הנושא: **# ניתוח גישות תלמידים, מהיחידה הקדם-אקדמית, בפתרון משוואות ואי-שוויונים**

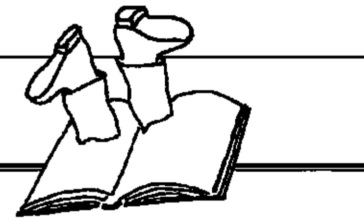
הוכן ע"י: ענת סוזן.

תקציר: במאמר מתואר מחקר שהתמקד בהוראת הנושא 'פתרון משוואות ואי-שיוויונים' על-ידי תלמידים ביחידה הקדם-אקדמית באוניברסיטת חיפה. מטרת המחקר היתה לבדוק את תרומתה של סביבת למידה רבת ייצוגים ונתמכת מחשב, שפותחה על ידי החוקרת, להבנת התהליכים האלגבריים הנדרשים לפתרון בעיות המשלבות 'פתרון משוואות ואי-שיוויונים'. ממצאי המחקר מצביעים על תרומה משמעותית.

מילות מפתח: מחקר, גישה אנליטית, גישה גרפית, גישה מקשרת, שילוב המחשב בהוראה, מחשב, פתרון בעיות, אסטרטגית פתרון, יוריסטיקות, יוריסטיקה, פתרון משוואות, משוואות פרמטריות, פרמטר, אי-שוויונים, דיסקרימיננטה, משוואה ריבועית, אי-שוויון ריבועי, פונקציה ריבועית, פרבולה, קישור, פונקציה, ייצוגים, ייצוג גרפי, ייצוג אלגברי, ייצוג אנליטי, פתרונות, הכללה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 27-41.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 15 עמודים.



עיון ומחקר

ניתוח גישות תלמידים, מהיחידה הקדם־אקדמית, בפתרון משוואות ואי־שוויונים*

ענת סוזן
היחידה הקדם־אקדמית, אוניברסיטת חיפה

המחקר המתואר במאמר זה התמקד בהוראת הנושא 'פתרון משוואות ואי־שוויונים' המופיעים בבעיות מסוגים שונים לתלמידים מבוגרים, גילאי 20+, במסגרת שיעורי המתמטיקה שלהם ביחידה הקדם־אקדמית

'פתרון משוואות ואי־שוויונים' הוא חלק אינטגרלי בלימוד המתמטיקה בכל שנות הלימוד בבית הספר לפיכך, היה אפשר לצפות שתלמידים המגיעים ללמוד ביחידה הקדם־אקדמית ואשר למדו את הנושא זמן רב ידעו להתמודד אתו המציאות היא שתלמידים המגיעים ללמוד ביחידה יודעים, בדרך כלל, לפתור משוואות ואי־שוויונים מסוימים ממעלה ראשונה וממעלה שנייה אולם התהליכים אשר הם מבצעים הם חסרי משמעות עבורם יש להם קושי אם בעת פתרון משוואה הנעלמים מתבטלים, או כאשר פתרון אי־שוויון ריבועי כולל דיסקרימיננטה קטנה מאפס הם מתקשים במציאת פתרון למשוואות ואי־שוויונים שאי־אפשר לפתור בגישה אנליטית וכאלה המוצגים בלי רמז לאלגוריתם מוכר שיוביל לפתרון כמו כן אין הם מקשרים בין הייצוגים הגרפי והאלגברי המתאימים לשאלה מסוימת (גם כשהייצוג הגרפי ניתן עם הצגת השאלה), אם נעשה ניסיון לקשר בין הייצוגים חסר ידע לביצוע נכון של הקישור

בעיות אלו הטרידו אותי כמורה למתמטיקה התופסת את ההוראה כמהלך שבא לצייד תלמידים בכלים ללמידה משמעותית שישרתו אותם (מעבר לתוכן, subject matter, הספציפי הנלמד) קשה היה לי להסתפק בשיפור האופן שבו הם מבצעים טכניקות שונות שלא חיפה על חוסר ההבנה.

חוקרים בתחום מדגישים כי נושא 'פתרון משוואות ואי־שוויונים' דורש מהתלמידים שילוב בין ידע של ביצוע טכני, הבנה, תכנון ובקרה, וכי כדי להצליח בו עליהם לרכוש ידע מתמטי מגוון ולפתח הרגלים נכונים לפתרון בעיות (Matz 1980, Fey 1984, Schoenfeld 1985, Kieran 1989) את המקור לקשיי התלמידים בהתמודדות עם הנושא החוקרים רואים לאו דווקא בבסיס הידע המתמטי שלהם או בחוסר ידע אלגוריתמי אלא באופן ארגון הידע, עיבודו והגישה אליו (Silver 1985) בעקבות ממצאי מחקרים והתיאוריות הללו ביקשתי להתייחס למהלכי פתרון משוואות כאל תחום הדורש שימוש באסטרטגיות חשיבה של 'פתרון בעיות' (problem solving) לצורך זה עיצבתי סביבת לימוד שבה היה אפשר לבחון את גישות התלמידים בהתמודדות עם משוואות ואי־שוויונים בלתי מוכרים ובלתי שגרתיים

כדי לקיים סביבה כזו ובו־בזמן להמשיך בהוראה לפי תכנית הלימודים המחייבת, הוכנסו שינויים בגישת ההוראה והעיקריים שבהם

1) קישור בין הפרקים השונים הנלמדים במהלך שנת הלימודים באמצעות המושג 'פונקציה'

מומחים ממליצים על הנהגת גישה המקשרת בין נושאים שונים במתמטיקה תוך כדי שילוב מושגים שונים בתחום הנלמד ושילוב מושגים בין תחומים שונים במטרה לעזור לתלמידים לקשר ולמפות את הידע בתבניות־על (סכמות) (Tall 1991). המושג 'פונקציה' היה מושג מרכזי שסייע

* המאמר מתבסס על עבודת M A אשר נכתבה בהנחייתה של פרופסור מיכל ירושלמי מהפקולטה לחינוך באוניברסיטת חיפה

לקשר פרקים שונים באלגברה, בטריגונומטריה ובחשבון דיפרנציאלי. תהליך 'פתרון משוואות ואי־שוויונים' קיבל משמעות באמצעות המושג 'פונקציה', כאשר מתייחסים אל 'הביטויים' המופיעים במשוואות ובאי־שוויונים כתיאורים סימבוליים של פונקציה, ואל 'משוואות' ו'אי־שוויונים' כהשוואות בין פונקציות (גפני 1996). גישה זו לנושא אפשרה שימוש באותה דרך מתמטית ובאותם מושגים לתכנים שונים בתכנית הלימודים ואפשרה קישור בין הנושאים השונים שנלמדו בשנת הלימודים.

2) העמקת בסיס הידע בנושא הפונקציות תוך כדי שימוש בסביבה ממוחשבת

נושא הפונקציה הריבועית, שהוא פרק מרכזי בתכנית הלימודים, נלמד במעבדת מחשבים באמצעות הלָמדה Function Analyzer (Schwartz & Yerushalmy 1990) המאפשרת תלת־ייצוג של פונקציות (במשך 8 שיעורים רצופים, כל שיעור בן 105 דקות, שכללו עבודה עצמית מודרכת ודיונים כיתתיים תוך כדי שימוש ביחידת לימוד להוראת הנושא בסיוע הלמדה שנכתבה במסגרת המחקר) ולאחר מכן בכיתת הלימוד — ללא למדה (במשך 4 שיעורים בני 105 דקות) בשיטת לימוד שהעקרונות המנחים אותה פורטו לעיל.

3) מתן לגיטימציה לשימוש בייצוג גרפי במהלך פתרון בעיות

הייצוג הגרפי שימש להמחשת מושגים ותהליכים מופשטים וסיפק משמעות לדרישות שהוצגו לתלמידים בבעיות שהם התמודדו אתן ולמניפולציות האלגבריות שביצעו. למשל פתרון משוואה מהסוג $2x+5=-3x+8$ הוצג כמציאת שיעור ה־x של נקודת החיתוך בין הגרפים המתאימים $f(x)=2x+5,\ g(x)=-3x+8$ ופתרון אי־שוויון מהסוג $2x+5>0$ הוצג כמציאת ערכי x שעבורם ערכי הפונקציה $f(x)=2x+5$ הם חיוביים ו/או שעבורם הפונקציה נמצאת מעל ציר x (Chazan 1993).

