הנושא: **כמעט בעל פה**

הוכן ע"י: יפים ומאיה כץ.

תקציר: ביצוע משימות חישוב בעל-פה - משימות אריתמטיות, מחדד את הבנת התכונות של המספרים ואת הקשרים ביניהם. במאמר זה מובאות דוגמאות למשימות אשר בחלקן מתאימות לבית-הספר היסודי, אך בודאי מעניינות גם בחטיבת הביניים, ודוגמאות המזמנות שימוש בתבניות אלגבריות ובנוסחאות הכפל המקוצר ומתאימות לחטיבת הביניים.

מילות מפתח: אריתמטיקה, פעולות חשבון, חיבור, חיסור, כפל, חילוק, אלגברה, טכניקה אלגברית, נוסחאות הכפל המקוצר, חזקות, מספר דו-ספרתי, מספר תלת-ספרתי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 17-21.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

כמעט בעל-פה

יפים כץ
מכללת לוינסקי לחינוך

מאיה כץ
חט"ב ע"ש סמדר, הרצליה

בימינו רווחת הדעה, כי לצורך חישובים אריתמטיים, ניתן להיעזר במחשבון ויש להפנות את עיקר המאמץ לאופקים אחרים. אך למעשה בביצוע משימות חישוב בעל-פה וללא עזרת מחשבון טמונים יתרונות ואתגרי חשיבה רבים, הנמנעים מתלמיד שאינו מתנסה בהם. למעשה האריתמטיקה היא צעד ראשון בדרך אל 'המתמטיקה הגדולה'. ביצוע משימות אריתמטיות מחדד את הבנת התכונות של המספרים ואת הקשרים ביניהם.
כתלמידים בבית-ספר יסודי היה עלינו לפתור 'תרגילי שרשרת' בעל-פה וללא עזרת מחשבון, תוך שמירה על סדר פעולות חשבון. בדרך כלל הקדשנו כחמש דקות לפתרון כל תרגיל ואף עשינו זאת בקבוצות של שבעה עד חמשה-עשר תלמידים.
אנו סבורים כי גם בחטיבת-הביניים יש מקום לתרגול בעל-פה של נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות.

למשל, ניתן לפתח את נוסחת הכפל, ולאחר שהתקבלה התבנית אפשר להשתמש בה לתרגול כמבצעת 'קסם'. אפשר ליצור תחרות בין קבוצות של תלמידים לשימוש מהיר ויעיל בנוסחאות, כאשר הן רשומות על הלוח.

במאמר זה מובאות דוגמאות למשימות מעשירות. בקבוצה הראשונה מופיעות משימות אריתמטיות המתאימות לבית-הספר היסודי, אך בודאי מעניינות גם בחטיבת הביניים. הקבוצה השניה מזמנת שימוש בתבניות אלגבריות ובנוסחאות הכפל המקוצר ועל-כן בודאי מתאימה לתכנית הלימודים של חטיבת הביניים.

משימות אריתמטיות

המשימות הבאות ניתנות לפתרון באמצעות אלגוריתמים מוכרים כחיבור ארוך, חיסור ארוך, כפל או חילוק. אך לחידוד ההבנה של הקשרים בין המספרים, נכון יותר לחפש דרכים לחישוב בעל-פה, אף ללא נייר ועיפרון.

א) יש לחשב את הסכום של המספרים 58 ו- 97.

העקרון

תוספת של מספר מסוים למחובר אחד וחיסורו מהסכום הכולל.

פתרון

אם נשלים את 97 ל- 100, כלומר אם נוסיף לו 3, כדי לשמור על הסכום, נצטרך לחסר תוספת זו מהסכום שיתקבל. לכן:

$$58+97=(58+(97+3))-3=$$
$$=(58+100)-3=158-3=155$$

דוגמה נוספת

$$592+87=((592+8)+87)-8=$$
$$=(600+87)-8=687-8=679$$

ב) יש לחשב את הסכום של המספרים 96 ו- 68.

העקרון

תוספת מספר מסוים למחובר אחד וחיסורו מהמחובר השני.

