״קשר חם״ – המרכז הארצי
לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי

הטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
מוסד הטכניון למחקר ופיתוח

מל״מ
המרכז הישראלי להוראת
המדעים ע״ש עמוס דה שליט

הנושא: מושג הפונקציה בבית הספר

הוכן ע״י: עמוס ארליך, החוג להוראת המדעים, אוניברסיטת תל אביב.

תקציר: המאמר עוסק בהצגת מושג הפונקציה בבית הספר, ובו מוצע 'להחליש את מעמדם' של התחום והטווח, 'לחזק את מעמדו' של הכתיב $f(x)$ ולהחזיר גם את גישת המשתנה התלוי.

מילות מפתח: אלגברה, פונקציות, תכונות פונקציה, תחום, טווח, משתנה, משתנה תלוי, קבוצה, זוג סדור.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 29, סתיו תשס״ג, 2002, עמודים 12-16.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

מושג הפונקציה בבית הספר

עמוס ארליך
החוג להוראת המדעים, אוניברסיטת תל-אביב

המאמר הנוכחי עוסק בהצגת מושג הפונקציה בבית הספר, ובו אציע 'להחליש את מעמדם' של התחום והטווח, 'לחזק את מעמדו' של הכתיב $f(x)$ ולהחזיר גם את גישת המשתנה התלוי.

מושגיה של המתמטיקה התיכונית נלקחים, בעיקרם, מתוך המתמטיקה 'הבוגרת', וסביר להניח שמה שהוצע לבתי הספר בזמנים שונים הושפע מאופנות מתמטיות שרווחו בזמנים המתאימים. לכן אפתח בדיון על גישות מתמטיות שונות למושג הפונקציה, ובהדרגה יעלו השיקולים הפדגוגיים ויתפסו את המקום המרכזי.

מבוא - תורת הקטגוריות

מושג הפונקציה שבתוכניות 'החדשות' בארץ הוא יליד תקופה המיוצגת על-ידי תורת הקטגוריות. מכיוון שתורה זאת פחות מוכרת למורים, אקדים כמה מלים על מושגיה ההתחלתיים. אפתח בשלוש דוגמאות:

<u>קטגוריית החבורות</u> היא המערכת הבנויה ממחלקת כל החבורות ומחלקת כל ההומומורפיזמים מחבורה לחבורה.

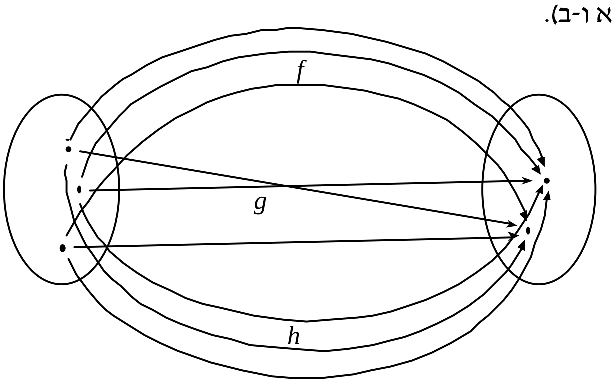
ב<u>קטגוריית הקבוצות</u> נמצאות כל הקבוצות עם כל הפונקציות שביניהן.

<u>קטגוריית המרחבים הטופולוגיים</u> כוללת את מחלקת המרחבים הטופולוגיים ומחלקת הפונקציות הרציפות ממרחב טופולוגי לחברו.

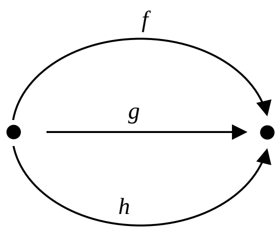
ובהכללה, <u>קטגוריה קונקרטית</u> מכילה רכיבים הנקראים אובייקטים ורכיבים הנקראים מורפיזמים. לכל אובייקט יש איברים, וכל מורפיזם הוא פונקציה מקבוצת האיברים של אובייקט אחד אל קבוצת האיברים של אובייקט אחר. לא כל פונקציה כזאת חייבת להיות מורפיזם, אך הפונקציה הזהותית $f(x)=x$ מקבוצת איבריו של אובייקט אל עצמה היא מורפיזם, ואם שני מורפיזמים f ו- g ניתנים להרכבה, כלומר, הטווח של האחד הוא התחום של השני, אז גם הפונקציה $g\circ f$ המתקבלת מהרכבתם היא מורפיזם.

