הנושא: משוואות ופתרונותיהן – התפיסה הרווחת של פרחי הוראה

הוכן ע"י: חנה כרפס.

תקציר: המאמר מתאר מחקר של התפיסה המתמטית של פרחי הוראה ביחס לתהליכים של פתרון משוואות, וביחס למהותם של הסברים מתמטיים וחשיבותם בהוראה. מן המחקר עולה, כי בנושא של פתרון משוואות אין לפרחי ההוראה תמונה שלמה ועקבית התואמת את תוכנית הלימודים, וכי תפיסתם מושפעת מן התפיסה שרכשו במפגש הראשון עם הנושא. ההסברים המתמטיים, שסיפקו הנחקרים, היו בחלק גדול מהמקרים ציטוט של הכללים, כלומר הסברים אינסטרומנטליים ולא רלציוניים.

מילות מפתח: אלגברה, טכניקה אלגברית, משוואות, נעלם, משתנה, מחקר, פרחי הוראה, תפיסה, הסבר אינסטרומנטלי, הסבר רלציוני.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 30-39.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 10 עמודים.

משוואות ופתרונותיהן
התפיסה של פרחי הוראה

חנה כרפס
המכללה לחינוך ע״ש קיי, באר שבע

הקדמה

התפיסה הרווחת כיום בחינוך מתמטי מדגישה את החשיבות של למידה משמעותית והבנה מושגית, אך לא ברור עד כמה היא חלחלה לתוך ההוראה בבתי הספר. בראיון שקיימתי עם תלמידה בוגרת כתה ח, בו ניסיתי לבדוק הבנת מושגים הקשורים בפתרון משוואות מהאלגברה של כתות ז ו-ח, באה לידי ביטוי גישה פרוצדורלית בעליל ללא התיחסות מושגית. השערתי היתה, כי הסיבה לכך נעוצה באופי ההוראה של נושא זה לא פחות מאשר ביכולתה ונטייתה של התלמידה. בעקבות הראיון התעורר בי עניין לבדוק את תפיסת הנושא של פתרון משוואות אצל פרחי ההורא - המורות לעתיד.

בראיונות התבקשו פרחי ההוראה להציע הסברים והצדקות לתהליכים המוכרים של פתרון משוואות, זאת מתוך מטרה לחשוף הן את התפיסה המתמטית שלהן לגבי התחום, והן את תפיסתן לגבי מהותו של הסבר מתמטי וחשיבותו בהוראה.

מן הראיונות עולה, כי בנושא של פתרון משוואות אין לפרחי ההוראה תמונה שלמה ועקבית התואמת את תוכנית הלימודים, ונראה כי תפיסתן מושפעת מן התפיסה שרכשו בפגישתן הראשונה עם הנושא, בלימודיהן בחט״ב, יותר מאשר מהידע הנוסף שרכשו בהמשך לימודיהן בחטיבה העליונה ובמכללה. לגבי ההתיחסות להסברים מתמטיים, כאשר נתבקשו לספק הסבר מתמטי לכלל מוכר, במקרים אחדים ההסבר שהציעו היה הכלל עצמו - הסבר אינסטרומנטלי על פי סקמפ (Skemp 1976). יתר על כן, ישנם מקרים שבהם, למרות שלפרחי ההוראה עצמן היתה היכולת להבין את ההסבר הרלציוני, הן לא זיהו את יתרונו, והעדיפו על פניו הסבר אינסטרומנטלי, מטעמים שנראו להן דידקטיים. זה מרמז על כך שהתפיסה של מהותו של הסבר מתמטי בתחום תוכן מסוים איננה תוצאה בלעדית של מידת ההבנה את תחום התוכן, והיא מושפעת במידה רבה גם על ידי השקפה כללית יותר על מתמטיקה ועל הצדקה מתמטית.

1. הרקע

חוקרים אחדים התיחסו לתפיסות שונות של אלגברה. ספרד ולינצ׳בסקי מתארות שלבים בהתפתחות התפיסה (Sfard & Linchevski 1994). בשלב המוקדם ביותר, ביטוי אלגברי נתפס כמייצג תהליך חישוב הפועל על מספר המיוצג על-ידי אות כלשהי (למשל x), וכאשר תוצאת החישוב ניתנת, אפשר למצוא מהו המספר על-ידי היפוך תהליך החישוב. בשלב מאוחר יותר, (שההגעה אליו דורשת קפיצה מנטלית משמעותית), ביטוי יכול להתפס גם כתוצר של חישוב, אך בהקשר של משוואה בנעלם אחד יש הנחה, סמויה או גלויה, שהסמל x מייצג רק מספר אחד כזה, ומכאן כינויו ׳נעלם׳. נשים לב שהנחת היחידות נכונה עבור משוואות ליניאריות הנתפסות כ׳רגילות׳, אך לא עבור כולן. בתפיסה הפונקציונלית, המתקדמת יותר, ביטויים אלגבריים (תבניות פסוק) מייצגים יחסים בין גדלים, הסמל x יכול לייצג טווח רחב של ערכים, ולכן הוא נקרא משתנה. תפיסה זו, בניגוד לקודמת, מתאימה גם למשוואות בהן הפתרון הוא קבוצה של מספרים. אוסישקין (Usiskin 1988) מבחין גם הוא בין תפיסה בה הסמל x המופיע במשוואה מייצג ׳נעלם׳, לבין תפיסה

בה x מייצג משתנה העומד בשביל ערכים רבים, והאלגברה נתפסת כעוסקת ביחסים בין גדלים. בתפיסת הראשונה, פתרון משוואה בנעלם אחד מתפרש כגילוי המספר על-ידי פרוצדורה מתאימה, מה שעולה בקנה אחד עם תפיסת האלגברה כאוסף פרוצדורות לפתרון בעיות מסוימות.

התפיסה המתמטית של תלמידים, פרחי הוראה או אחרים – מן הראוי שתִבָּחן ביחס לתוכנית הלימודים, לפיכך נפרשת כאן בקצרה הגישה של תוכנית הלימודים לנושא המשוואות.