פתרון

$$96+68=(96+4)+(68-4)=$$
$$=100+64=164$$

דוגמה נוספת

$$995+856=(995+5)+(856-5)=$$
$$=1{,}000+851=1{,}851$$

ג) יש לחשב את ההפרש בין המספרים 81 ו- 37.

העקרון

תוספת של מספר זהה למחסר ולמחוסר.

פתרון

$$81-37=(81+3)-(37+3)=$$
$$=84-40=44$$

דוגמה נוספת

$$1{,}351-994=$$
$$=(1{,}351+6)-(994+6)=$$
$$=1{,}357-1{,}000=357$$

ד) יש לחשב את המכפלה של המספרים: 13, 2, 5.

העקרון

פירוק לגורמים (אם נחוץ) וקיבוץ הגורמים שמכפלתם היא חזקה של 10.

פתרון $2\cdot 5\cdot 13=(2\cdot 5)\cdot 13=10\cdot 13=130$

דוגמאות נוספות

$$2\cdot 5\cdot 13=(2\cdot 5)\cdot 13=10\cdot 13=130$$
$$4\cdot 18\cdot 25=(4\cdot 25)\cdot 18=100\cdot 18=1{,}800$$
$$16\cdot 7\cdot 125=4\cdot 4\cdot 7\cdot 25\cdot 5=(4\cdot 25)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 7)=$$
$$=100\cdot 10\cdot 14=1{,}000\cdot 14=14{,}000$$

ה) יש לחשב את המכפלה של המספרים 8 ו- 24.

העקרון

הצגת אחד הגורמים כסכום או הפרש ושימוש בחוק הפילוג.

פתרון

$$8\cdot 24=8\cdot(20+4)=$$
$$=8\cdot 20+8\cdot 4=160+32=192$$

דוגמא נוספת

$$12\cdot 28=12\cdot(30-2)=$$
$$=12\cdot 3\cdot 10-12\cdot 2=360-24=$$
$$=((360+4)-24)-4=340-4=336$$

ו) יש לכפול את המספר 32 ב- 5, ב- 25 וב- 125.

העקרון

כפל ב- 5 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 2 וכפל ב- 10.

באופן דומה:

כפל ב- 25 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 4 וכפל ב- 100; כפל ב- 125 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 8 וכפל ב- 1,000.

פתרון

$$32\cdot 5=32:2\cdot 10=16\cdot 10=160$$
$$32\cdot 25=32:4\cdot 100=8\cdot 100=800$$
$$32\cdot 125=32:8\cdot 1{,}000=4\cdot 1{,}000=4{,}000$$

ז) יש לחלק את המספרים 230, 2,300, 23,000 במספרים 5, 25, 125 בהתאמה.

העקרון

חילוק ב- 5 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 10 וכפל ב- 2.

באופן דומה:

חילוק ב- 25 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 100 וכפל ב- 4; חילוק ב- 125 שקול לשתי הפעולות: חילוק ב- 1000 וכפל ב- 8;

פתרון

$$230:5=230:10\cdot 2=23\cdot 2=46$$
$$2{,}300:25=2{,}300:100\cdot 4=23\cdot 4=$$
$$=(20+3)\cdot 4=80+12=92$$
$$23{,}000:125=23{,}000:1000\cdot 8=$$
$$=23\cdot 8=(20+3)\cdot 8=160+24=184$$

ח) יש לכפול את המספר 28 ב- 9, ב- 99, ב- 999 וב- 9999.

העקרון

כפל בחזקה המתאימה של 10 על-פי מספר הספרות של 9 באחד הגורמים וחיסור הגורם האחר מהמכפלה.

פתרון

$$28\cdot 9=28\cdot 10-28=280-28=$$
$$=280-30+2=252$$
$$28\cdot 99=28\cdot 100-28=2{,}800-28=$$
$$=2{,}800-30+2=2{,}772$$
$$28\cdot 999=28\cdot 1{,}000-28=28{,}000-28=$$
$$=28{,}000-30+2=27{,}972$$

שימו לב:
שלוש התוצאות של המכפלות האחרונות הן מספרים פלינדרומים. אלה מספרים שאם כותבים כל אחד מהם בסדר ספרות הפוך מתקבל מספר זהה למקורי.
תוכלו לחקור את השאלה הבאה: באיזה תנאי המכפלה של מספר טבעי ב- 99, 999, 9 וכו' היא מספר פלינדרומי?