את המעבר ממושג הקטגוריה הקונקרטית אל מושג הקטגוריה (סתם) ניתן לצייר כמעבר מציור א שלהלן אל ציור ב.

ובמלים: מתעלמים מכך שלאובייקטים יש איברים ומכך שהמורפיזמים הם פונקציות מסוג מסוים, אך זוכרים שכל מורפיזם פועל מאובייקט אל אובייקט, זוכרים אילו מורפיזמים ניתנים להרכבה, וזוכרים מיהו המורפיזם המתקבל מהרכבתם (דברים אלה אינם מיוצגים בציורים א ו-ב).



ציור א

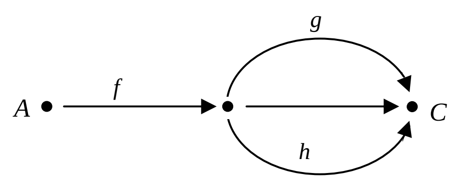


ציור ב

לא אביא כאן הגדרה כללית של מושג הקטגוריה. במקום זה אציין, שתכונות המתוארות בקטגוריות קונקרטיות בעזרת התיחסות לאיברים של האובייקטים ניתנות, לפעמים, לניסוח המתייחס למורפיזמים ולאוביקטים בלבד, ותורת הקטגוריות עוסקת בתכונות כאלה.

דוגמה: בקטגוריה הקונקרטית של הקבוצות אומרים שפונקציה $f:A\to B$ היא <u>על</u> הטווח אם לכל y בטווח

קיים x בתחום כך שמתקיים: $f(x)=y$. זה שקול לכך שלכל שתי פונקציות g ו- h ששתיהן מ- B אל C כלשהן (ציור ג), אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.
נוסח שקול זה של תכונתה של f הוא הגדרת המושג 'אפימורפיזם' בתורת הקטגוריות.



ציור ג

(בקטגוריית הקבוצות, אפימורפיזם הוא, אפוא, פונקציה על הטווח. בקטגוריית המרחבים המטריים עם הפונקציות הרציפות, אפימורפיזם הוא פונקציה המעתיקה את התחום על קבוצה צפופה בטווח).

פונקציה כגודל תלוי ופונקציה כקבוצה חלקית של מכפלה קרטזית

עד שנות השישים המוקדמות הוצג מושג הפונקציה בבתי הספר רק בנוסח הקשור עם המושגים 'גודל משתנה', 'משתנה חפשי' ו'משתנה תלוי'. y נקרא פונקציה של x אם ערכו תלוי בערכו של x.
בתקופה שבה רצו לבנות את כל המתמטיקה על תורת הקבוצות היה קסם רב להגדרה: פונקציה מקבוצה D לקבוצה R היא קבוצה f החלקית למכפלה הקרטזית $D\times R$ ולה התכונה: לכל x שב- D קיים y יחיד ב- R כך שמתקיים $(x,y)\in f$. מושג הגודל המשתנה נתפס כמושג יסודי מיותר ואופיו הדינמי נחשב פוגע בבהירותו, לכן שיערו שגם בבית הספר התיכון תהיה עדיפות להגדרה שבתורת הקבוצות.

אקדים ואציין שתלמידי בית הספר התיכון לא ראו כל קושי במושג הגודל המשתנה. יתר על כן, בהזדמנות אחת נוכחתי אפילו שההצגה הסטטית בנוסח תורת הקבוצות לא ביטלה את נקודת המבט הדינמית, ומעשה שהיה כך היה: בכתה י אחת (כתה טובה המשופעת בבטחון עצמי) הצגתי את מושג הפונקציה בעזרת המכפלה הקרטזית. כשעסקנו בגרף של פונקציה ביקר בכיתה מפקח, ושאל את התלמידים אם הפונקציה שבה עסקנו עולה או יורדת. ממבע פני התלמידים עלה שהשאלה נראתה להם שלא לעניין ובחיוך סלחני ענו לו שזה תלוי בשאלה אם x עולה או יורד.