4) שילוב הוראה מפורשת של אסטרטגיות לפתרון בעיות, כחלק אינטגרלי מהתוכן המתמטי הנרכש

ממחקרים התברר כי אצל רוב התלמידים היכולת לפתור בעיות מתפתחת לאט לאורך זמן כתוצאה מהוראה שיטתית ומתוכננת היטב ומהתנסות בפתרון מגוון בעיות.

כדי למנוע מהתלמידים גישה אימפולסיבית בפתרון שולבה **במחקר הנוכחי** הוראת אסטרטגיות 'פתרון בעיות' במהלך השוטף של שיעורי המתמטיקה תוך כדי הפניית מודעות התלמיד לתהליכי חשיבתו.

- בכל בעיה שהתלמידים התמודדו אתה הודגשו ארבעת שלבי הפתרון, לפי גישתו של Polya (1957): 'ניתוח הנתונים', 'תכנון הפתרון', 'ביצוע הפתרון' ו'ביקורתו' (בטבלה 1 מוצגות פעילויות ההוראה שננקטו בעת הדגשת השלבים השונים).

- תורגל השימוש **במספר מצומצם של היוריסטיקות**[1], **תוך כדי הדגמה מפורטת של יישומן**, בתוכן המתמטי הנלמד, ותוך כדי הקדשת תשומת לב מתמדת לאספקטים המטקוגניטיביים של הפתרון (הדגשת חשיבות תהליך הפתרון עצמו ועידוד מתן הסברים האמורים לסייע בפיקוח על הביצוע).

- **הודגשו ניתוח הנתונים, ניתוח דרך הפתרון וביקורתו באמצעות רב־ייצוג מקושר של פונקציות.**

  הקישור המתמיד בין ייצוגים (מילולי, גרפי, סימבולי ומספרי), שהתלמידים נתקלו בו בכל הזדמנות, נעשה במטרה לעודד את הפיכת השילוב בין הייצוגים ליטבעי' עבורם ואפשר למורה הצגת אסטרטגיה המקשרת בין הייצוגים.

- **הוצעו והודגמו גישות שונות בפתרון אותה בעיה,** במידת האפשר תוך כדי הדגשת חשיבות תהליך הפתרון ומשמעותו.

- מודעות התלמידים הופנתה לתכנון תהליכי פתרון בעיות.

  הפניית המודעות למרכיבים המטקוגניטיביים של הפעילות נעשתה לפי המלצותיהם של Silver (1985), Garofalo et al (1987), ושל Schoenfeld (1992) הן על־ידי שיתוף התלמידים בשיקולי המורה (על־ידי הדגמה מפורשת של החלטות בקרה, פיקוח וויסות שהמורה נוקט בתהליך הפתרון) והן על־ידי הפניית שאלות שחייבו אותם לתכנן את ביצועיהם, להסבירם ולנתחם במהלך פתרון בעיות.

---

(1) ההיוריסטיקות אשר בהוראתן התמקדנו במהלך שנת הלימודים הן סרטוט דיאגרמה, הוכחה באינדוקציה, ניסיון לפתור בעיה עם פחות משתנים, הצבת תת־מטרות. מדובר בהיוריסטיקות שהתברר כי תלמידים יכולים לרכוש את מיומנות השימוש בהן (במחקרים שערך Schoenfeld [1985]).

5) הצגת בעיות לא שגרתיות ולא מוכרות לתלמידים במבחנים

בהנחה כי המבחנים הם בבחינת מנוף לעיצוב סגנון הלמידה של התלמידים, וכי דרישות המורה מלמדות אותם על אודות המיומנות הנדרשת מהם בתהליך הלמידה, ממליצים וינר (1992), Selden, Mason, Sowder (1993). & Selden (1989) לכלול במבחנים בעיות הדורשות מהתלמידים ראיית קשרים, שילוב בין ייצוגים ובדיקת הכללת המשמעות בהתאם להמלצותיהם שולבו במבחנים, במהלך שנת הלימודים כולה, בעיות מתוך הנושאים הנלמדים שאינן שגרתיות עבור התלמידים בעיות הדורשות שימוש בתהליכים קוגניטיביים שהם מעבר לביצוע אוטומטי ואשר כדי לענות עליהן נדרשים התלמידים לחשוב על אופן ניצול המידע שעומד לרשותם בעיות המתייחסות לתהליך ולא רק לתוצר, בעיות שלא ברור מראש, באופן חד־משמעי, איזו גישת פתרון יש לנקוט ואשר לא בהכרח נתקלו בהן, או בדומות להן, במהלך לימודיהם בכיתה ביניהן בעיות שפתרונן בדרך גרפית קצר יותר, בעיות אשר לשם פתרונן חייבים לערוך שיקולים גרפיים ובעיות הדורשות מהתלמיד לגלות בקיאות בשילוב ייצוגים (הבעיה המוצגת בגישה גרפית דורשת פתרון מילולי ו/או מספרי ולהפך) בעיות בעלות המאפיינים המפורטים לעיל מרכיבות את כלי המחקר (ראה טבלה 2) בעת בדיקת השערות המחקר הסתמכנו על הגישות שנקטו תלמידים מסביבת המחקר בהתמודדותם עמהן

סביבת הוראה זו אפשרה לנו לבחון אם תלמידים שלמדו בסביבה החדשה סיגלו לעצמם עבודה בגישה גרפית (גם כשאין הם נדרשים לכך במפורש), אם הם למדו לקשר בין ייצוגים וכן מה מידת השימוש באסטרטגיות פתרון שונות בעקבות הלימוד. ביתר פירוט בדקנו את

(1) סוג הייצוג שבו נעשה שימוש במהלך הפתרון

הייצוגים שנעשה בהם שימוש במהלך פתרון בעיות המחקר סווגו ל־3 קטגוריות ייצוג גרפי/ייצוג אנליטי או קישור בין ייצוגים אפיונם נעשה לפי הצעתם של Zazkis et al (1996) לכלול ב

(א) גישה גרפית כל התייחסות לגרף ותכונותיו — בין אם הגרף מסורטט או שהתייחסו אליו מבלי שסורטט (הגרף נמצא במחשבה)

טבלה 1: פעילויות ההוראה שננקטו במטרה להקנות לתלמידים אסטרטגיות של פתרון בעיות
(עובדו לפי המלצות Charles & Lester 1984, עמ' 20, Schoenfeld 1985, עמ' 109, Mayer 1985, עמ' 126)

שלב הפתרון	הפעילות המומלצת
הבנת הבעיה	הקדש חשיבה משמעותית לייצוג הבעיה לשם כך אפשר להיעזר בסרטוט להיעזר ברישום הנתונים לחשוב על מאפיינים כלליים ועל הקשרים שבין חלקי המידע השונים להבהיר במילים שלך את הנתונים ואת הדרישה
פיתוח תכנית	חשוב האם פתרנו בעבר בעיה דומה? בעיה בעלת מאפיינים דומים? חשוב האם יש יותר מדרך אחת לפתרון? הערך את יעילות הגישות השונות דון באסטרטגיות פתרון אפשריות לפני שמתחילים בפתרון ובקש מהתלמידים להציע הסברים מדוע אסטרטגיה מסוימת יכולה להתאים
ביצוע הפתרון	תרגול השימוש באסטרטגיות היוריסטיות כגון צירוף דיאגרמה, ניסיון לפתור בעיות דומות פשוטות יותר, בחינת מקרים מיוחדים הקשורים בבעיה, הצבת ערכים מספריים בבעיה עם פרמטרים וניסיון הכללה התרגול באמצעות הדגמת גישות פתרון פתרון בעיה במספר דרכים, אם הדבר אפשרי, תוך כדי עמידה על היתרונות והחסרונות שבדרך פתרון מסוימת הדגשת תהליך הפתרון
הערכת הפתרון	חשוב האם הפתרון ניתן להכללה? האם הפתרון מקיים את כל תנאי הבעיה? נסח תשובה מלאה בהתאם לשאלה האם התשובה הגיונית? בדוק מה למדת מהפתרון שיהיה שימושי בפתרון בעיות אחרות?

(ב) גישה אנליטית יישום אלגוריתמים שונים ו/או כל

מניפולציה סימבולית כפתרון משוואה, פתרון אי־שוויון, פישוט ביטויים אלגבריים, ביצוע חישובים וכד׳

(ג) **קישור בין ייצוגים** אם במהלך פתרון בעיה נעשה שימוש בגישות השונות (גרפית — אנליטית) לפי הגדרתנו לעיל, ובנוסף בוצע איזשהו קישור בין הגישות.