תוכנית הלימודים, לפחות מסוף שנות הששים, מבוססת על תפיסה פונקציונלית של משוואות: כל אחד מאגפי המשוואה הוא פונקציה, הסמל x הוא **משתנה**, שניתן להציב בו ערכים רבים. בפתרון משוואה מחפשים את קבוצת הערכים שהצבתם במקום x תהפוך את המשוואה לפסוק אמת. קבוצה זו נקראת קבוצת האמת. 'משוואות מיוחדות', כאלה שפתרונן הוא 'כל המספרים הממשיים' או כאלה שהן חסרות פתרון, משתלבות היטב בהצגה זו, מאחר שקבוצת האמת יכולה להכיל ערכים רבים או להיות ריקה. לא נכנס לפרוט רחב יותר של תוכנית הלימודים, פרוט כזה אפשר למצוא אצל ספרד ולינצ׳בסקי (Sfard & Linchevski 94). כיוון שבראיונות התבקשו פרחי ההוראה, בין השאר, להסביר את התהליך של פתרון משוואות במשתנה אחד, נציג בצורה סכימטית את ההסבר על פי תוכנית הלימודים:

<u>מה מחפשים בפתרון משוואה</u>

בפתרון משוואה מחפשים את המספרים שמקיימים את המשוואה, במונחי תוכנית הלימודים: מחפשים את קבוצת האמת של המשוואה.

<u>כיצד פותרים משוואה</u>

- על ידי ביצוע פעולות מסוימות על משוואה - פעולות מותרות - מקבלים משוואה שיש לה אותו פתרון, כלומר משוואה **שקולה**.
- באמצעות סדרת פעולות כאלה, מגיעים למשוואה שפתרונה נראה לעין, כמו למשל $x = 7$.
- בגלל השקילות של כל המשוואות, פתרון משוואה זו הוא גם פתרון המשוואה המקורית.

תאור זה אינו מהווה כמובן הצעה דידקטית לדרך ההוראה, אלא סכימה של תהליך הפתרון וההסבר לו, על פי תוכנית הלימודים. ספרד ולינצ׳בסקי (ibid.) מביעות הסתיגות ממבנה תוכנית הלימודים, למרות כלליותה והאלגנטיות שלה, משום שאיננה תואמת את ההתפתחות ה'טבעית' של תפיסת המשתנה. בלי להתווכח עם טענות אלו, נאמר שמורים ומורים לעתיד צריכים להבין את התמונה הכללית של משוואות ופתרונן, ולהיות מודעים להבדלים בין התפיסות השונות, כך שבעבודתם כמורים הבחירה במושגים אותם יציגו לתלמידיהם תתבסס על שיקולים דידקטיים, ולא על תפיסה מוגבלת של המושגים.

תפיסת מהותו של הסבר מתמטי

כאמור לעיל, הבחין סקמפ (Skemp, 1976) בין הבנה רלציונית - המבוססת על היחסים המהותיים בין מושגים מתמטיים - לבין מה שכינה הבנה אינסטרומנטלית - שהיא למעשה ידיעת כללים ללא הבנה שלהם. אנו נשתמש במשמעות דומה במונחים הסבר רלציוני והסבר אינסטרומנטלי.

וינר (Vinner, 1997) עסק בהתנהגות פסאודו קונספטואלית ובהתנהגות פסאודו אנליטית. בהתנהגות פסאודו אנליטית, הלומד משתמש בדמיון חיצוני שבין בעיה מתמטית אחת לבין בעיה מתמטית שניה כדי לנסות לפתור את זו האחרונה, ללא הבנה משמעותית שלה. באופן דומה, נכנה הסבר הנשען על דמיון במאפיינים החיצוניים והלא מהותיים של הסבר אחר בשם 'פסאודו הסבר' (הסבר לכאורה).

2 . הבדיקה

בעקבות הראיון עם בוגרת כתה ח, שהתקיים בקיץ תשנ״ט, קיימתי באמצע שנת הלימודים תש״ס ראיונות עם ארבע פרחי הוראה מהשנים א עד ג במסלול להכשרת מורים במכללה, אשר עסקו במשוואות ליניאריות במשתנה אחד, ובמערכת משוואות בשני משתנים. במאמר זה אצטמצם לפתרון משוואות במשתנה אחד, עם דגש על ההסברים שניתנו ל'משוואות מיוחדות' .

מטרתי בראיונות עם פרחי ההוראה היתה לזהות את התפיסה המתמטית שלהן בנושא זה, את הבנתן לגבי מהותו של הסבר מתמטי, ואת החשיבות שהן נותנות להסברים מתמטיים רלציונים של הטכניקות הנלמדות. השערתי היתה שבנושא של פתרון משוואות תהיה נטייתן לגישה פרוצדורלית חזקה יותר מאשר בנושאים אחרים. כרקע לראיונות, ועל מנת להמחיש את

הבעייתיות, אביא קטע מהראיון עם בוגרת כתה ח. הקטע עוסק בפתרון 'משוואות מיוחדות'.
שמות כל המרואיינים המופיעים במאמר בדויים.

הראיון עם אלה (בוגרת ח)

בשאלות השתמשתי במונח 'קבוצת אמת'. המונח מוכר לתלמידה משום שהכתה למדה מתוך הספר 'קבוצות אמת של תבניות פסוק' מסדרת ה.ש.ב.ח.ה (קרמרסקי ואחרים, תשנ"ט), אשר משתמש באדיקות במונחים קבוצת אמת וקבוצת שקר. גם הספר על תבניות II (רובינזון ותעיזי, 1997) בהוצאת מכון ויצמן למדע משתמש במונח תבניות אמת.

מראיינת: מהי קבוצת האמת של המשוואה הבאה:

$$2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$$

אלה פותרת ומגיעה אל:

$$6-6x=6-6x$$
$$6=6$$

אלה: יצא $6=6$, זה אומר שאין קבוצת אמת. כדי שתהיה קבוצת אמת צריך שיהיה $x=6$.

מתשובתה אפשר להבין, כי עבורה, פתרון הוא: "מה שמקבלים בצד ימין של ...$x=$, אם מבצעים נכון את הפרוצדורה". היא לא קיבלה זאת, ולכן אין פתרון. כלומר, לדעתה, קבוצת אמת היא מילה נרדפת לפתרון שצורתו ...$x=$, לכן אין קבוצת אמת.

