר הפרופסורים באוניברסיטה זו. כתוב משוואה שתבטא את היחס הזה.

השאלה הוצגה לסטודנטים בחוג להנדסה באוניברסיטה אמריקאית ידועה בתחילת קורס בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי. כשליש מהסטודנטים השיבו כי המשוואה היא $6S = P$. לסטודנטים אלה ניתנה "הוראה משקמת", ואחר כך הם נבחנו שוב על שאלה זו ועל שאלות דומות. התוצאות הצביעו על שיפור ניכר, אולם החוקרים לא הסתפקו בכך וראיינו את התלמידים על מנת להבין כיצד הם פותרים את השאלה לאחר ההוראה המשקמת. אחדים מהסטודנטים נתנו הסבר זה: קודם הם כותבים את תגובתם המידית לשאלה. התגובה היא $6S = P$. אחר כך, ביודעם כי תשובה זו איננה נכונה, הם מחליפים בין S ו P כדי לקבל את התשובה הנכונה: $S = 6P$.

את האסטרטגיה הזאת ניתן לחקות בבעיות אחרות שהחוקרים הציגו בפני הסטודנטים. למשל:
במסעדה, על כל 2 עוגות גבינה הנמכרות, מוכרים 5 עוגות תפוחים. סמן ב C את מספר עוגות הגבינה וב A את מספר עוגות התפוחים וכתוב משוואה שתבטא את היחס הזה.

דרך פשוטה לפתור שאלה זו היא כדלקמן: כתוב את תגובתך המידית לשאלה. תגובה זו היא: $2C = 5A$ (בתגובה זו מבוטא הקשר בין 2 עוגות גבינה, $2C$, ל 5 עוגות תפוחים, $5A$). החלף בין C ו A במשוואה האחרונה וקבל את התשובה הנכונה $2A = 5C$. כך נוצרת שיטת פיתרון שאינה מתבססת על שיקולים מתמטיים. השימוש בה יכול להביא להצלחה במקרים רבים ומגוונים. תופעות דומות לזו קיימות בוודאי בהקשרים אחרים, מבלי שנהיה בהכרח מודעים להן.

### ד. פיתרון משוואות ריבועיות ע"י פירוק לגורמים.

דוגמה זו ידועה לרוב המורים המלמדים בחטיבה העליונה. כאשר מלמדים את הנושא, זה נעשה בדרך כלל באופן הבא. רושמים, למשל, על הלוח את הדוגמה:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$x - 2 = 0$ או $x - 3 = 0$

$x = 2$ או $x = 3$

ההצדקה המתמטית לכל צעד, בדרך כלל, אינה נכתבת על הלוח.

למותר לומר כי רוב התלמידים אינו רושם אותה במחברת (במחברת כותבים רק נוסחאות או משוואות; מלים אינן מתמטיקה!). בשלב מאוחר יותר הם נתקלים בשאלה: $x^2 - 5x + 6 = 2$ . אחדים מהם פותרים כך:

$$(x - 2)(x - 3) = 2$$

$x - 2 = 2$ או $x - 3 = 2$

$x = 4$ או $x = 5$

במקרה זה מביא החיקוי העיוור לתשובה מוטעית.

ה. ד מ י ו ן ש ט ח י

כאמור לעיל, היכולת לזהות דמיון היא יכולת חשובה ביותר. הילד לומד מושגים רבים על סמך זיהוי דמיון, לעתים דמיון חלש ולעתים דמיון חזק. כיצד יכול הוא ללמוד את מושג החתול, הכלב, השולחן וכדומה אם איננו רואה שחתול מסויים אחד דומה לחתול מסויים אחר, כלב מסויים אחד דומה לכלב מסויים אחר, וכך הלאה?

הבעיה הבאה ניתנה ל 50,000 תלמידי בית ספר תיכון במעין בחינת מיון של אוניברסיטה אילינוי בארה"ב:

$$-x^{-1} + x = ?$$

הבחינה היתה רב-ברירתית. מתוך 50,000 הסטודנטים שניגשו לבחינה רק 21% בחרו בתשובה הנכונה. המסיח 2x נבחר ע"י 27% מהסטודנטים. בארבעת החמישונים התחתונים נבחרה תשובה זו פי 3 יותר מאשר התשובה הנכונה. ברור כי אין זו תוצאה מקרית. קשה לקבוע באופן חד-משמעי כיצד היא התקבלה, שכן הסטודנטים לא התבקשו לנמק את תשובותיהם. אבל אפשר להעלות השערות. בעינינו, סביר להניח כי הביטוי $-x^{-1}$ נראה להרבה סטודנטים דומה ל $--x$ . ההופעה של 2 מינוסים בשני הביטויים עושה אותם דומים זה לזה באופן שטחי.

נדגיש כי אין כל רע, לדעתנו, בזיהוי דמיון חיצוני. זוהי תגובה אינטלקטואלית ספונטנית. הצרות מתחילות כאשר אין ביקורת על החשיבה ואין ניתוח של התגובות האינטלקטואליות הספונטניות. ביקורת החשיבה וניתוח תגובות, אלה דברים שהמתמטיקה צריכה ללמד אותנו. למרבית הצער, התוצאות אינן מעודדות.

הדוגמאות הבודדות הנ"ל היו אמורות להצביע על התפקיד המרכזי שיש להבחנה בדמיון ולחיקוי בלמידת מתמטיקה, לטוב ולרע.

בחלקו האחרון של המאמר נדון בסיבות נוספות לכך שההתנהגות האלגוריתמית לכאורה נפוצה כל כך בלמידת המתמטיקה. נתייחס גם לשאלות איזו התנהגות יעדיף התלמיד לרכוש ואיזו התנהגות יעדיף המורה להקנות, ומה קורה בפועל במערכת המסועפת של הוראת מתמטיקה ולמידתה.

ההמשך בגליון הבא.

**מראה מקומות:**

Rosnick P., 1981, Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable, Mathematics Teacher,74(6),418-420.

Rosnick & Clement, J., 1980, Learning without Understanding, The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions, Journal of Mathematical Behavior,3(1), 3-21.