(דוגמה תלמיד שחישב ערכה של Δ במשוואה ריבועית ואחר כך התייחס למשמעות סימן הדיסקרימיננטה בגרף המתאים החישוב עצמו יסומן כנקיטת גישה אנליטית. קישור בין ייצוגים בוצע, אם למשל עבור $\Delta > 0$ הוא רשם כי לפרבולה המתאימה 2 נקודות חיתוך עם ציר x, או סרטט את הנקודות בגרף מצורף)

(2) אסטרטגיית פתרון: סיווגנו את אסטרטגיות הפתרון לארבע קטגוריות

(א) ניתוח נתונים· התייחסות מפורשת של התלמיד למצב הנתון שאליו מתייחסת הבעיה עמה הוא מתמודד

(ב) ניתוח הדרישה התייחסות מפורשת של התלמיד לדרישה המוצגת בפניו בבעיה מסוימת

(ג) תכנון הפתרון ו/או הסברו התייחסות מפורשת של התלמיד לשלבים הנדרשים ממנו במהלך ההתמודדות עם הבעיה ו/או הסבר מהלך הפתרון והתוצאות המתקבלות

(ד) ביקורת הפתרון בדיקה מפורשת של נכונות התשובה שהתלמיד הגיע אליה ו/או של נכונות תוצאה כלשהי שהתקבלה בדרך לתשובה הסופית

כלי המחקר

המחקר נערך במהלך הלימודים השגרתי של מקצוע המתמטיקה בכיתה הלומדת ברמה של 4 יחידות לימוד, במסגרת מכינת בגרות ביחידה הקדם־אקדמית באוניברסיטת חיפה השתתפו בו 16 תלמידים[1], מכיתה אשר בה לימדתי את נושא ׳פתרון משוואות ואי־שוויונים׳ בגישה שתוארה לעיל כלי המחקר העיקרי היה ניתוח תשובות התלמידים על בעיות במבחנים שהיו חלק מתכנית הלימודים הרגילה בכיתה זו. המבחנים נערכו בשלושה שלבים במהלך שנת הלימודים

בראשית שנת הלימודים לאחר חזרה אינטנסיבית (שנמשכה כשבועיים) על מיומנויות ומושגים מתמטיים בסיסיים שהתלמידים צריכים להכיר ולדעת לבצע (בהם פעולות חשבון במספרים, טכניקה אלגברית, המושג פונקציה ותת־נושאים הקשורים אליו) התמודדו התלמידים עם שאלון שהשאלות שהוצגו בו היו כאלה שהם טרם נתקלו בשכמותן במהלך עבודתנו המשותפת במסגרת הנחקרת עד לשלב זה (אם כי ברובן או בכולן היו אמורים להיתקל בלימודיהם בעבר)

בסמוך לסיום לימוד נושא הפונקציה הריבועית, בתחילת דצמבר

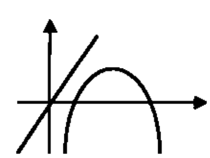
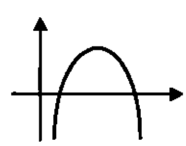
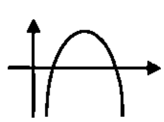
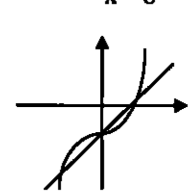
במבחן מסכם שנערך סמוך לסיום שנת הלימודים ולמועד בחינת הבגרות הצפויה, בתחילת חודש יוני

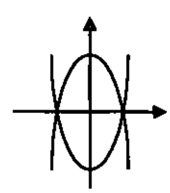
בשלושת המבחנים התלמידים התבקשו במפורש לפרט את כל השיקולים שלהם במהלך הפתרון ולבדוק את תשובותיהם, נאמר להם כי יקבלו נקודות עבור כל שיקול נכון במהלך הפתרון ולא רק עבור התשובה הסופית הם יכלו למסור את עבודותיהם לאחר שהרגישו כי סיימו להתמודד עם הבעיות כמיטב יכולתם לאחר החזרת המבחנים הבדוקים נערכו פגישות אישיות עם התלמידים המידע שנאסף בשיחות שנערכו סייע להבהרת כוונתם המקורית בעת הפתרון

הבעיות כפי שהוצגו לתלמידים, בשלושת השלבים של שנת הלימודים, מפורטות בטבלה 2 בניסוחן נעזרנו בבעיות המופיעות במחקריהם של Sfard & Linchevski 1994, Even 1990 ובמחקר שערכה גפני (1996) בעקבות מחקר מקדים סווגו הבעיות ל־6 קטגוריות שונות

(1) במסגרת זו לומדים תלמידים גילאי 20 בעלי 11 שנות לימוד (לפחות) שבמהלכן למדו מתמטיקה ברמה כלשהי במשך שנת לימודים אקדמית הם לומדים באינטנסיביות נושאים מתמטיים נבחרים, נושאים אשר להוראתם בבית הספר מוקדשים חודשים רבים ולעתים אף שנים הם נבחנים במספר קטן יותר של נושאים, מאלה הנכללים בחומר הלימודים של משרד החינוך לבחינות הבגרות, אך נדרשים להעמקה בנושאים הנלמדים יותר מהנדרש בבחינות רשמיות של משרד החינוך

טבלה 2: הבעיות המתמטיות ששימשו במחקר בהתאם לקטגוריות השונות

שלב הצגת הבעיה / קטגוריה	**בתחילת שנת הלימודים**	**אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית**	**בסוף שנת הלימודים**
קטגוריה א: בעיות הקשורות לפתרון אי־שוויונים ריבועיים בעלי $\Delta < 0$	פתור את האי־שוויון $x^2-3x+8>0$	מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{\frac{x-5}{x^2-3x+5}}$	כמה פתרונות לאי־שוויון $x^2-3x+5>0$
קטגוריה ב: בעיות הקשורות לפתרון אי־שוויונים ריבועיים המוצגות עם התיאור הגרפי המתאים	נתונים הביטויים (א) x (ב) $-x^2+6x-8$ והגרפים שלהם  פתור את האי־שוויון $-x^2+6x-8<x$	בסרטוט מצורף הגרף המתאים לפונקציה $f(x)= -x^2+6x-8$  פתור את האי־שוויון $-x^2+6x>8$	בסרטוט מצורף הגרף המתאים לפונקציה $f(x)= -x^2+6x-8$  פתור באיזו דרך שתבחר את האי־שוויון $\lvert -x^2+6x-8\rvert > 3$
קטגוריה ג: בעיות הדורשות יישום טכניקות מתמטיות ידועות בהקשרים שונים מאלה שהתלמידים פגשו עד לשלב הצגת השאלה	כמה פתרונות למשוואה $x^3-8=4x-8$ 	נתונה הפונקציה $f(x)=mx^2+4x-8m$ רשום את כל ערכי m עבורם הגרף מתאים לפונקציה הנ״ל אינו נוגע בציר x.	כמה פתרונות יש למערכת הבאה $k-y=2$ $x+y=k$

שלב הצגת הבעיה קטגוריה	**בתחילת שנת הלימודים**	**אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית**	**בסוף שנת הלימודים**
קטגוריה ד: בעיות הדורשות הכללה לפרמטרים, שאפשר לפתור בגישה גרפית או אלגברית	כמה פתרונות יש למשוואה $(x-m)(x+m)=2x$	אלו מצבים הדדיים יתכנו בין הפרבולות שמשוואותיהן $y=(x+2)^2+5$ $y=-(x+2)^2+n$	עבור אלו ערכי m למשוואה $(x-2)^2+3=m$ אין פתרון?
קטגוריה ה: בעיות שמניסוחן לא ברור לאיזה תחום ידע מתמטי הן שייכות	נתונים הביטויים א $2x^2-18$ ב. $-(2x^2-18)$ והגרפים המתארים אותם  סמן את התשובה הנכונה 1 ביטוי א גדול תמיד מביטוי ב 2. ביטוי ב גדול תמיד מביטוי א 3. לפעמים ביטוי א גדול מביטוי ב ולפעמים ביטוי ב גדול מביטוי א 4 שני הביטויים שווים 5 אי־אפשר לדעת איזה ביטוי גדול יותר	נתונים הביטויים האלגבריים א $x+2$ ב $-x^2+5x-10$ סמן את התשובה הנכונה 1 ביטוי א גדול מביטוי ב' לכל x ממשי 2 ביטוי ב גדול מביטוי א לכל x ממשי 3 לפעמים ביטוי א גדול מביטוי ב ולפעמים ביטוי ב גדול מביטוי א 4 שני הביטויים שווים 5. אי־אפשר לדעת איזה ביטוי גדול יותר	נתונים הביטויים א $2x+1$ ב $-2(x-3)^2+1$ איזה סימן יש לרשום ביניהם כך שתתקבל טענה נכונה לכל x ממשי
קטגוריה ו: בעיות הדורשות הכללה לפרמטרים בגישה גרפית	כמה פתרונות יש למשוואה $2^x=mx^2$?	כמה פתרונות יש למשוואה $\|x-m\|=\log_2(X-1)$?(*)	כמה פתרונות למשוואה $\log_{0.5}(x-1)=\|x-m\|$?