לא מוצאים אצלה כל התייחסות לסוגייה 'מה צריך פתרון לקיים', שזו התפיסה המושגית של פתרון (קבוצת אמת). יש התייחסות לשאלה 'איך מקבלים (נראה) פתרון' - התפיסה הפרוצדורלית. נתתי לה הזדמנות נוספת עם משוואה שפתרונה כמעט מיידי.

מראיינת: מהי קבוצת האמת של המשוואה:

$$x+5=2+x+3$$

אלה פותרת:

$$x+5=x+5\ /\ -x$$
$$5=5$$

אלה: גם כאן אין קבוצת אמת. במקום לעשות **מינוס** $\boldsymbol{x}$ אפשר היה לעשות **מינוס 5** והיה יוצא $x=x$ **שאין פתרון**.

אלה נראית מקובעת בסד הגישה הפרוצדורלית: כשהגיעה למבוי סתום ניסתה להיחלץ על-ידי עוד פרוצדורה אפשרית, מה ש**לא עשתה זה לעצור, להתבונן, ולחשוב על המשמעות** של מה שמונח נגד עיניה. ההשערה שלי היא שהיה ביכולתה להבין מהו הפתרון של משוואה זו, אך ההתנייה שלה, המערך הקוגניטיבי שלה בבואה לפתור משוואות, לא כלל חיפוש משמעות.

זאת אפשר ליחס לאופן בו למדה מתמטיקה, ובפרט את הנושא של פתרון משוואות.

3. הראיונות עם פרחי הוראה

המרואיינות היו כולן תלמידות מכללה לחינוך בשנים א עד ג, המתמחות בהוראת מתמטיקה לכתות ז - י.

החלק הראשון של הראיונות עסק באופן כללי בשאלה כיצד פותרים משוואות. אביא בקצרה ובצורה מרוכזת את התגובות שקיבלתי. החלק השני של הראיונות עסק בפתרון 'משוואות מיוחדות' - משוואות שפתרונן הוא כל המספרים הממשיים או משוואות חסרות פתרון. חלק זה יוצג בפרוט בהמשך.

3.1 משוואות במשתנה אחד ופתרונן

שאלתי הראשונה היתה: "איך תסבירי מה מחפשים בפתרון משוואה במשתנה אחד?" התשובות שקיבלתי חושפות תפיסה של x כנעלם המייצג מספר יחיד.

רוית (שנה ב): המטרה היא למצוא את הנעלם.

הא הידוע והשימוש במילה 'נעלם' מצביעות על התפיסה.

בדיאלוג עם מיטל - תלמידת שנה א - הדבר נאמר במפורש:

מיטל: אסביר ש- x מסמן מקום של מספר, משתנה, לא, לא משתנה, נעלם.

מראיינת (להלן מ): ומה מחפשים?

מיטל: מחפשים מהו ה- x שמקיים את המשוואה.

מ: למה את מעדיפה את המונח נעלם על משתנה?

מיטל: כי נעלם מסמן מספר אחד, ומשתנה יכול להיות כמה מספרים.

מ: וחשוב לך בשלב זה שהם יבינו שיש מספר אחד?

מיטל: כן, שיש פתרון אחד.

מיקי, תלמידת שנה ג גורסת שבכתה ח עדיף להשתמש במונח 'פתרון' ולא במונח 'קבוצת אמת': "ילד בכתה ח' יכול לעבוד עם המושג פתרון ורק אחר-כך עם המילה קבוצה. לילדים, קבוצה זה לא

איבר אחד אלא כמה".
מדבריה מובן שלגביה הפתרון הוא מספר יחיד. את המונח 'קבוצת אמת' מיקי מציעה להציג רק בהקשר לאי-שוויונים בהם הפתרון הוא 'באמת קבוצה'. בהמשך הראיון שאלתי אותן איך תסברנה לתלמידים כיצד פותרים משוואה. ההתייחסות המיידית אצל **כל** המרואיינות היתה לטכניקה של פתרון משוואות. הן הציעו להתחיל מההוראה ש"את כל המשתנים צריך להעביר לאגף אחד, ואת כל המספרים לאגף שני". לגבי השיטה, שתיים דיברו על העברת אגפים, ושתיים על הוספת אותו 'גודל' לשני האגפים (פעולות מותרות). בנקודה זו הקשֵיתי וביקשתי מהן להסביר לי, מדוע פעולות אלה אכן מביאות לפתרון המשוואה. מן התלמידות שדיברו על העברת אגפים קבלתי את התגובות: "אני לא יודעת להגיד, אני ממש לא יודעת למה", או בפשטות "לא יודעת". שתי התלמידות האחרות ענו "כי זה לא משנה את השוויון". אף אחת מהמרואיינות לא הציעה הסבר שלם ועקבי לתהליך של פתרון משוואה, אך מתוך קטעי הדברים שלהן עלתה תפיסה אחידה למדי, אותה אנסה לתמצת להלן.
כאשר ניתנת למשל המשוואה:

$$(i)\quad 3x+5=13-x$$

ה-x נתפס כ'נעלם', שיש למצוא את ערכו כדי שהמשוואה תתקיים. כאשר מתחילים להסביר את דרך הפתרון, המשוואה נתפסת כשוויון - המספר המבוקש כבר נמצא שם, אך עדיין לא נחשף. מכיוון שזה שוויון, אזי החסרת 5 משני האגפים (או העברת 5 לאגף השני) תשמור עליו, ולכן מתקיים גם השוויון הבא:

$$(ii)\quad 3x=8-x$$

וגם השוויון הבא:

$$(iii)\quad 4x=8$$

והשוויונים הבאים:

$$(iv)\quad x=8/4$$

$$(v)\quad x=2$$

ביטוי אחרון זה לא נתפס כמשוואה פשוטה שפתרונה 2, אלא ככתיבה סימבולית של המשפט "x הוא 2".
ההבדלים בין התיאור שהבאתי מתוכנית הלימודים, לבין התפיסה של הסטודנטיות הם שניים: א) הסמל x נתפס קודם כ'נעלם', ובהמשך כצורה מקוצרת למילה 'המספר', והמשוואות שנוצרות בתהליך הפתרון נתפסות כשוויונים ולא כמשוואות. ב) ההיסק הלוגי הוא חד כיווני (גרירה ולא שקילות): *(ii)* הוא שוויון ולכן *(iii)* הוא שוויון, וכן הלאה, ולא *(ii)* הוא שוויון אם ורק אם *(iii)* הוא שוויון וכו'. יש לשים לב כי גרירה לבדה מבטיחה רק שכל פתרון של המשוואה המקורית יהווה גם פתרון של המשוואה האחרונה, אך לא להפך, השקילות היא זו שמבטיחה שהפתרונות זהים.
יחד עם זאת, בתשובה לשאלה הישירה "מהו הקשר בין קבוצות האמת של שתי המשוואות הבאות":

