# הנושא: **מתמטיקה נומרית בבית הספר התיכון**

הוכן ע"י: גדעון צבס.

תקציר: המאמר נכתב לכבוד פרסומה של תכנית לימודים חדשה למקצוע מדעי המחשב. בחלקו הראשון סקירה היסטורית של הנושאים באנליזה נומרית ששולבו במהלך השנים בתכנית הלימודים ובחלקו השני סקירה של הנושאים שנבחרו לתכנית החדשה על-ידי ועדת המקצוע והתכנית במדעי המחשב.

מילות מפתח: מתמטיקה נומרית, אנליזה נומרית, תוכניות מחשב, תכנית לימודים, הוראת מדעי המחשב, אלגוריתם שילוש, הצדקה מתמטית, הוכחה, חשיבה מתמטית, ספרים, שורשים, תהליך איטרטיבי, חסם שגיאה, קירוב, איטרציה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 23, תשרי תשנ"ט, אוקטובר 1998, עמודים 7-14.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

# מתמטיקה נומרית בבית הספר התיכון

**גדעון צבס**
אוניברסיטת תל אביב

**מבוא**

התכנית החדשה ללימוד מדעי המחשב עומדת לקבל בימים אלה אישור סופי ומחייב, כולל פרקי אנליזה נומרית במסגרת התכנית לחמש יחידות לימוד

נראה שזה הזמן לתאר את נושאי האנליזה הנומרית שנבחרו על־ידי ועדת המקצוע והתכנית במדעי המחשב, אך עוד לפני כן נפרט את תולדות המתמטיקה הנומרית לתלמידי תיכון בישראל מאז תחילת הדרך בשנת 1964 תולדות אלו יתוארו במקביל לתיאור הפעילות המתמטית משולבת המחשב עם תלמידי תיכון, פעילות שהתחילה באמצעות מחשבים גדולים של המוסדות להשכלה גבוהה, לאחר מכן תוך הפעלת מחשבונים שונים (שנקראו אז מחשבי כיס) ובעקבות זאת בעזרת מיקרומחשבים

מודגש בזאת בכל לשון של הדגשה, כי מאמר זה עוסק בהיבטים של אנליזה נומרית בלבד ולא בהיבטים נוספים שבהם עסקו חוקרים ומפתחים אחרים

**שנות השישים**

יחד עם מורי ורבי פרופ׳ גיליס ז״ל, התחלנו את הפעילות המתמטית משולבת המחשב במחנות לנוער שוחר מדע במכון וייצמן — במחנה האוהלים מאחורי בניין הפיזיקה ב־1964, ובמחנה הבונגלוס הראשון ליד בניין סר־מרטין ב־ 1965 בראש המחנות עמד הדוקטורנט משה גרינשפן, כיום ד״ר משה רישפון, ראש היחידה לפעולות נוער במכון וייצמן קבוצות המתמטיקה, שאני הייתי המדריך שלהן, מנו 16 תלמידי י״א בכל מחזור ביניהם זכורים לי סרג׳יו הרט (כיום פרופסור באוניברסיטה העברית), שמעון רייך (כיום פרופסור בטכניון), צבי קדרון (כיום מנהל מרכז החישובים של האוניברסיטה העברית) פיליפ רוזנאו, מיכה שריר ואיתן תדמור (כיום שלושתם פרופסורים באוניברסיטת תל אביב), עידו שמר (מאוחר יותר מפקד טייסת בחיל האוויר ודוקטור למתמטיקה של האוניברסיטה בירושלים) וטליה אסף (כיום ד״ר טליה איינהורן מומחית למשפט מסחרי בינלאומי)

את משתתפי קבוצת המתמטיקה (בכל פעם) חילקתי לארבע צוותים, וכל צוות קיבל נושא הכולל אנליזה מתמטית ורעיון לתכניות מחשב נומריות מתאימות כבר בתחילה הקפדנו על כך שהתכניות ייכתבו רק על־ידי התלמידים עצמם ורק בלוויית ההצדקה המתמטית המלאה (חסמי שגיאה, קצב התכנסות וכו׳) התכניות נכתבו בפורטרן בגרסת שנות השישים והוזנו למחשב CDC–1604 של מכון וייצמן באמצעות כרטיסים מנוקבים כך, למשל, היה אחד הנושאים ״שיטות לחישובי $\pi$ (התיק של צוות זה מצוי אצלי עד היום) ואת ארבע שיטות החישוב בחרנו לפי ערכן לחינוך המתמטי כל שיטה חשפה פן אחר של המתמטיקה שיטת ארכימדס המבוססת על מצולעים החוסמים את ומצולעים החסומים על־ידי מעגל היחידה, שיטה לחישוב השטח מתחת לפונקציה $y=\sqrt{1-x^2}$ נוסח אינטגרציה נומרית, שיטה הסתברותית בסגנון מחט בופון, ושיטת מציין המבוססת על פיתוח חזקות של arctg x המתקבל מאינטגרציה של טור גיאומטרי ומוביל לנוסחאות

$$\frac{\pi}{4}=\text{arctg }1=\text{arctg}\frac{1}{2}+\text{arctg }\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4}=2\text{arctg}\frac{1}{5}+\text{arctg}\frac{1}{7}+2\text{arctg}\frac{1}{8}$$

בנוסחאות אלו ובנוסחאות הנובעות מהן, השתמשו ״ציידי הספרות של׳ $\pi$ עד סוף שנות השמונים (אז הגיעו למיליון ספרות אחרי הנקודה העשרונית ועברו למחשבים מקביליים ולשיטה אחרת) מעניין במיוחד היה החישוב של צוות האסיסטנטים של פרופ׳ ג׳ון פון־נוימן, שלפי בקשתו חישבו את $\pi$ עד 2000 ספרות אחרי הנקודה ואז הועמד לרשותם המחשב ENIAC (אחד המחשבים