(*) עם בעיה זו התמודדו התלמידים אחרי לימוד נושא הפונקציה הלוגריתמית בראשית ינואר

אספקטים שונים בדרכי הפתרון שנקטו התלמידים

ניתוח מפורט של עבודות התלמידים, שבמהלכו נבחנו גישות הפתרון שנקטו, אפשר לזהות אספקטים שונים בדרכי הפתרון. סיכום הגישות יובא בהמשך המאמר באמצעות הניתוח הסטטיסטי. נתייחס כאן לשניים מהם:

(א) מאפיינים בדרכי העבודה הגרפית של תלמידים במחקר הנוכחי.

ב) מורכבות העבודה בגישה גרפית.

א) האספקטים העיקריים שזוהו בעבודתם הגרפית של תלמידים מכיתות המחקר (יודגמו בהמשך באמצעות מובאות מעבודות התלמידים):

- מקריאת התשובות התקבל רושם של מעין 'אינטימיות' ביחס לגרפים המתגלה בעת העבודה. התלמידים שולפים ומסרטטים את הגרפים הנדרשים בהינף יד באופן כמעט אוטומטי. נראה כי הם יצרו לעצמם מאגרים אישיים שונים וייחודיים של פונקציות מסוגים שונים (ליניאריות, ריבועיות, מעריכיות, לוגריתמיות ועוד) שהווה בסיס להתייחסות במהלך פתרון בעיות. בסרטוט הם מסתמכים על תכונות מהותיות של הגרף (כתחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות וכד'), מתייחסים למשפחות של פונקציות ומבצעים הזזות שונות.

- נעשה **שימוש מגוון בגישה הגרפית בפתרון:** הגרפים שימשו מסגרת מושגית למתן משמעות לבעיה, לניתוח הנתונים, להשגת הפתרון ולבקרתו.

- **תלמידים קישרו בין ייצוגים שונים של פונקציות:** הם הציגו את רעיונותיהם באופן סימבולי, נומרי וגרפי ועברו הלוך ושוב בין ייצוגים אלה. אופן הקישור בין ייצוגים, כפי שהתבטא בעבודותיהם, הצביע על התייחסותם לייצוג הגרפי באותה דומיננטיות כמו לייצוג האלגברי, על גמישות המתבטאת בבחירת הייצוג המתאים ביותר לפתרון בעיה נתונה בהתאם לנסיבות ועל יכולת לראות ייצוג אחד כשעובדים עם ייצוג אחר. לא אחת נוכחנו לדעת כי תלמידים השתמשו בייצוג מסוים מספר פעמים בפתרון אותה בעיה.

אופיו הספירלי של הקישור בין מרכיבי חשיבה אנליטית ומרכיבי חשיבה חזותית שנמצא בעבודות התלמידים במחקר הנוכחי מתאים לרעיון שבבסיס מודל VA שהציעו Zazkis et al (1996) (במודל הצביעו על שילוב גורמים חזותיים Visualization וגורמים אנליטיים Analysis של החשיבה בעת התמודדות עם מצב נתון עד שכמעט אי־אפשר להבחין ביניהם). מודל זה וגישות הפתרון שנקטו תלמידים במחקר הנוכחי המצביעות על כך כי אינם נצמדים לגישה מסוימת מדגימים כי קשה, ואולי אף אי־אפשר, לדבר על 'טיפוס חזותי לחלוטין' או 'טיפוס אנליטי לחלוטין'.

- המאפיינים הנ"ל של העבודה הגרפית וההצלחה בפתרון משוואות פרמטריות מצביעים על התגבשות 'תפיסה מבנית' של הפונקציה בקרב התלמידים (תפיסה המתבטאת לפי Sfard 1987 בהתייחסות למושגים מתמטיים, כגון המושג פונקציה, כאילו היו עצמים ממשיים — ישות, וכרוכה בחשיבה עליהם כעל עצמים מוגמרים תוך כדי התעלמות מתהליך היווצרותם. תפיסה המתאפיינת בזיהוי רעיון 'ממבט אחד' וביכולת פעולה על הישות כולה מבלי להיכנס לפרטים).

בדוגמאות הבאות מעבודותיהם המקוריות של התלמידים אפשר להיווכח כיצד מאפיינים אלה באים לידי ביטוי. נזכיר כי ההתמודדות עם הבעיות נעשתה בזמן מבחן בכיתה ללא סיוע מחשב.

דוגמה 1

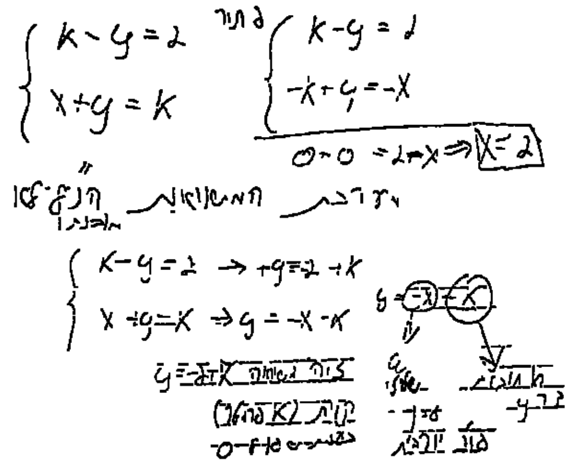
להלן אחת הבעיות אשר התלמידים התמודדו עמה בסוף שנת הלימודים:

כמה פתרונות למערכת הבאה:

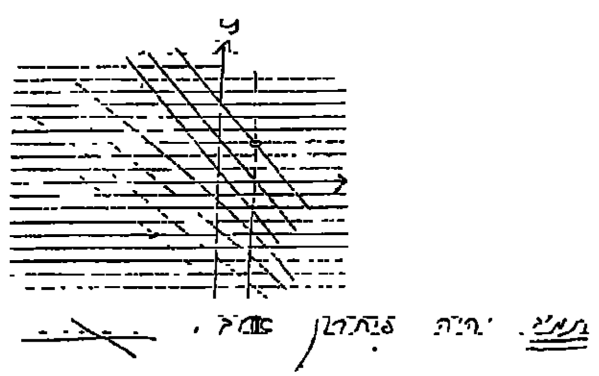
$$k - y = 2$$
$$x + y = k$$

הבעיה הוצגה אצל Sfard & Linchevski 1994.

בעיה זו נחקרה בעבר והתברר כי תלמידים מתקשים להתמודד אתה. הקשיים מקורם ביכולת לפתור מערכת משוואות פרמטרית (אי־בהירות בנוגע לתפקיד הפרמטר k במשוואות), ובחוסר הבנת משמעות המערכת מכיוון שבמשוואה הראשונה אחד הנעלמים (x) אינו מופיע ובמהלך הפתרון אחד הנעלמים מתבטל (y). להלן פתרונו של תלמיד מכיתות המחקר לבעיה. התלמיד התחיל בהפעלת פרוצדורה המתאימה לפתרון מערכת משוואות ממעלה ראשונה (פעילות שסווגה במחקר הנוכחי כעבודה בגישה אנליטית). הוא קיבל ערך מספרי נכון עבור X אך לא הבין את משמעות התשובה שהתקבלה ולא ידע כיצד להמשיך לעבוד בגישה זו. אז עבר לגישה גרפית. הוא קישר כל ביטוי אלגברי לתיאור הגרפי המתאים ובחן את אופי הישרים המתקבלים לאחר הקישור.