$$2x+3-5x=7-4x$$

$$2x+3-5x+7x=7-4x+7x$$

ידעו כולן להגיד שלשתי המשוואות יש אותו פתרון, אך אף אחת מהמרואיינות לא גייסה ידע זה לצורך ההסבר, **ואף אחת מהן** לא השתמשה במונח *משוואות שקולות*.
ההקפדה על הבחנה בין שקילות לגרירה יכולה להיראות כאן כדקדקנות מיותרת, ואכן בפתרון משוואות במשתנה אחד, אין בדרך כלל השלכה מעשית לחוסר ההבחנה ביניהן, וחשיבותה עקרונית בלבד. לעומת זאת, במשוואות מסדר גבוה יותר יש לחוסר ההבחנה גם השלכות מעשיות. ספרד ולינצ'בסקי מצאו כי תלמידים רבים בחטיבה העליונה שגו, כשנתבקשו לקבוע האם משוואות ואי שוויונים הם אכן שקולים (Linchevski & Sfard, 1991; Sfard & Linchevski 1992). מרבית הטעויות היו מסוג false positive, ונבעו למשל מחלוקת המשוואה בביטוי המכיל את x . יתרה מזו, החוקרות משערות כי רבים מאלה שזיהו נכונה אי שקילות, עשו זאת על סמך זכירת כמה כללי אצבע, ולא על סמך הבנה מושגית עמוקה של מושג השקילות.
כאן המקום להבהיר שבדיון שלמעלה אין משום המלצה להפוך את הוראת הנושא בכתה ח לדיון מופשט בנושא השקילות, מה שעשוי להיות טעות דידקטית, אלא נסיון לומר שהמורות (והמורים) צריכות להיות מודעות היטב למושג השקילות כדי לשלבו בזמן ובאופן המתאימים.

3.2 פתרון 'משוואות מיוחדות'

בהמשך הראיון ביקשתי לפתור ולהסביר את הפתרון של 'משוואות מיוחדות' במשתנה אחד. במשוואות אלו הפרוצדורה לא מסתיימת במשוואה מהסוג $x=\ldots$, והגישה הפרוצדורלית או ההסבר הנאיבי לא עובדים, ולכן הן מאפשרות לחשוף את התפיסה טוב יותר מאשר המקרים השכיחים של פתרון משוואות.
כבסיס להתייחסות אציג הסבר למשוואות כאלו, שאיננו כמובן ההסבר היחיד האפשרי.

נתונה המשוואה הבאה שפותחה על-ידי תלמיד באופן הבא:

$$2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$$
$$6-6x=2-2x-4x+4$$
$$6-6x=6-6x$$
$$6=6$$

המפתח להסבר הוא אותה הבנה, ש**לכל המשוואות** שמתקבלות בתהליך הפתרון יש **אותו פתרון**. אפשר לעצור את תהליך הפתרון בשלב בו סמלי x עדיין מופיעים, למשל: $6-6x=6-6x$ ולהבין כי בגלל זהות התבניות, כל מספר שיוצב בהן ייתן פסוק אמת.
קל לפתור משוואות כאלו באמצעות כלל (מתכון) האומר: אם מגיעים לפסוק אמת, כמו $6=6$, אזי הפתרון הוא 'כל המספרים', אם מגיעים לפסוק שקר, כמו $11=0$ אזי אין פתרון. המתכון לא מהווה הסבר משמעותי, כיוון שהוא לא מתייחס להבנת התהליך של פתרון משוואה - הפסוק $6=6$ אינו משוואה שפתרונה נראה לעין; הוא כלל לא נראה כמשוואה.
אחרי שהמרואיינות פתרו את שני הסוגים של משוואות מיוחדות (שלוש מבין הארבע פתרו נכון באופן מיידי), שאלתי אותן איך תסברנה לתלמידים מדוע המסקנה היא שהפתרון הוא 'כל מספר' או שאין פתרון.

3.2.1 השיחה עם רוית

השיחה הבאה התקיימה עם רוית, תלמידת שנה ב במכללה, לאחר שהיא עצמה פתרה את המשוואה הבאה: $2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$. שלבים רבים היא ביצעה 'בראש', והגיעה לתשובה 'כל מספר'.

מראיינת: את חושבת שצריך להתמודד בכתה עם משוואות כאלה?

רוית: בטח.

מ: איך?

רוית מהססת.

מ: אולי אם תפתרי בשלבים בכתב יצוץ לך רעיון?

רוית: (פותרת)

$$6-6x=2-2x-4x+4$$
$$6-6x=6-6x$$
$$6=6$$

כאן אני יכולה לשאול אותם מה הם חושבים שזה אומר.

מ: נסי להסביר **לי**.

רוית: כי זה פסוק אמת.

נראה שרוית יודעת את המתכון ולא מעבר לכך. היא לא מציעה הסבר. יתרה מזאת, לא מתגלית אצלה הכרה **בנחיצות** של הסבר כזה, לגביה המתכון הוא ההסבר. במונחים של סקמפ נראה שלא רק שאין לה הבנה רלציונית, היא איננה מבינה מהי הבנה רלציונית, לפחות לא בהקשר זה.

מיד אחר כך היא נתבקשה לטפל במשוואה:

$$x+5=2+x+3$$

רוית: זה אותו דבר.

מ: איך היית מסבירה?

רוית: כאן מקבלים $x+5=x+5$

מ: מכאן היית ממשיכה?

רוית: לא, יש לנו כאן זה שווה לזה, תבנית זו שווה לתבנית זו.

מ: ומה זה אומר?

רוית: שאם $x=1$ אז $6=6$ אם $x=2$ אז $7=7$, וכך כל מספר שנציב עד אינסוף.