תקופתה של תורת הקבוצות הותירה עקבות חזקים ביותר על מה שהיה קרוי 'המתימטיקה החדשה לבתי הספר', ואחד מהם הוא הדגשת ה'שרירותיות' של פונקציה. הבה נעמוד על מקורה של הדגשה זאת.
קיומה של קבוצה אינו מחייב קיומה של תכונה אופיינית לאיברי הקבוצה, פרט לעצם שייכותם לקבוצה. למשל, אכסיומת הבחירה טוענת לקיומן של קבוצות-בחירה מתאימות, בלי להציע קריטריון בחירה. בדומה לזאת יכולה פונקציה f להיות כל קבוצה חלקית שרירותית של $D\times R$ (הממלאת את תכונת החד-ערכיות), בלי שיצורף לה כלל או תהליך חישוב הקובע איזה y יהיה בן זוגו של x נתון. אמת, הדרישה לקיומו של כלל או תהליך כזה תהווה הגבלה מסֻרבלת ביותר, אך יש מרחק רב מכאן ועד למחשבה שצריך להדגיש שכלל מאחד כזה אינו נדרש.

תחום, טווח והתאמה

כשמסתכלים על זוג (x,y) יחיד מתוך f (או על נקודה בודדת מן הגרף), נראה כאילו יש סימטריה בין מעמדו של x ובין מעמדו של y. המבט על קבוצת הזוגות בשלמותה מכניס כיווניות ומאפשר להסתכל על הזוג (x,y) כעל מעבָר $x\mapsto y$, כי כל x קובע y יחיד אשר $(x,y)\in f$ ואילו בהנתן ערך y אפשר שלא יהיה בשבילו שום ערך x מתאים ואפשר שיהיו לו גם יותר מערך x מתאים אחד.

הגדרת מושג הפונקציה על-ידי תחום, טווח והתאמה מן התחום אל הטווח, מדגישה את הכיווניות הזאת. בהגדרה זאת, פונקציה $f:D\to R$ בנויה מקבוצה D הנקראת תחום, מקבוצה R הנקראת טווח, ומקבוצת מעברים מהצורה $x\mapsto y$ המקשרת לכל x מן התחום איבר יחיד y מן הטווח.
קבוצת המעברים הזאת נקראת התאמה ומיוצגת על-ידי החץ $\to$.
הערה: לפעמים קוראים בשם פונקציה להתאמה בלבד, ואז התחום והטווח קשורים לפונקציה אך אינם חלק ממנה.
ההבחנה בין הסימנים $\to$ ו- $\mapsto$ היא הבחנה מקובלת, אך המונח 'מעבר' אינו מונח מקובל. אני מציע אותו כדי שלא להשתמש במלה 'התאמה' בשתי משמעויות שונות. דרך תיאור ההתאמה כקבוצת מעברים אני מקווה לגייס חלק מן הפשטות של גישת קבוצת הזוגות לשירותה של

גישת התחום הטווח וההתאמה.
נראה שחלק מקשיי התלמידים בהבנת מושג הפונקציה נבע מהניסיונות להציג את ההתאמה כעצם מתמטי אחד ולא כקבוצת מעברים בודדים. זה בדומה להצגת פעולת הגרירה בחיפוש קבוצת אמת של תבנית פסוק, כיחס הכלה בין קבוצות-אמת ולא כמעבר בין טענות החלות על כל פתרון בנפרד.

בשני המקרים יש גילויים של הנטיה לטפל במערכת מורכבת כבעצם אחד, נטיה שתורת הקטגוריות היא מייצג בולט שלה.

איני מזלזל ביתרונות ובהישגים של נטיה זאת, אך אני מבקש שלא להטילה על התלמידים בשלב מוקדם מדי.

ובכל מקרה, בין אם נסתכל על ההתאמה כעל דבר אחד ובין אם נראה בה קבוצת מעברים (אך לא אם נראה בה תהליך חישוב), נהיה חייבים להצמיד לה תחום וטווח, שאם לא כן היא תלך 'משום מקום לשום מקום'.

פונקציות בשפות-תיכנות

בשפות תיכנות מסוגן של בייסיק ופסקל, הגדרה של פונקציה f לא כוללת את המושגים תחום וטווח. כל מה שחשוב הוא שבהינתן ערך בשביל x תחשב ההגדרה ערך בשביל $f(x)$.

לדוגמה, אם בתוכנית בשפת True-BASIC מופיעה ההגדרה: DEF $f(x)=x\char`^2-5*x+6$ אז $f(4)$ מסמן את המספר 2 (היינו $4^2-5\cdot4+6$) ואם $a=10$, אז $f(3a-18)$ הוא 90 $(12^2-5\cdot12+6=)$.