למסקנה הנכונה הגיע על סמך סקיצה כללית שצירף תוך כדי התייחסות למהות הדרישה (בסקיצה אפשר להיווכח בהתייחסות התלמיד למשפחת פונקציות ולהשפעת הפרמטר על הזזה אנכית)



במקרה זה גישה גרפית חילצה את התלמיד ממצב לא ברור (עבורו) שאליו נקלע **לאחר** הפעלת פרוצדורה אלגברית

דוגמה 2

בעיה נוספת שהתלמידים התמודדו עמה בסוף שנת הלימודים היא הבעיה הבאה

יכמה פתרונות יש למשוואה $\log_{0.5}(x-1) = |x-m|$ "

שני קשיים כרוכים בפתרון בעיה זו א) בפתרון אלגברי של המשוואה לפי הגדרת פונקציית ה־log מקבלים

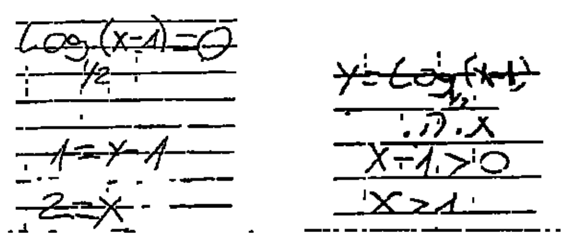
$x-1 = (0.5)^{|x-m|}$

משוואה שבה הנעלם x מופיע הן בבסיס והן במעריך (במסגרת הנחקרת תשובה לבעיות מסוג זה הושגה בגישה גרפית בלבד). ב) הביטוי האלגברי המופיע בניסוח הבעיה בסימן הערך המוחלט, כולל פרמטר m, כאשר לכל ערך מספרי של m מתקבל גרף אחר

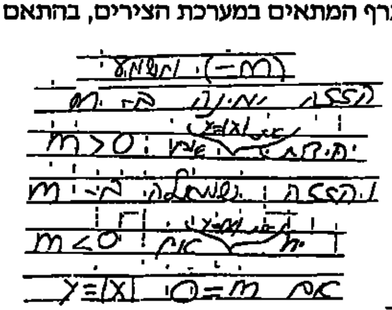
בעיות מסוג זה אינן ניתנות, בדרך כלל, בבחינות הבגרות הרשמיות של משרד החינוך (ברמה של 4 יח"ל)

לחלן גישתה של אחת התלמידות בהתמודדות עם בעיה זו (כפי שבאה לידי ביטוי בקטעים מעבודתה המקורית) התלמידה קישרה את הביטויים האלגבריים המופיעים בבעיה לתיאור הגרפי המתאים וניגשה לעריכת הסרטוט בנוגע לאגף שמאל של המשוואה המקורית התייחסה לפונקציה לוגריתמית, שבסרטוטה נעזרה במאפיינים: תחום הצבה, אסימפטוטה אנכית ושיעורי נקודת החיתוך עם ציר x

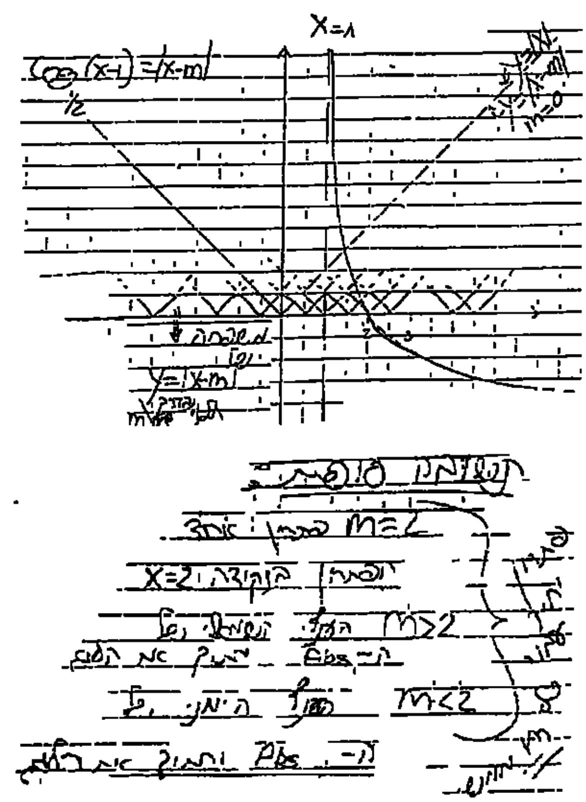
לשם קבלת הערכים המתאימים למאפיינים אלה פתרה אי-שוויון ומשוואה לוגריתמית (גישה אנליטית).



את הביטוי שבאגף ימין של המשוואה קשרה למשפחת פונקציות ערך מוחלט בסרטוט משפחה זו הסתמכה על הזזה אופקית של הפונקציה $y=|x|$ תוך כדי התייחסות להשפעת סימנו של m על כיוון ההזזה היא הכלילה את מיקום הגרף המתאים במערכת הצירים, בהתאם לסימן m



התשובה הסופית ניתנה על סמך הסרטוט



ואשר לביקורת כתבה התלמידה **'הבדיקה היא הגרף במקרה זה'.**

בדוגמה זו אפשר להבחין באופיו הספירלי של הקישור בין מרכיבי החשיבה האנליטית ומרכיבי החשיבה החזותית בעבודה, ובאה לידי ביטוי ראייה גלובלית של המצב המתאים לבעיה (היכול להצביע על התגבשות של 'תפיסה מבנית') המאפשרת הפניית תשומת הלב למאפיינים הרלבנטיים, ורק עם התקדמות תהליך הפתרון בא מעבר לחישובים ולפרטים

מורכבות העבודה בגישה גרפית

בהתייחסם לעבודה בגישה גרפית, חוקרים טוענים שגישה זו מסובכת יותר ממה שנראה Shama & Dreyfus 1991 "Visual does not mean easy" (עמ' 269) מניתוח עבודות התלמידים שהשתתפו במחקר התברר כי עבודה בגישה גרפית ו/או הצגת בעיה עם הייצוג הגרפי המתאים אינן בבחינת תרופות פלא המבטיחות הצלחה בפתרון ואינן ערובה לכך שהתלמידים יגיעו לתשובה הנכונה (אולם כשנעשות טעויות בעבודה עם הייצוג הגרפי, המורה יכול להבין במה התלמיד מתקשה, לאחר שייחס משמעות לביטויים האלגבריים השונים ולמניפולציות שביצע) להלן אחדות **מהטעויות שזוהו בעבודתם הגרפית** של תלמידים מכיתות המחקר

1) מתן תשובה שגויה לשאלה שהוצגה עם התיאור הגרפי המתאים, תוך כדי התעלמות מהסרטוט המצורף.

2) טעות בהסקה מגרף נכון (בין אם הגרף צורף לבעיה בשלב הצגתה ובין אם התלמיד/ה סרטט/ה גרף נכון בעצמו, ראה דוגמה 3)

3) טעות בסרטוט הגרף המתאים לבעיה, אם בשל טעות חישוב או בשל צירוף סרטוט שאינו מתאים לבעיה, לנתונים או לדרישה (ראה דוגמה 4)

בדוגמאות 4-3 להלן מוצגות עבודותיהם של תלמידים שעבדו בגישה גרפית ולא הגיעו לתשובה הסופית הנכונה הדוגמאות מתייחסות לפתרון הבעיה הבאה שהוצגה לתלמידים אחרי הוראת נושא הפונקציה הריבועית

נתונים הביטויים האלגבריים

א $x+2$ ב $-x^2+5x-10$

סמן את הטענה הנכונה לכל x ממשי

(1) ביטוי א גדול מביטוי ב לכל x ממשי

(2) ביטוי ב גדול מביטוי א לכל x ממשי.