משימות אריתמטיות המזמנות שימוש בתבניות אלגבריות ובנוסחאות הכפל המקוצר

א) יש לחשב את החזקה השנייה של מספר דו-ספרתי שספרת האחדות שלו היא 5.

העקרון

נסמן את ספרת העשרות של המספר ב- a (a טבעי, $1 \le a \le 9$). נקבל:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 =$$
$$= 100a(a+1) + 25$$

ספרת העשרות במספר הדו-ספרתי הנתון

המספר העוקב לספרת העשרות

כלומר: החזקה השנייה של מספר דו-ספרתי בעל ספרת אחדות 5, מתקבלת על-ידי תוספת של 25 לכפל ב- 100 של מכפלת ספרת העשרות במספר העוקב לה. למעשה, נוכל לרשום תחילה את ספרת האלפים (אם קיימת) וספרת המאות כמכפלה ב- 100 של ספרת העשרות במספר העוקב לה, ואז לימינן לרשום את המספר 25.

דוגמאות

$$65^2 = 100 \cdot 6 \cdot 7 + 25 =$$
$$= 4{,}200 + 25 = 4{,}225$$
$$95^2 = 100 \cdot 9 \cdot 10 + 25 =$$
$$= 9{,}000 + 25 = 9{,}025$$

ב) יש לחשב את החזקה השנייה של מספר דו-ספרתי שספרת העשרות שלו היא 5.

העקרון

נסמן את ספרת האחדות ב- a (a טבעי, $0 \le a \le 9$).

$$(50+a)^2 = 2500 + 100a + a^2 =$$
$$= \underbrace{(25+a) \cdot 100}_{} + a^2$$

מספר ארבע ספרתי שספרת העשרות וספרת האחדות בו הן אפסים

כלומר: החזקה השנייה של מספר דו-ספרתי שספרת העשרות שלו היא 5 מתקבלת מסכום של החזקה השנייה של ספרת האחדות שלו עם המספר הארבע-ספרתי שספרת עשרותיו וספרת אחדותיו הן אפסים וספרת האלפים וספרת המאות שבו הן המספר הדו-ספרתי המתקבל מהוספת ספרת האחדות של המספר המקורי למספר 25. למעשה נרשום את הסכום $a + 25$ ומימין נרשום את a^2.

דוגמאות

$$58^2 = (25+8) \cdot 100 + 8^2 =$$
$$= 3{,}300 + 64 = 3{,}364$$
$$53^2 = (25+3) \cdot 100 + 3^2 = 2{,}800 + 9 = 2{,}809$$

ג) יש לחשב את החזקה השנייה של המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא 4.

העקרון

בדומה לסעיף האחרון נסמן את ספרת האחדות ב- a ונקבל:

$$(40+a)^2 = 1{,}600 + 80a + a^2 =$$
$$= 1{,}500 + 100 + 100a - 20a + a^2 =$$
$$= (1{,}500 + 100a) + (100 - 20a + a^2) =$$
$$= (15+a) \cdot 100 + (10-a)^2$$

דוגמאות

$$43^2 = (15+3) \cdot 100 + (10-3)^2 =$$
$$= 1{,}800 + 49 = 1{,}849$$
$$49^2 = (15+9) \cdot 100 + (10-9)^2 =$$
$$= 2{,}400 + 1 = 2{,}401$$

ד) יש לחשב את החזקה השנייה של המספרים הדו-ספרתיים שספרת העשרות שלהם היא 1.

העקרון

בדומה לסעיפים הקודמים נסמן את ספרת האחדות ב- a ונקבל:

$$(10+a)^2 =$$
$$= 100 + 20a + a^2 = (10+2a) \cdot 10 + a^2$$

דוגמאות

$$12^2 = (10 + 2 \cdot 2) \cdot 10 + 4 = 140 + 4 = 144$$
$$18^2 = (10 + 2 \cdot 8) \cdot 10 + 64 = 260 + 64 = 324$$

ה) יש לחשב את החזקה השנייה של מספרים דו-ספרתיים בעלי ספרת עשרות 9.