הגדרת f שלעיל יכולה לשמש בתוך הגדרה אחרת. לדוגמה, אם נכתוב:

DEF $s(x)=(f(x+0.0001)-f(x))/0.0001$ אז לכל x יהיה $s(x)$ קרוב ל- $f'(x)$.

אפשרויות ההגדרה של פונקציה הן גמישות למדי. לדוגמה, ההגדרה שלהלן מגדירה פונקציה שהגרף שלה מזכיר סולם ומגלשה בגן שעשועים לילדים:

```
DEF    g(x)
  LET  g = 3*x  then  x <= 2  and  IF x >= 0   (הסולם)
 g = 12 / x  then LET  x <= 10   and  IF x > 2   (המגלשה)
END DEF
```

אך בדרך הטבע אין שפות התיכנות עוסקות בפונקציה שאין מצורף לה <u>תהליך חישוב</u> בשביל הערכים. לדוגמה, אין בהן מקום לפונקציות שהגדרתן אינה כוללת תהליך חישוב כמו הפונקציה $q(x)$ המקבלת ערך 1 עבור x רציונלי וערך 0 עבור x שאינו רציונלי.

נציין שלמרות שההגדרה של פונקציית המגלשה g שלעיל לא קבעה ערך עבור $g(11)$, לא יחשב $g(11)$ לביטוי שגוי (כמו 1/0) אלא ל- 0. אם רוצים ש- g לא תהיה מוגדרת עבור ערכי x כגון זה, אפשר להוסיף להגדרתה את השורה:

IF $x<0$ or $x>10$ then LET $g=1/0$

עניין נוסף: גם ב- True-BASIC וגם בפסקל אפשר להגדיר פונקציה בסגנון המשתנה התלוי, שאינו נושא עימו את ציון הארגומנט.

ההגדרה $y=x^2-5x+6$ תיכתב ב- True-Basic בצורה:

DEF $y=x\char`^2-5*x+6$

ובפסקל בצורה:

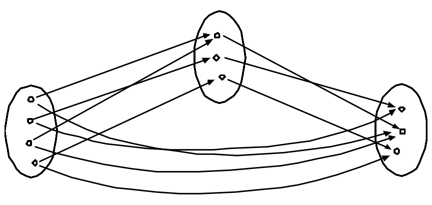
```
begin
function y : real ;
 y := x*x-5*x+6;
 end ;
```

בעקבות אלה, בכל מקום בו יקרא y הוא יקבל את הערך הנקבע על-ידי ערכו של x.

אני מעלה עניין זה כנגד החשש שמא יש משהו פסול בגישת המשתנה התלוי.

הרכבת פונקציות וכלל השרשרת

אחד הנושאים בהם יש יתרון פדגוגי לגישת התחום, הטווח וההתאמה הוא הרכבת פונקציות. ציור ד שלפנינו, השייך לגישה זאת, מדגים הן את תיאום התחומים והטווחים והן את צירוף המעברים.



ציור ד

אך אם נבדוק היכן אנו משתמשים בהרכבת פונקציות בביה"ס התיכון, נמצא שלא זאת היא התמונה הדרושה לנו. בתכנית הלימודים מופיעה הרכבת פונקציות רק בגזירת פונקציה מורכבת (כלל השרשרת), אך כשאנו רוצים לגזור פונקציה כגון $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ אין אנו חושבים על תחומים וטווחים ולא על ביצוע שתי התאמות

בזו אחר זו, אלא על האפשרות לכתוב את הפונקציה הנידונה בצורה $g(h(x))$.

דוגמתנו מוליכה אותנו צעד נוסף אחורנית ומצביעה על יתרון של גישת המשתנה התלוי. אפשר אמנם לכתוב את כלל השרשרת בצורה $(g(h(x))' = g'(h(x))\cdot h'(x)$ אך הצורה $y'_x = y'_z \cdot z'_x$ שקופה ונוחה ממנה.

הגזירה הנידונה תבוצע כך: נסמן $y = \sqrt{25 - x^2}$ נכניס פונקציה מתווכת $z = 25 - x^2$ ואז $y = \sqrt{z}$.

ומכאן:

$$y'_x \; y'_z \cdot z'_x = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

עיקרו של היתרון שעלה כאן הוא בהופעת y'_z במקום $g'(h(x))$, אשר בו קשה לראות כיצד יש לבצע את הגזירה.