(3) לפעמים ביטוי א גדול מביטוי ב ולפעמים ביטוי ב גדול מביטוי א

(4) שני הביטויים שווים

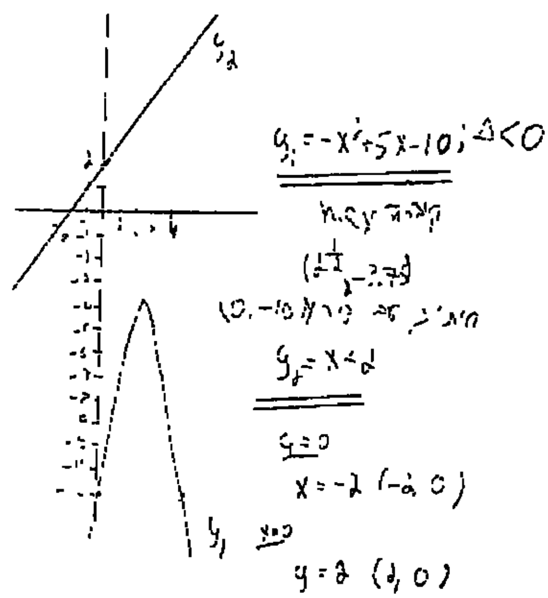
(5) אי־אפשר לדעת איזה ביטוי גדול יותר

בבעיה זו יש להשוות בין ערכי ביטויים אלגבריים, מבלי שניתנת הכוונה כלשהי לאופן ביצוע ההשוואה או לאלגוריתם המתאים לביצועה התלמידים לא נתקלו בעבודתם לפני המבחן בניסוח כזה של שאלה אם כי פתרו משוואה ריבועית מהסוג $-x^2+5x-10=x+2$ או אי־שוויון ריבועי $x+2<-x^2+5x-10$ שיש לפתור כדי לענות עליה נכון בתשובות תלמידים לבעיה מסוג זה

בתחילת השנה הופיעו שתי טעויות עקרוניות. האחת תלמידים הציבו ערכים מספריים אקראיים בביטויים הנתונים ועל סמך דוגמאות אלה ניסו להכליל, והשנייה תלמידים טענו כי סימן הביטוי הריבועי הנתון (ביטוי ב) שלילי תמיד בשל סימן המינוס שליד x^2, וסימן ביטוי א חיובי תמיד כי ל־x יש מקדם חיובי. בהסתמך על טיעון שגוי זה הסיקו מסקנות. בתחילת שנת הלימודים אף תלמיד לא קישר את הביטויים לייצוגם הגרפי.

דוגמה 3

בתשובתו לבעיית ההשוואה הנ"ל צירף התלמיד סרטוט מפורט ונכון של הגרפים המתאימים לביטויים האלגבריים. בסרטוט הוא נעזר בחישוב מדויק ונכון של שיעורי קדקוד הפרבולה, ושל שיעורי נקודת החיתוך שלה עם ציר y, ובשיעורי נקודות החיתוך של הישר עם הצירים.

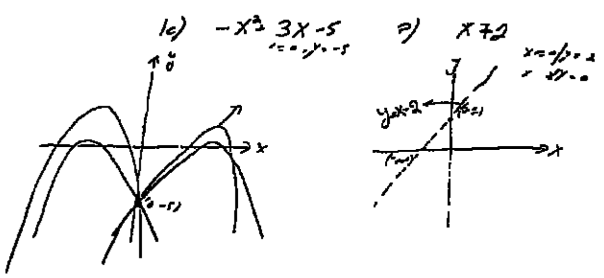


למרות הסרטוט הנכון הוא הגיע למסקנה שגויה. תשובתו הסופית הייתה: **'משום שבהמשך הרחוק יהיה מפגש בין ענף הפרבולה לפונקציה $y=x+2$ אחרי מפגש זה הפונקציה $y=x+2$ תקבל ערכי y יותר קטנים מערכי הפרבולה (בשני הענפים שלה). בציור נקבל מצב שבו ערכי הישר גדולים מערכי הפרבולה. לכן המצב ההדדי יכול להשתנות'.**

תלמיד זה ניתח נכון את הבעיה והבין את משמעות הדרישה בנוגע למצב ההדדי בין הגרפים המתאימים. מההסבר שצירף אפשר להיווכח כי הטעות במסקנה נובעת מאי־התייחסות לקצב שינוי ערכי ה־y של הגרפים השונים ולהשפעתו על המצב ההדדי ביניהם (מידע הכלול בסרטוט) ומחוסר ידע בנוגע להתנהגות הגרפים בתחומים שאינם נראים בסרטוט שצירף.

דוגמה 4

להלן תשובתה של תלמידה נוספת לבעיית ההשוואה הנ"ל. התלמידה צירפה סרטוט של הגרפים המתאימים לביטויים האלגבריים בשתי מערכות צירים נפרדות. הסרטוט אינו מתאים לדרישות הבעיה ואינו מאפשר השוואה בין ערכי הפונקציות המתוארות בגרפים. סרטוט הפרבולה שצירפה שגוי (הפרבולות בסרטוט מתוארות כבעלות חיתוך עם ציר x). לשם עריכת הסרטוט הסתמכה רק על שיעורי נקודת החיתוך עם ציר־y ועל סוג הקדקוד (Max) ולא בדקה אם קיים חיתוך עם ציר ה־x.



התלמידה הגיעה למסקנה סופית שאינה נכונה:

לשאלה ביטוי א' צריך להגיע ב'.
כיוון של הפרבולה יש לה 2 נק' חיתוך עם ציר x ויש
נק' חיתוך עם ציר x אבל בפונק' של חסר

בתשובתה היא קישרה מאפיינים שאין ביניהם קשר. התלמידה קישרה בין מספר נקודות חיתוך של כל גרף בנפרד עם ציר ה־ x והמצב ההדדי בין הגרפים. קישור זה מצביע על חוסר הבנת המשמעות שמאחורי האלגוריתם החישובי. הסרטוט הלא מדויק של הפונקציה הריבועית

היה מונע ממנה להגיע לתשובה הנכונה גם לו הייתה מסרטטת את הגרפים באותה מערכת צירים, מכיוון שלפונקציה הנתונה אין חיתוך עם ציר x ואין לה ערכי y חיוביים (המופיעים בסרטוט שצירפה)

דוגמאות 3-4 מדגימות כי כדי שהמידע הרב שמכיל הייצוג הגרפי ינוצל היטב, על התלמיד לדעת להשתמש בו נכון ' a picture is only worth a thousand words, if one can interpret it' כך אצל Selden & Selden (1992) עמ' 13 הדוגמאות גם חוזרות ומעלות שאלה שהציג Dubinsky (1991) אם שימוש בגרף תורם להבנה או שהוא תוצר של הבנה

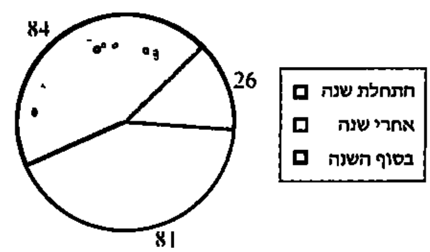
ממצאי המחקר

שימוש בגישה גרפית

בהשוואה למצב בתחילת השנה מצאנו כי התלמידים מכיתת המחקר השתמשו יותר בגישה גרפית בפתרון בעיות הן אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית והן בסוף שנת הלימודים (z=–3 52, p < 001) (ראה דיאגרמה 1) נציין כי במבחן שנערך בתחילת השנה מחצית השאלות הוצגו בצירוף התיאור הגרפי המתאים ואילו במבחנים האחרים רוב השאלות הוצגו **באופן סימבולי ללא תזכורת כלשהי** של גרף הפונקציה או של גישה גרפית, והמעבר לייצוג גרפי נעשה על־ידי התלמידים באופן עצמאי וספונטני, ראה טבלה 2 בעניין אופן הצגת הבעיות לתלמידים

דיאגרמה 1

תיאור שכיחויות השימוש בגישה גרפית בשלבים שונים במהלך שנת הלימודים



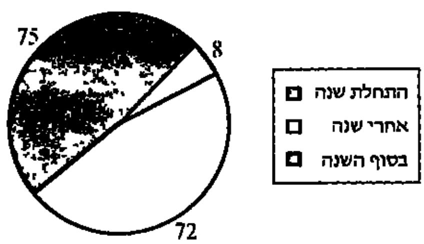
בממצאי המחקר הנוכחי אפשר למצוא עדות לכך כי אפשר ללמד את התלמידים לשלב גישה גרפית בעבודתם המתמטית (טענה חשובה על רקע המידע הרב בספרות המחקרית על אודות נטיית תלמידים להשתמש בייצוג אלגברי-סימבולי בעבודתם המתמטית)

קישור בין ייצוגים

בהשוואה למצב בתחילת השנה מצאנו כי התלמידים מכיתת המחקר השתמשו יותר בקישור בין ייצוגים בעת פתרון בעיות הן אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית והן בסוף שנת הלימודים (z= -3 52, p < 001) ראה דיאגרמה להלן

דיאגרמה 2

תיאור שכיחויות ביצוע קישור בין ייצוגים בשלבים שונים במהלך שנת הלימודים



בספרות המחקרית יש עדויות רבות המצביעות על בעייתיות של לימוד 'קישור בין ייצוגים'