רוית נותנת כאן הסבר משמעותי המתייחס, אם כי לא במפורש, להבנה שלכל המשוואות שנוצרות תוך כדי תהליך הפתרון, יש אותו פתרון. אך לא ברור אם היא מבחינה בהבדל בין טיבו לטיב ההסבר הקודם שנתנה.

למשוואה הבאה יש קבוצת אמת ריקה. רוית פתרה אותה כך:

$$5(2x-2)-x=3(3x+1)-2$$
$$10x-10-x=9x+3-2$$
$$-10=1$$

רוית: כאן אני חושבת שכן הייתי מחסירה את $9x$ (ומגיעה ל $-10=1$)

מ: מה התשובה?

רוית: ברור שזה לא פסוק אמת.

מ: מה היית אומרת?

רוית: הייתי שואלת, זה שווה או לא שווה?

מ: איך את מסבירה לי, או לתלמידים, שאם זה פסוק שקר אז למשוואה אין פתרון?

רוית: אני יכולה לצאת מהמקרה הקודם, אם הם ראו לפני כן, שאם קבלנו $6=6$ הפתרון היה כל x, אז כאן אם קיבלנו $-10=1$, וזה לא שווה, מה זה יכול להגיד לגבי הפתרון.

התשובה לה מצפה רוית מן התלמידים היא כנראה "אף x" או "אף מספר", כלומר אין פתרון, וההסבר שלה הוא מעין אנלוגיה (או למעשה אנלוגיה הפוכה): אם כשמקבלים פסוק אמת הפתרון הוא כל x או כל מספר, אז כשמקבלים פסוק שקר הפתרון הוא *אף מספר*. למרות שהתשובה "אף מספר" נכונה במקרה זה, זה איננו הסבר אמיתי (רלציוני) אלא *הסבר לכאורה* (ראה מבוא) המתבסס על דמיון חיצוני (במהופך) לקשר בין פסוק אמת לפתרון, ולא להבנה של דרך הפתרון*. אצל רוית ראינו בזו אחר זו דוגמאות להסבר אינסטרומנטלי, הסבר רלציוני והסבר לכאורה. לא נראה שיש אצלה הבחנה ביניהם.

3.2.2 השיחה עם מיטל

מיטל היא תלמידת שנה ראשונה, שלא התנסתה עדיין בעבודה מעשית בהוראת מתמטיקה.
נראה קודם כיצד פתרה היא עצמה את המשוואות.

משוואה 1

$$2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$$
$$6-6x=2-2x-4x+4$$
$$6-6x=6-6x$$
$$0=0$$

מיטל: אין פתרון.

מראיינת: אין פתרון?

מיטל: כן, אין פתרון כי אין x.

משוואה 2

המשוואה היא:

$$x+5=2+x+3$$

מיטל מגיעה אל: $0=0$

מיטל: אין פתרון.

משוואה 3

מיטל פתרה כך:

$$5(2x-2)-x=3(3x+1)-2$$
$$10x-10-x=9x+3-2$$
$$0=11$$

מיטל חזרה לאחור ואמרה: "זה וזה (משוואות 1 ו- 2) כל x וזה (משוואה 3) אין פתרון".

התגובה הראשונית של מיטל דומה לזו של אלה - בוגרת כתה ח - ומצביעה על רגרסיה לתפיסות מוקדמות: "אין x", הסמל x נעלם, וכיוון שפתרון הוא "מה שמופיע בצד ימין של $x=...$", ולא קבלנו זאת, אין פתרון.

שגיאה זו התמידה גם במשוואה 'מיידית' כמו $x+5=2+x+3$, מה שמראה את הדומיננטיות של הגישה הפרוצדורלית - עבודה שבדרך כלל אינה מלווה במחשבה על המשמעות.

רק כאשר במשוואה 3 הגיעה לפסוק $0=11$, היא נזכרה ב'כללים' שלמדה ואז תיקנה את התשובה.

בהמשך ביקשתי ממנה להסביר את הפתרון הבא:

$$(i)\quad 2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$$
$$(ii)\quad 6-6x=2-2x-4x+4$$
$$(iii)\quad 6-6x=6-6x$$
$$(iv)\quad 0=0$$

(1) מ: איך היית מסבירה לתלמידים סוג כזה של משוואות?

(2) מיטל: אני מסבירה שפה (iv) גם ה- x וגם המספר שווים לאפס.

(3) מ: ולמה לכן הפתרון הוא כל מספר?

(4) מיטל: כי כל מספר שנציב ב- x שווה אפס,

(5) וגם אראה להם דוגמא על זה (משוואה *iii*). הייתי מציבה מספרים ומראה להם שזה תמיד שווה, תמיד המשוואה מתקיימת.

(6) מ: איזה הסבר לדעתך יותר מובן להם?

(7) מיטל: זה (משוואה *iii*).

בתשובה הראשונה שלה (שורה 2). היא מפרשת את השוויון $0=0$ כך: "גם ה- x וגם המספר שווים לאפס". מיטל מבלבלת בין ערכו של x, שאיננו דוקא אפס, לבין ערך **הביטוי** באגף שמאל (הידוע בכינויו 'אגף ה- x-ים'), בלבול שאובחן על-ידי בלודי-וינר (1995). מקור הטעות יכול להיות בתפיסה, או בדרך הדיבור. זה תואם את הדרך בה תיארה בשלב מוקדם יותר כיצד היא תלמד איך פותרים משוואה:

* דוגמא נוספת להסבר לכאורה אפשר להביא מתחום אחר. בקורס העוסק ביסודות האריתמטיקה (ונקרא תורת המספרים), המפתח נקודת מבט פורמלית על הפעולות האריתמטיות, מבססים את העובדה שפעולת החיבור בטבעיים סגורה וחילופית. אחרי שהכפל הוגדר כחיבור חוזר, נבדקות תכונות אלו עבור הכפל. מכיוון שכפל הוא שרשרת של פעולות חיבור, ותוצאת כל אחת מפעולות החיבור שייכת לטבעיים, הרי תוצאת הכפל שייכת לטבעיים, ובקיצור, *כיוון שכפל הוא חיבור חוזר, והחיבור סגור, גם הכפל סגור*. כשמגיעים לחילוף, פעמים רבות עולה אצל תלמידים הנימוק הבא: כפל הוא חיבור חוזר, וכיוון שהחיבור חילופי אז גם הכפל חילופי. למרות שהכפל אכן חילופי האנלוגיה כאן אינה במקומה, וחילופיות הכפל אינה נובעת מחילופיות החיבור. כדי לערער את תקפותו של נימוק כזה אפשר להפנות לפעולת החזקה. החזקה היא כפל חוזר, אך איננה 'יורשת' ממנו את החילופיות.