יתרון בהירות נוסף מופיע בשלב ההוכחה של כלל השרשרת.

אם הסימון באמצעות Δ-ים מוכר אז הנוסח:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x} \rightarrow y`_z \cdot z`_x$$

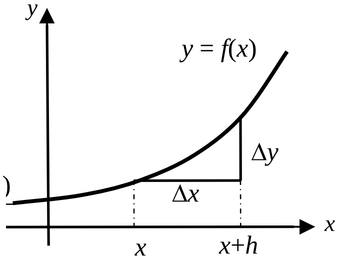
פשוט מן הנוסחים המשתמשים בכתיב $f(x)$.

כתיב $f(x)$

בהמשך לאמור לעיל נציין שגישת המשתנה התלוי והשימוש בכתיב $f(x)$ משלימים זה את זה.

בשוויון שמשמאל לציור שלהלן, אגף שמאל מדגיש את הצד הגיאומטרי ומראה שמדובר בשיפוע , ואילו אגף ימין הוא זה שבמקומו מציבים את הביטויים המתאימים, לקראת החישוב והמעבר לגבול.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



והרי שתי דוגמאות נוספות לתועלת שבכתיב $f(x)$.

א. f היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור T אם לכל x מתקיים: $f(x+T) = f(x)$.

ב. (דוגמה הניתנת להכללה) אם $f(x) = x^2 - 4x + 2$ אז $f(x) - f(2) = (x-2)^2$. ניתן להשתמש בתבנית זו להצבעה על מינימום.

בתכונה הבאה: $f(2+d) = f(2-d)$ ניתן להשתמש להצדקת סימטריה. והתכונה $f(2+d) = 2 + d^2$ עוזרת למציאת האפסים: $d = \pm\sqrt{2}$.

הערה מתודית: דוגמה ב מצביעה על אפשרות להשתמש בסימון $f(x)$ כסימון מקוצר עבור תבנית-מספר, וזאת עוד לפני הכנסת מושג הפונקציה.

מושג התחום של פונקציה הפוכה

$\sqrt{x}$ היא הפונקציה ההפוכה ל- x^2 רק אם תחומה של זו מוגבל ל- $[0, x)$.

$\arcsin x$ הפוכה ל- $\sin x$ רק אם תחומה של *sin* מוגבל ל- $[-\pi/2, \pi/2]$.

<u>אם מושגי התחום והטווח מוכרים</u> אז בהגדרת פונקציה הפוכה יש יתרון פדגוגי בהזכרת חילוף תפקידיהם. אם לא, הרי לפנינו הזדמנות להכניס את מושג התחום (אך לא את מושג הטווח) בהקשר שבו יש לו תפקיד. נגדיר, למשל,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{אם } x \ge 0 \\ \text{לא - מוגדר} & \text{אחרת} \end{cases}$$

ואחר-כך נדון במושג התחום.

הגבלת התחום כדי לאפשר מניפולציות

לדוגמה, לפתרון האי-שוויון $\frac{x^2 + 7x - 7}{x - 2} > 3$ נפריד את התחום לשני חלקים. האחד הוא $x > 2$ ובו שקול האי-שוויון שלנו ל- $x^2 + 2x - 7 > 3(x-2)$ והשני הוא $x < 2$ ובו האי-שוויון שקול ל- $x^2 + 2x - 7 < 3(x-2)$.

בדוגמה זאת אין מושג הפונקציה נזכר במפורש, אך בגישתנו אין חשיבות להצמדת מושג התחום לפונקציה דווקא.

סיכום

אם משתנה יוצג כאות שאפשר לתת לה הוראה מספרית ואפשר להחליף הוראה זאת על פי הצורך, נוכל לקבוע שהוראתו של המשתנה y תיקבע בכל זמן על פי ההוראה

שיקבל המשתנה x. כך יהיה y משתנה התלוי במשתנה החופשי x וייקרא גם פונקציה של x.
תבנית מספר תוכל להיות מסומנת בקצרה $f(x)$ ומשתנה תלוי יוכל להיות מסומן 'בהארכה' $f(x)$, וכך נוכל ליהנות מיתרונותיו של כתיב הפונקציות.
מושג התחום ומושג הטווח יצטרפו למושג הפונקציה רק בשלב שבו יש להם תפקיד משמעותי.