העקרון

כמו בסעיפים הקודמים נסמן ב- a את ספרת האחדות.

$$(90+a)^2 = 8{,}100 + 180a + a^2 =$$
$$= 8{,}000 + 100 + 200a - 20a + a^2 =$$
$$= (8{,}000 + 200a) + (100 - 20a + a^2) =$$
$$= (80+2a) \cdot 100 + (10-a)^2$$

דוגמאות

$$93^2 = (80+2\cdot 3)\cdot 100 + (10-3)^2 =$$
$$= 8{,}600 + 49 = 8{,}649$$
$$97^2 = (80+2\cdot 7)\cdot 100 + (10-7)^2 =$$
$$= 9{,}400 + 9 = 9{,}409$$

ו) יש לחשב את החזקה השניה של מספר תלת-ספרתי שספרת האחדות שלו היא 5.

העקרון

נסמן ב- a את ספרת המאות וב- b את ספרת העשרות. (a, b טבעיים, $0 \le b \le 9$ $\quad 1 \le a \le 9$)

$$(100a+10b+5)^2 = (10(10a+b)+5)^2 =$$
$$= 100(10a+b)^2 + 100(10a+b) + 25 =$$
$$= (10a+b)\cdot(10a+b+1)\cdot 100 + 25$$

דוגמאות

$$105^2 = (10\cdot 1+0)\cdot(10\cdot 1+0+1)\cdot 100 + 25 =$$
$$= 10\cdot 11\cdot 100 + 25 = 11{,}025$$
$$235^2 = (10\cdot 2+3)\cdot(10\cdot 2+3+1)\cdot 100 + 25 =$$
$$= 23\cdot 24\cdot 100 + 25 =$$
$$= (20+3)\cdot 24\cdot 100 + 25 =$$
$$= (480+72)\cdot 100 + 25 = 55{,}225$$

ז) יש לחשב את המכפלה של שני מספרים דו-ספרתיים בעלי ספרות עשרות זהה ואשר סכום ספרת האחדות של שניהם הוא 10.

העקרון

נסמן את המספר האחד ב- $10x+y$

ואת המספר השני ב- $10x+z$

וידוע: $y+z=10$

$$(10x+y)\cdot(10x+z) =$$
$$= 100x^2 + 10xz + 10xy + yz =$$
$$= x(10x+z+y)\cdot 10 + yz =$$
$$= x(10x+10)\cdot 10 + yz =$$
$$= x(x+1)\cdot 100 + yz$$

דוגמאות

$$48\cdot 42 = 4\cdot 5\cdot 100 + 8\cdot 2 = 2{,}000 + 16 = 2{,}016$$
$$99\cdot 91 = 9\cdot 10\cdot 100 + 9\cdot 1 = 9{,}000 + 9 = 9{,}009$$

ח) יש לחשב את המכפלה של שני מספרים תלת-ספרתיים בעלי ספרת מאות וספרת עשרות זהה, אשר סכום ספרות האחדות שלהם הוא 10.

העקרון

כמו במשימה הקודמת נסמן מספר אחד ב-
$100x+10y+z$

מספר שני ב- $100x+10y+t$

וידוע: $z+t=10$

נסמן גם: $10x+y=k$

$$(100x+10y+z)\cdot(100x+10y+t) =$$
$$= (10(10x+y)+z)\cdot(10(10x+y)+t) =$$
$$= (10k+z)\cdot(10k+t) =$$
$$= 100k^2 + 10kt + 10kz + zt - 10k(10k+t+z) + zt =$$
$$= 10k(10k+10) + zt = k(k+1)\cdot 100 + zt$$

דוגמאות

$$102\cdot 108 = 10\cdot 11\cdot 100 + 2\cdot 8 = 11{,}016$$
$$333\cdot 337 = 33\cdot 34\cdot 100 + 3\cdot 7 = 112{,}221$$

נשים לב שאת המשימות בסעיפים ז ו-ח ניתן לפתור גם על-ידי שילוב של נוסחת הכפל המקוצר של הפרש ריבועים: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ עם הדרך שהוזכרה בסעיף א, לחישוב החזקה השניה של מספרים דו-ספרתיים שספרת האחדות שלהם היא 5.