Dreyfus & Eisenberg (1983) ראו בקרב תלמידי קולג' התייחסות למידע אלגברי ולמידע גרפי כצורות מידע הנפרדות זו מזו, Presmeg (1986) מצאה כי תלמידים אינם מקשרים שיקולים גרפיים ואנליטיים במהלך עבודתם, Markovits et al (1986) מצביעים על קשיי תלמידים בהעברת מידע בין ייצוגים, Even (1990) מצאה כי מורים למתמטיקה אינם מקשרים בין פונקציה ריבועית ומשוואה ריבועית, ואצל Weigand (1991) נמצא כי תלמידים שלרשותם עומדת תכנת מחשב בעלת שישה ייצוגים שונים לאותו מושג נשארים כבולים לייצוג שאותו בחרו, גם אם אינו הייצוג המתאים ביותר לטיפול במצב נתון ממצאי המחקר הנוכחי תומכים בממצאי מחקריהם של Hershkowitz, Friedlander & Dreyfus (1991) ושל גפני (1996) שבהם נמצא שילוב שיקולים חזותיים ואנליטיים בטיעוני התלמידים לאחר הלימוד

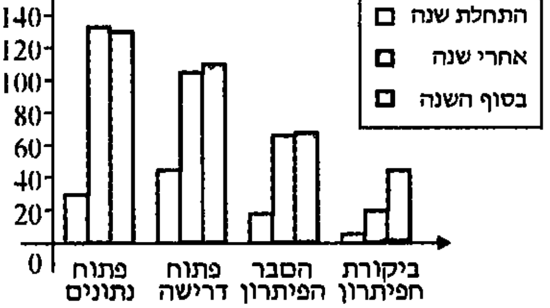
שימוש באסטרטגיות פתרון בעיות

להלן הממצאים העיקריים שהתקיבלו בנוגע לשימוש באסטרטגיות פתרון

יחסית למצב בתחילת השנה, נמצא כי בעת התמודדות עם בעיות, תלמידים שלמדו בסביבת המחקר השתמשו יותר, במידה משמעותית, באסטרטגיות השונות ('ניתוח נתונים', 'ניתוח דרישה', 'הסבר הפתרון' ו'ביקורת הפתרון') הן אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית והן בסוף שנת הלימודים בנוסף נמצאה עלייה משמעותית בשכיחות ביצוע 'ביקורת הפתרון' בסוף השנה לעומת השימוש באסטרטגיה זו אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית
($z=-3\ 18,\ p< 01$) ראה דיאגרמה להלן

דיאגרמה 3

תיאור שכיחויות השימוש באסטרטגיות הפתרון השונות, בשלבים שונים במהלך שנת הלימודים



עדויות מתוך Kantowski (1980) מצביעות על כך כי ללא הוראה מפורשת של אסטרטגיות פתרון בעיות, תלמידים רבים אינם משתמשים באסטרטגיות כלשהן אלא עובדים בגישה של ניסוי וטעייה אקראיים ממצאי המחקר הנוכחי תומכים בטענתו של Dreyfus (1990) כי אפשר ללמוד וללמד 'פתרון בעיות', ותואמים ממצאי מחקרים שעליהם מדווח Schoenfeld (1982) שבהם נמצא כי תלמידים יכולים ללמוד להשתמש בהיוריסטיקות כלליות נסכם את המידע שהתקבל במחקר הנוכחי בטענתה של Kantowski (1981) כי רוב התלמידים יוצאים נשכרים מהוראה מתוכננת של פתרון בעיות

נתמקד באסטרטגיה של 'ביקורת הפתרון', פעילות אשר נכללת בשלב 'ההתבוננות אחורה' בשלבי פתרון בעיות שהציג Polya ביצוע הפעילות דורש זיהוי אספקטים מהותיים של הבעיה ושל פתרונה, מספק הזדמנות לאסוף מידע על אודות התהליכים שננקטו במהלך הפתרון ויכול לתרום ליצירת קישור בין בעיות בעלות מאפיינים דומים (Sowder 1993) הוראת ביצוע ביקורת נמצאה במחקרים כבעייתית במיוחד

תלמידים לא ביקרו את עבודתם, באופן ספונטני, למרות שאסטרטגיה זו הודגשה במהלך הלימוד (Kantowski 1977) תלמידים, שלמדו בסביבת לימוד התומכת ביישום היוריסטיקות, שעוצבה על־ידי Schoenfeld (1985) ואשר ביקרו את עבודתם, התקשו בביצוע הביקורת כהלכה ולא ידעו מה לעשות כשהגיעו לסתירה בין התוצאה שקיבלו כתשובה לבין תוצאה שקיבלו במהלך הביקורת ממחקר שערכו Lester, Garofalo & Kroll (1989) התברר כי אצל תלמידים המודעים לצורך בבקרה, התפתחות ידע העל (metacognition) כיצד לבקר היא איטית ביותר

במחקר הנוכחי נמצאה עלייה משמעותית בשכיחות ביצוע הביקורת בקרב התלמידים בסוף השנה לעומת השימוש באסטרטגיה זו אחרי לימוד נושא הפונקציה הריבועית, וגם יחסית לשימוש בה בראשית השנה אולם שכיחות ביצוע הביקורת בכל אחד מהשלבים בשנת הלימודים הייתה נמוכה יחסית לשכיחות ביצוע האסטרטגיות האחרות

אפשר לסכם ולומר כי תוצאות המחקר הבהירו לנו כי תלמידים בסביבה הנחקרת משלבים שיקולים גרפיים-חזותיים בפתרון בעיות, מקשרים במהלך עבודתם בין ייצוגים שונים ומשתמשים באסטרטגיות פתרון בעת התמודדות עם בעיות, גם כשמדובר בפתרון בעיות קשות ולא שגרתיות ולא רק מיד לאחר לימוד הנושא

סיכום

במאמר זה תוארה סביבת מחקר שעוצבה באופן המשלב את הוראת התכנים של תכנית הלימודים במתמטיקה (פתרון משוואות ואי־שוויונים) עם הדגשת פיתוח מיומנויות חשיבה (שימוש בגישה גרפית, קישור בין ייצוגים, אסטרטגיות פתרון בעיות, הפניית מודעות התלמידים

לתהליכי החשיבה שלהם) הממצאים מספקים עדות מחקרית לכך כי תלמידים יכולים ללמוד לשלב גישה גרפית בעבודתם המתמטית. מניתוח גישות הפתרון אפשר להיווכח כי הפעילות של פתרון משוואות ואי־שוויונים, שהיא בדרך כלל פעילות רוטינית וסימבולית באופיה, הפכה להיות פעילות בעלת סממנים של 'פתרון בעיות' (problem solving) פעילות הכוללת רכישת הרגלי עבודה ואימוץ אסטרטגיות פתרון מגוונות תוך כדי מתן תשומת לב למשמעויות.

אני מייחסת חשיבות רבה עוד יותר לממצאים אלה מכיוון שמדובר בתלמידים בוגרים שעבדו במשך שנות לימוד רבות (10 ומעלה) בצורה מסוימת. תלמידים שכבר גיבשו את השקפת עולמם לגבי אופיה של העבודה המתמטית, שנחשפו, קרוב לוודאי, לא אחת למורים המעודדים פתרון בגישה אנליטית וסיגלו לעצמם דרכי פתרון העולות בקנה אחד עם התנסויותיהם הקודמות בתחום.

משמעויות חינוכיות:

א) מעבודות התלמידים למדנו כי הם משלבים בפתרון אותה בעיה שיקולים אנליטיים וגרפיים וכי אי־אפשר לדבר על עבודה בגישה אחת בלבד. לפיכך אין ספק כי יש לחשוף את התלמידים לגישות השונות ולא להגבילם לגישת פתרון מסוימת.

ב) טכנולוגיית המחשב יכולה לספק דוגמאות רבות ומגוונות במהירות ובדיוק רב. חשיפת התלמידים לדוגמאות אלה יכולה לתרום להרחבת מאגר הידע ולהעשרת הרפרטואר הבסיסי שלהם, ולאפשר הפניית זמן ותשומת לב לניתוח מעמיק של הגרפים ושל תכונותיהם. למודות המציגות בו־זמנית ייצוגים שונים של הפונקציה והמאפשרות לפעול על כל אחד מהייצוגים מספקות נקודות ראות שונות של המושג ויכולות לתרום להתהוות גישור בין הייצוגים.