מיטל: *"אסביר שצריך להעביר את כל ה-x-ים לאגף שמאל, ואת כל המספרים לאגף ימין."*
מכיוון שה-x-ים באגף שמאל 'נעלמו' הרי x הוא אפס. מלבד השגיאה, אין בכך הסבר מדוע הפתרון הוא כל מספר.

בשורה 4 מיטל מנמקת: *"כל מספר שנציב ב-x שווה ל-0"*. לא ברור היכן להציב, הרי בשוויון $0=0$ אין היכן להציב. הכוונה כנראה שאם היינו מציבים במשוואה הראשונה מספר כלשהו, ופועלים כשם שפעלנו עם ה-x, היה מתקבל ערך אפס. מה שלמעשה מתקבל הוא השוויון $0=0$.

מיד אחרי תשובה זו היא מציעה בשורה 5 לחזור לשלב קודם בפתרון, למשוואה (iii), ולהדגים עליה שכל מספר מקיים אותה. כאן היא מסתפקת בדוגמאות ולא מציעה הסבר כללי המתייחס לכך שהתבניות בשני האגפים של משוואה זהות.

אצל מיטל, שהיא תלמידת שנה א, נראה שהתמונה המתמטית מעורפלת, ותוך כדי הראיון היא משחזרת חלק מהידע. אבל למרות שהניסוחים אינם בהירים ושגויים בחלקם, נראה שהיא הבינה מה נדרש מהסבר אמיתי. היא עברה תהליך, בו עשתה כמה נסיונות לא מוצלחים להסביר, ולבסוף הגיעה להסבר המסתמך על שקילות המשוואות, בלי לומר זאת במפורש. בשום שלב היא לא ניסתה להציע את ה'מתכון' כהסבר.

3.2.3 השיחה עם מיקי

קטע השיחה הבא נוגע לפתרון המשוואה: $x-5=x+3$ אקדים ואומר שכיוון שזו אחת הצורות הפשוטות של משוואה חסרת פתרון, הרי בלא הבנה שאין מספר שיקיים משוואה כזו, אין מבינים כלל את משמעות קיומן של משוואות חסרות פתרון.

(1) ***מראיינת***: מה היית מצפה מתלמיד שיקבל את המשוואה $x-5=x+3$?

(2) ***מיקי***: להגיע לשוויון $-5=+3$, הוא יודע שזה לא נכון, ומכאן **מבין** שאין פתרון.

(3) ***מ***: ממה תלמיד רואה יותר בברור שאין פתרון, מזה: $x-5=x+3$ או מזה: $-5=+3$?

(4) ***מיקי***: יש ילד שאם יש x בשני הצדדים עם אותו סימן, ואפשר להוריד, כבר היה רואה.

(5) ***מ***: ממה מבינים יותר?

(6) ***מיקי***: כשמורידים את ה-x, כי מה שמבלבל אותם זה שה-x-ם יכולים להיות שונים, כי סימן השוויון יכול לגרום לכך שחושבים שאם כתוב שוויון אז הוא מתקיים.

בתשובה הראשונה, בשורה 2, מיקי לא מציעה הסבר. קיים מתכון אותו היא יודעת, והיא מתייחסת **לידיעה** זו כאל **הבנה**, **ו**באותה צורה ש**היא** 'מבינה' גם 'התלמיד מבין'. אפשר להחליף את המילה *מבין* במילה *יודע*, וזו דוגמא מובהקת להבנה אינסטרומנטלית. בשורה 3 ניסיתי לכוון אותה שוב אל המשוואה. בתשובתה בשורה 4 כוונתה שמתוך המשוואה $x-5=x+3$ תלמידים מסוימים יכולים לראות את השוויון $-5=3$ בלי צורך לכתוב זאת במפורש. מכך משתמע שלדעתה הצורה $-5=+3$ עדיפה לצורך הבנה שאין פתרון. בשורה 5 ניסיתי לקבל תשובה ברורה לגבי העדפתה; בתשובתה בשורה 6 היא צופה שסימן השוויון עלול להיתפס כמחייב יותר מן ההסכם שבכל מופעי x במשוואה מציבים אותו מספר, וקונפליקט זה יכול לגרום לתלמידים לנסות לספק את המשוואה על-ידי הצבת ערכים שונים במקום x בשני האגפים. כדי למנוע זאת, היא מציעה לא להתעכב על שלב זה. יתכן שמיקי זיהתה כאן תופעה קיימת, אך היא בחרה לעקוף את הקונפליקט במקום לנצל אותו כהזדמנות לליבון של תפיסות שגויות.

בנוגע לענייננו, ללא הבנה שלמשוואה $x-5=x+3$ אין מספר שיקיים אותה, האמירה "אין פתרון" היא ריקה וחסרת משמעות. מיקי איננה רואה זאת, ומסיבות דידקטיות לדעתה, היא נחושה בדעתה לדלג על שלב זה, וליצור קשר לא מנומק בין פסוק שקר למסקנה שאין פתרון.

שיחה זו חושפת יותר מאחרות גישה בעייתית. במקרים אחרים הדבר אינו בולט כל כך, אך במקרה זה ההסבר היה מונח לנגד עיניה. למרות זאת מיקי העדיפה על פניו, שוב ושוב, הסבר אינסטרומנטלי (נטול הצדקה), על אף שהיא עצמה יכלה לראות מתוך המשוואה שהיא חסרת פתרון.

3.2.4 השיחה עם מיה

מיה היא תלמידת שנה ב. דרך הפתרון שלה מעט שונה, ומשפיעה על ההסבר שנתנה. היא פתרה כך:

$$2(3-3x)=2(1-x)-4x+4$$
$$6-6x=2-2x-4x+4$$
$$6-6x=6-6x$$
$$0x=0$$

מראיינת : צריך להראות להם משוואות כאלה?