$$48\cdot 42 = (45+3)\cdot(45-3) =$$
$$= 45^2 - 3^2 = 2{,}025 - 9 = 2{,}016$$
$$91\cdot 99 = (95-4)\cdot(95+4) =$$
$$= 95^2 - 4^2 = 9{,}025 - 16 = 9{,}009$$
$$102\cdot 108 = (105-3)\cdot(105+3) =$$
$$= 105^2 - 3^2 = 11{,}025 - 9 = 11{,}016$$
$$333\cdot 337 = (335-2)\cdot(335+2) =$$
$$= 335^2 - 2^2 = 112{,}225 - 4 = 112{,}221$$

ובאופן כללי, אם $y+z=10$ אזי:

$$(10x+y)\cdot(10x+z) =$$
$$= 100x^2 + 10xz + 10xy + yz =$$
$$= (10x)^2 + 10x(y+z) + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(10x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 =$$
$$= (10x+5)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2$$

הסתמכנו על הזהות:

ועל הנתון:

$$\begin{cases} yz = \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 \\ \frac{y+z}{2} = \frac{10}{2} \end{cases}$$

ט) יש לחשב את החזקה השניה של מספר דו-ספרתי (הגדול מ- 25).

העקרון

מסתמכים על הזהות:

$$x^2 = (x-25)\cdot 100 + (x-50)^2$$

דוגמאות

$$42^2 = (42-25)\cdot 100 + (42-50)^2 =$$
$$= 17\cdot 100 + 64 = 1{,}764$$
$$39^2 = (39-25)\cdot 100 + (39-50)^2 =$$
$$= 14\cdot 100 + 121 = 1{,}521$$

י) באופן דומה לסעיף ט, יש לחשב את החזקה השניה של מספר תלת-ספרתי (הגדול מ- 250).

העקרון

כמו בסעיף ט, אבל משתמשים במספרים 250 ו- 500. כלומר, מסתמכים על הזהות:

$$x^2 = (x-250)\cdot 1{,}000 + (x-500)^2$$

דוגמאות

$$489^2 = (489-250)\cdot 1{,}000 + (489-500)^2 =$$
$$= 239{,}000 + 121 = 239{,}121$$
$$504^2 = (504-250)\cdot 1{,}000 + (504-500)^2 =$$
$$= 254{,}000 + 16 = 254{,}016$$

רשימת מקורות

1. *אחת, שתיים ושלוש... מתמטיקה לבית-הספר היסודי*. מט״ח, תל-אביב, 1992.
2. ב. גורן, *אלגברה חלק א*. הוצאת המחבר.
3. ב. גורן, *אלגברה חלק ב*. הוצאת המחבר.
4. ש. דוידוביץ-לפידות, *מתמטיקה לבית הספר היסודי*, חשבון לכיתות ה׳-ו׳, ספר ראשון. המכון לאמצעי הוראה.
5. נ. וילנקין, א. ז׳סנוקוב, ס. שברבורד, *מתמטיקה 4*. פרוסוושציה, מוסקבה (ברוסית), 1986.
6. מ. משלר, *אלגברה לשנת הלימודים השביעית*. הוצאת הקיבוץ המאוחד, תל אביב, 1976.
7. א. סוין, בעל-פה וספירה בידים, *KVANT 1*, עמ׳ 40-41 (ברוסית), 1984.
8. מ. פרנסקו, מספר שיטות לחישובים מהירים, *מתמטיקה בבית-הספר 1*. (ברוסית), עמ׳ 22-24, 1992.
9. י. פרלמן, *שעשועים באריתמטיקה*. סטולטיה, מוסקבה (ברוסית), 1994.
10. ב. רחבלסקי, *מבחני חזרה בחשבון ובהנדסה*. הוצאת עמיחי, ת״א.

לסיכום: חשוב מאוד לדעתנו לחשוף את התלמידים לקשר בין תבניות באלגברה לבין חישובים אריתמטיים, יש בכך תרומה לגיוון התרגול יחד עם הארה של היופי של החשבון.

גאוס, מגדולי המתמטיקאים של המאה ה- 19, אמר כי: ״המתמטיקה היא מלכת המדעים והחשבון הוא מלך המתמטיקה״.