ג) הבעייתיות הכרוכה בעבודה גרפית, כפי שהתברר מעבודות התלמידים, מדגישה כי מורה המתכוון ללמד עבודה מתמטית בגישה גרפית צריך להקדיש זמן ממושך להקניית השליטה במיומנויות הרבות הכרוכות בעבודה בגישה זו ולפתח הרגלי התבוננות בדיאגרמה כמקור למידע הנשאב ממנה. צירוף הייצוג הגרפי המתאים לבעיות שהתלמידים מתמודדים עמן מדגיש, לדעתי, את אחריותו של המורה לבחירת הבעיות המוצגות לתלמידים. על המורה להציג בעיות כאלה שתדרושנה מהתלמידים עיבוד מעמיק של המידע הנתון והתייחסות למשמעויות.

ד) יש לקחת בחשבון כי עבור רוב התלמידים היכולת לפתור בעיות מתפתחת לאיטה לאורך זמן כתוצאה מהוראה שיטתית ומתוכננת היטב ומהתנסות בפתרון מגוון בעיות. לפי כך יש להתמיד בגישת הוראה המשלבת הוראת אסטרטגיות 'פתרון בעיות' במהלך השוטף של שיעורי המתמטיקה במשך שנת הלימודים כולה.

המלצות למחקרים בעתיד

אפשר לשער כי גורמים רבים השפיעו על אופי עבודתם הגרפית של המשתתפים במחקר זה, ביניהם העובדה שצברו שעות רבות של עבודה פרוצדורלית עם ביטויים אלגבריים ועם פונקציות בלימודיהם בעבר, העובדה שבמשך שנת הלימודים כולה קיבלו לגיטימציה מלאה לשימוש בגישה גרפית בתשובות, נתקלו בבעיות מתמטיות רבות שאפשר לפתור רק בגישה גרפית ונוכחו בשימוש אינטנסיבי בגרפים על־ידי המורה לשם ניתוח בעיות וביקורת העבודה המתמטית. כמו כן סרטטו ידנית, ללא עזרים ממוחשבים כלשהם, גרפים רבים של הפונקציות השונות שבהם טיפלו במהלך שנת הלימודים. ממצאי המחקר הנוכחי אינם מאפשרים לבחון את תרומתו הנפרדת של כל גורם, מן הגורמים האלה, על אימוץ הגישה הגרפית בעבודתם המתמטית של משתתפי המחקר, ועל אופיה. ייתכן גם כי מאפיינים אישיים של התלמידים, כגון ידע מתמטי קודם, סגנון עבודה מתמטי מועדף בתחילת שנת הלימודים, ורמת הידע המתמטי (ציונים) הם משתנים מתערבים בהקשר זה. במחקר הנוכחי לא נאסף מידע על אודות משתנים אלה, ומן הראוי היה לבחון את השפעתם במחקרים נוספים בנושא שיתוכננו בהתאם.

רשימת ספרות

גפני, ר׳ [1996] השפעת רב־ייצוג של המושג פונקציה על פיתוח התייחסות סמנטית לביטויים אלגבריים ומשוואות, חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה, אוניברסיטת חיפה

וינר, ש׳ [1992] הוראת מתמטיקה — מחשבות ותופעות, מיומנו של מורה חוקר עלי״ה 11 28-23

Charles, R I & F K Lester [1984] 'An Evaluation of a Process-Oriented Mathematical Problem-Solving Instructional Program in Grades Five and Seven', *Journal for Research in Mathematics Education* 15 15-34

Chazan, D [1993] 'F(x) = G(x)?. An Approach to Modelling with Algebra', *For the Learning of Mathematics* 13 (3) 22-26

Dreyfus, T [1990] 'Advanced Mathematical Thinking', in P Nesher & J Kilpatrick, (eds), *Mathematics and Cognition*, Cambridge, New York, Cambridge University Press, pp 113-134

Dreyfus, T & T Eisenberg [1983] 'The Function Concept in College Students Linearity, Smoothness and Periodicity', *Focus on Learning Problems in Mathematics* 5 (3 & 4) 119-131

Dubinsky, E [1991] 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking', in D Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp 95-126

Even, R [1990] 'Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions', *Educational Studies in Mathematics* 21 (6) 521-544

Fey, J T [1984] *Computing & Mathematics — The Impact on Secondary School Curricula*, pp 1-30 Reston, VA, NCTM

Garofalo, J , D L Kroll & F K Lester [1987] 'Metacognition and Mathematical Problem Solving Preliminary Research Findings', in J Bergeron, N Herscovits & C Kieran (eds), *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Canada, vol 2, pp 222-228

Hershkowitz, R , A Friedlander & T Dreyfus [1991] 'LOCI and Visual Thinking', *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Assisi, vol 2, pp 181-188

Kantowski, M G [1977] 'Processes Involved in Mathematical Problem Solving', *Journal for Research in Mathematics Education* 8 (3) 163-180

Kantowski, M G [1980] 'Some Thoughts on Teaching for Problem Solving', in S Krulik & R E Reys (eds), *Problem Solving in School Mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp 195-204

Kantowski, M G [1981] 'Problem solving', in E Fennema (ed), *Mathematics Education Research Implications for the 80's*, Reston, VA, NCTM, pp 111-130

Kieran, C [1989] 'The Early Learning of Algebra A Structutal Perspective', in S Wagner & C Kieran (eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Reston, VA, NCTM and Lawrence Erlbaum Associates, pp 33-57

Lester, F K , J Garofalo & D L Kroll [1989] 'Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition', in D B McLeod & V M Adams (eds), *Affect and Mathematical Problem solving* Springer, pp 75-88

Markovits, Z , B Eylon & M Bruckheimer [1986] 'Functions Today and Yesterday', *For the Learning of Mathematics* 6 (2) 18-24

Matz, M [1980] 'Toward a Computational Theory of Algebraic Competence', *The Journal of Mathematical Behavior* 3 (1) 93-166

Mayer, E R [1985] 'Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving', in E A Silver (ed), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving Multiple Research Perspectives*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp 123-138.

Polya, G [1945, 2nd edition, 1957] *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method*

Sfard, A & L Linchevski [1994] 'The Gains and the Pitfalls of Reification The Case of Algebra', *Educational Studies in Mathematics* 26·191-228

Shama, G T & Dreyfus [1991]. 'Spontaneous Strategies for Visually Presented Linear Programming Problems'. *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy*, vol 3, pp 262-269

Silver, E A [1985] 'Research on Teaching Mathematical Problem Solving Some Underrepresented Themes and Needed Directions'. in E A Silver (ed), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving Multiple Research Perspectives*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates. pp 247-266

Sowder. L [1993] 'The Looking Back Step in Problem Solving', in S L Brown & M I Walter (eds), *Problem Posing Reflections and Applications*, Hillsdale. NJ. Lawrence Erlbaum Associates, pp 235-239

Tall, D [1991] 'The Psychology of Advanced Mathematical Thinking'. in D Tall (ed). *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, pp 3-21

Weigand, H G [1991] 'Iteration Sequences and their Representation'. *Educational Studies in Mathematics* 22 411-437

Yerushalmy, M & S Gilead [1997] 'Solving Equations in a Technological Environment', *Mathematics Teacher* 90 (2) 156-162

Zazkis, R , E Dubinsky & J Dautermann [1996] 'Coordinating Visual and Analytic Strategies A Study of Students Understanding of the Group D_4', *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (4) 435-457

Princeton, NJ, Princeton University Press

Presmeg, N C [1986] 'Visualisation in High-School Mathematics'. *For the Learning of Mathematics* 6 (3)·42-46.

Schoenfeld. A H [1982] 'Measures of Problem-Solving Performance and of Problem-Solving Instruction', *Journal for Research in Mathematics Education* 13 (1) 31-49

Schoenfeld, A. H [1985] *Mathematical Problem Solving* Orlando. Academic Press

Schoenfeld, A H [1992] 'Learning to Think Mathematically Problem Solving. Metacognition. and Sense Making in Mathematics', in A G Douglas (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp 334-370) Reston. VA. NCTM pp 334-370

Schwartz. J L & M Yerushalmy, 'Education Development Center', [1990] *The Function Analyzer (Computer Software and Teachers guide)* Pleasantville. NY. Sunburst Communications

Selden, A & J Selden [1992] 'Research Perspectives on Conceptions of Functions Summary and Overview'. in G Harel & E Dubinsky (eds), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy, Washington, DC*, pp 1-16 (MAA Notes. vol 25)

Selden, J , Mason, A , & Selden, A (1989) Can average calculus students solve nonroutine problems?' *Journal of Mathematical Behavior* 8·45-50

Sfard, A [1987] 'Two Conceptions of Mathematical Notions Operational and Structural'. in J Bergeron. N Herscovits & C Kieran (eds). *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education Montreal, Canada*, vol 3, pp 162-169