מיה : כן.

מ : איך היית מסבירה להם?

בשלב זה מיה מתארת תסריט היפותטי של מה שיתרחש בכתה. היא צופה שכתגובה ראשונה יגידו התלמידים שלמשוואה אין פתרון, בעקבות זה היא תבדוק יחד איתם הצבה של מספרים אחדים, למשל 1, (2-) ועוד, בכולם יתקבל פסוק אמת, וכך הם יגיעו למסקנה שכל מספר מקיים את המשוואה.

העובדה שבדרך הפתרון שלה נשמר קיומה של תבנית, מאפשרת לה לתת הסבר שקשור להבנה קודמת של הדרך לפתור משוואות. ההסבר שלה נכון ואלגנטי, ורבים יעדיפו אותו על ההסבר שהצעתי בסעיף 3.2, כי האלגוריתם מגיע לכלל סיום ולא נותר 'תלוי באוויר'. את השמירה על מקדם ל-x , בין שהוא 1 ובין שהוא 0, ראתה מיה בתצפיותיה אצל המורים המאמנים.

כאשר דנו במשוואה הבאה חסרת הפתרון התמונה השתנתה מעט:

$$5(2x-2)-x=3(3x+1)-2$$

מיה פתרה והגיעה אל: $0x=11$

מ **:** וכאן? (איך תסבירי)

מיה **:** הם יודעים שבשלב הבא מחלקים ב- 0 ומקבלים $x=11/0$, אין דבר כזה, אז מה בעצם שווה x, הוא שווה לכלום, אין מספר כזה.

מ : בעצם אפשר בשלב של $0x=11$ לשאול אם יש מספר שכפול אפס ייתן 11.

מיה : אפשר, אבל **זה *בדרך של הבנה*, *להסביר***, אבל פה אני הולכת איתם בדרך שהם מכירים, בואו נמשיך הלאה ואז כשנתקעים בואו **נבין** את זה.

כאן מיה בוחרת להמשיך בפרוצדורה המוכרת ולא להשתמש ב'דרך של הבנה' - יתכן שזה משקף את אמונתה בהעדפות של התלמידים - היצמדות לפרוצדורות מוכרות. למרות שבמבט ראשון ההסבר שלה מסבר את העין, הרי בהתבוננות שניה נבחין שבאותה דרך אפשר היה במשוואה הקודמת לקבל $x=0/0$ ולומר: "אין דבר כזה לכן אין פתרון". (ההבדל בין המקרים נובע מכך שהסיבה בעטיה $0/0$ איננו מוגדר שונה מהסיבה שבעטיה $a/0$ אינו מוגדר עבור $a\neq 0$).

4. דיון

על מנת להשיג את המטרה של למידה משמעותית בנושא מסוים, על המורים המלמדים אותו להכיר במרכזיותה של הבנה מושגית ובחשיבותו של מתן הסבר משמעותי, במתמטיקה ובהוראתה. כמו כן עליהם להיות בעלי תפיסה מושגית שלמה ועקבית של אותו נושא, ולהיות מודעים לתפיסה זו במידה כזו שיוכלו לנסח אותה. מתוך התפיסה השלמה יוכלו המורים להחליט על הדרך הדידקטית ועל מידת ההדרגתיות בה יחשפו את הנושא בפני תלמידיהם. התמונה שמצטיירת מן הראיונות עם פרחי ההוראה, לפחות לגבי הנושא של פתרון משוואות, לא מצביעה על כך שדרישות אלו אכן מתקיימות.

בתגובה לשאלה "איך תתחילו את הצגת הנושא של פתרון משוואות", התחילו כל המרואיינות בהצגת הפרוצדורה, מה שמצביע על כך שגישה מושגית לנושא של פתרון משוואות לא נתפסת אצלן כמרכזית ואינה דומיננטית בחשיבה שלהן. כאשר נתבקשו במפורש להצדיק את תהליך הפתרון, לא התגלה שהן מכירות את התפיסה המתמטית של תוכנית הלימודים, אשר מושג השקילות הוא מושג מרכזי בה, וההסבר שלהן נשען על תפיסת x כנעלם המייצג מספר יחיד (סעיף 3.1). יחד עם זאת, כאשר פתרו, או ניסו להסביר משוואה שפתרונה הוא כל הממשיים, הן בצעו 'התאמה' (accomodation) של התפיסה שלהן, והתייחסו אל ה- x כמקבל ערכים רבים - כלומר כמשתנה. הנקודה החשובה היא שלא נראה שהן היו מודעות לחוסר העקביות אותה ביטאו בתשובותיהן. לא מתקבלת התחושה שיש להן צורך פנימי לנסח לעצמן תפיסה שלמה ועקבית של תהליך פתרון משוואה וההסבר לו, ונראה שהן מסתפקות בהסברים אד-הוק או בכך שהדברים 'מובנים מאליהם'. ההשלכות חורגות אל מעבר לתפיסה של נושא זה או אחר, ונוגעות לתפיסה של מהות המתמטיקה כאוסף של שיטות פתרון ולא כגוף ידע.

החלק הארי של הראיונות שהבאתי במאמר עוסק בהסברים ל'משוואות מיוחדות' או בבקשת הסבר לתופעה שאם בפתרון משוואה במשתנה אחד מתקבל

פסוק אמת, הפתרון הוא כל המספרים, ואם מתקבל פסוק שקר, אין פתרון. מה שביקשתי הוא הסבר משמעותי לתופעות אלו. המצב הרצוי הוא כמובן קיום יכולת לתת הסבר משמעותי, אך בפועל קיימים כמה מצבים לא רצויים:

1. הבנת מהות הסבר, ללא יכולת לתת הסבר בהקשר הנתון - זה נובע מהעדר ידע בתחום התוכן.
2. אין הבנה מה דורש הסבר כי הכלל עצמו נתפס כהסבר.
3. שימוש בהסברים לכאורה.

מצבים 2 ו- 3 מצביעים על אי הבנה של מהותו של הסבר מתמטי, בנוסף לאפשרות של העדר ידע בתחום התוכן.

לכל המרואיינות היה, פחות או יותר, הידע המתמטי הנחוץ להסבר: כולן ידעו מה מחפשים בפתרון, וידעו שלכל המשוואות הנוצרות בתהליך הפתרון יש אותו פתרון. לפיכך נראה שהסיבה להבדלים בין ההסברים שהן סיפקו נעוצה בתפיסה של מהותו של הסבר, יותר מאשר בהבנת תחום התוכן. אצל מיטל, אולי בשל היותה תלמידת שנה ראשונה, הזכרון היה מעורפל, והיא אף שגתה בתחילה בפתרון משוואות מיוחדות. לעומתה מיקי - תלמידת שנה ג - פתרה את המשוואות בבטחון ואף הביעה תמיהה על קלות המשימות שקיבלה. אולם כשנתבקשו לתת הסבר, מיטל, בתפיסתה את המשמעות של הסבר רלציוני הצליחה להגיע אליו, בעוד שמיקי, אשר יכלה להבין את ההסבר הרלציוני לפתרון המשוואה $x-5=x+3$, לא ראתה הבדל מהותי בין הסבר זה לבין ההסבר האינסטרומנטלי בו חזרה ובחרה מסיבות דידקטיות. לדעתה (סעיף 3.2.3). גם רוית (שנה ב), אשר הציגה בזה אחר זה הסבר אינסטרומנטלי, הסבר רלציוני והסבר לכאורה, ביססה את בחירתה על שיקולים דידקטיים, ולא הבחינה בין טיבם של ההסברים השונים (סעיף 3.2.1).

5. סיכום

נושא המשוואות ודרך פתרונן מוכר היטב לפרחי ההוראה מהלימודים בבית הספר העל-יסודי, והמיומנות בפתרונן בדרך כלל גבוהה, אך התפיסה המושגית השלטת נאיבית ולא רחוקה מזו של תלמידת כתה ח הנזכרת בתחילת המאמר. זו כנראה התפיסה שהתגבשה בלימוד הראשוני של הנושא. למרות שהתכנים הנלמדים בהמשך הלימודים בתיכון מחייבים שינוי של תפיסה מושגית זו, לא נראה ששינוי זה אכן מתרחש. ייתכן שאחת הסיבות לכך היא שככל שמתקדמים בחומר הלימוד עוסקים בבעיות מורכבות יותר, והדגש מושם על שיטות לפתרון בעיות, ועל מיומנות טכנית רבה יותר, ולא על ביסוס התפיסה המושגית. כיוון שהמתמטיקה לא נלמדת כגוף ידע שלם ועקבי, אזי כאשר נלמדים נושאים חדשים הקשורים מבחינה מושגית לנושאים קודמים, הם נלמדים במנותק ולא מתבצע קישור מפורש ביניהם. למשל הזכרת מושג השקילות במקרה של מערכת משוואות ליניאריות והקשר שלו לפתרון משוואה ליניארית אחת בנעלם אחד הנלמד בכתה ח.

הלימודים במכללה נותנים לתלמידים הזדמנות לחזור לנושא המשוואות ברמות שונות, במסגרות של קורסים שונים כמו למשל *תבניות ופסוקים*, *פונקציות ואלגברה ליניארית*. בקורסים אלה הם נחשפים למושגים המתמטיים המדוייקים (כמו למשל שקילות של משוואות או של מערכות משוואות), אך נראה שעוצמתה של התפיסה הראשונית שהתבססה בתיכון כה רבה, עד שהיא שבה ומשתלטת עליהם, ואותה הם מעבירים הלאה לתלמידיהם.

כדי לשבור את מעגל הקסם הזה ולנסות להשיג את המטרה של הבנה מושגית, יש להגדיר כאחת ממטרות הלימודים במכללה, בקורסים אלה ואחרים, את בניית ההשקפה שמתמטיקה היא גוף ידע עקבי העוסק במושגים, ולא רק אוסף שיטות לפתרון בעיות. כיוון שהתלמידים מגיעים לקורסים אלה עם ידע לא קטן בשיטות הפתרון, אפשר וכדאי להקדיש זמן במסגרתם לדיון **מפורש** בתפיסות ובמושגים העומדים מאחורי השיטות, ולעמת אותם מול התפיסות הנאיביות, הסמויות בדרך כלל, שהם מביאים עימם. כמו כן רצוי לקשר בין אותם מושגים הנלמדים בקורסים שונים, כמו פונקציות, אלגברה ליניארית, ותבניות ופסוקים. על בסיס הבנה מושגית טובה יותר של נושא המשוואות, ניתן לעסוק בקורסים הדידקטיים בשאלה מהי הדרך ההדרגתית הרצויה לחשיפת הידע בפני תלמידים, ומהו היחס הנכון בין לימוד מושגים ולימוד שיטות פתרון.

רשימת ספרות

בלודי-וינר ח. (1995), אנאלגבריות בלימודי האלגברה. *עלי"ה 16*, עמ' 39-45, המרכז להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט, האוניברסיטה העברית.

קרמרסקי ב., אז ג., ויונטה ר., זיו נ., לביא ט., מרום א., פלדמן ס., שילה ע. (תשנ"ט), קבוצות אמת של תבניות פסוק. *סדרת ה.ש.ב.ח.ה.*, המכון לקידום האינטגרציה החברתית, אוניברסיטת בר-אילן.

רובינזון נ., תעיזי נ. (1997), על תבניות II, *סדרת לומדים מתמטיקה*, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

Linchevski L. and Sfard A. (1991), Rules without reasons as Processes without objects - the case of Equations and Inequalities. In F. Furinghetti (ed.), *proceeding of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. II. 317-324), Assisi, Italy.

Sfard A. and Linchevski L. (1992), Equations and Inequalities - Processes without objects. *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universita e del Politcnico di Torino* (special issue).

Sfard A. and Linchevski L. (1994), The gains and pitfalls of reification - the case of Algebra. *Educational studies in Mathematics* 26: 229-274.

Skemp, R. R. (1976), Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematical teaching*, 77. 20-26.

Usiskin Z. (1988), Conception of school algebra and uses of variables. In Arthur F. Coxford and Albert P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, k-12,* (1988 yearbook, pp. 8-19), Reston Virginia: NCTM.

Vinner S. (1997), The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in Mathematics learning. *Educational studies in Mathematics* 34: 97-129.