הראשונים בעולם שהיה בשעתו בבסיס הצבא האמריקאי (Aberden למשך סופשבוע חג העבודה בספטמבר 1949

צוות אחד ממשתתפי מחנות הנוער ב־1964 טיפל בשיטות להאצת ההתכנסות של טורים כגון $\sum 1/n^2$ לאחר שתחילה הוכיח כי סדרת הסכומים החלקיים לא רק עולה, אלא גם חסומה

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < 1+\sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} = 1+\sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2$$

זאת כי הטור האחרון הוא טור טלסקופי שאיבריו מתבטלים זוגות זוגות. הטור $\sum 1/n^2$ מתכנס לאט מאוד והתלמידים הוכיחו כי נחוצים 20000 מחוברים להשגת דיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה. כדי להאיץ את ההתכנסות השתמשו התלמידים בשיטה שהציע המתמטיקאי הגרמני ארנסט קומר, להוסיף ולהוריד טור שיודעים לסכם ואשר דומה בהתנהגותו לטור הנבדק (המושג 'דומה' הוגדר כמובן היטב). במקרה שלנו נוסיף ונחסיר את הטור שאפשר להעבירו לצורה טלסקופית ולסכמו

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

באופן זה נקבל (לאחר שהוכח שמיזוג הטורים מותר)

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1+\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right] = 1+\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)}$$

אם עתה נסכם טור אחרון זה וכן את הטור המקורי עד $n = \mathrm{M}$ ונחשב חסמים לשאריות שני הטורים כפונקציה של M, נמצא כי לאחר ההאצה דרושים רק 100 מחוברים להבטחת הדיוק שהוזכר, במקום 20000 מחוברים בטור המקורי. על התהליך אפשר כמובן לחזור פעמים נוספות (לאחר פעם אחת נוספת מתברר שמספיקים 24 מחוברים)

עם סיומו של מחנה הנוער הראשון באוגוסט 1964 כתב אחד מהצוותים מאמר מסכם כדי לפרסם את עבודתו בירחון 'מדעי' שיצא במכון ויצמן. עד מהרה הוחזר המאמר יחד עם מכתב מהעורך, פרופ' גדעון יקותיאלי (המאמר והמכתב שמורים אצלי), שכתב: 'זו עבודה במתמטיקה שימושית שצוות החניכים והמדריך יכולים להיות גאים בה, אך אין היא מתאימה ל'מדעי', שעבורו הטיפול בנושא צריך להיות יותר תיאורי וכללי ולא כל־כך מקצועי'.

במשך שש השנים הבאות שילבנו נושאים נומריים נוספים בפעילות החוג למתמטיקה לנוער באוניברסיטת תל אביב. לחוג זה קראנו 'מועדון $\pi$' דווקא משום שלרוב המשתתפים לא היה מושג כיצד לחשב את $\pi$ לכל דיוק רצוי. רבים ממשתתפי מחנות מכון וייצמן לקחו חלק בפעילויות מועדון $\pi$ אשר בו גם הרצו פרופסורים אורחים ידועים כגון אברהם הלוי פרנקל, יוסף גיליס ופאול ארדש ז"ל, וכן יבל"א שלום אברבנאל, מיכה פרלס ואביעזרי פרנקל, וגם הדוקטורנטים דאז, אחי ברנד, יצחק בורוש, יעקב עבודי ומשה גולדברג (ארבעתם כיום פרופסורים במוסדות שונים), ועוד.

### שנות השבעים

בתחילת שנות השבעים נפל בחלקי להיות בשנת שבתון במכון קורנט של אוניברסיטת ניו־יורק בדיוק כאשר הופיעו המחשבונים המדעיים הראשונים (שעלו אז מעל 300 דולר). הפוטנציאל החינוכי שלהם הזדקר מיד לעין. וכשחזרתי ארצה התחלנו, פרופ' שלמה ברויאר ז"ל ואני, לפתח פרקים נומריים לתלמידי תיכון. היינו כה נלהבים עד כי החלטנו להקדיש לנושא יום שלם בכל שבוע. לפעמים הפעלנו מחשבונים בני תכנות ללילה שלם והיינו מטלפנים זה לזה בבוקר כדי להשוות את התוצאות. שפת התכנות הייתה בלתי ידידותית באותם ימים בהיותה שפה תחתית למדי, אולם המחשבון 'הזיע והזיע' ונתן תוצאות יפות. לפעמים השתמשנו במחשבון 'דובר פולנית' (כפי שכינו זאת התלמידים), כלומר במחשבון HP שחישב לפי Reverse Polish Notation

נראה היה לנו שחשוב במיוחד להנהיג את ניצול המחשבונים בהכשרת מורי מתמטיקה ובין השאר התקשרנו לסמינר לוינסקי שהיה אז בצפון רחוב בן־יהודה בתל אביב. אני זוכר היטב את כיתת פרחי ההוראה

של 1976, 22 בנות 22, שעבדו בזוגות. בכל שיעור הייתי מביא את המחשבונים לכל הכיתה, ולאחר השיעור מחזירים אותם לספרייה אל מתקן מיוחד שבו הוטענו מצברי המחשבונים לשיעורים הבאים. בין השאר דרשנו שכל סמינריסטית שבעתיד תלמד את תלמידיה על המספרים $\pi$ ו־e, תחשב אותם בעצמה בעזרת מחשבון, למספר ספרות רצוי, יחד עם פירוט הערכת השגיאה. המוטו היה ונשאר 'חישוב לכל דיוק רצוי' (כמובן במגבלות המחשבון) ולדיוק הרצוי קראו התלמידות 'אחיו של ε' שהוא כידוע קטן כרצוננו.

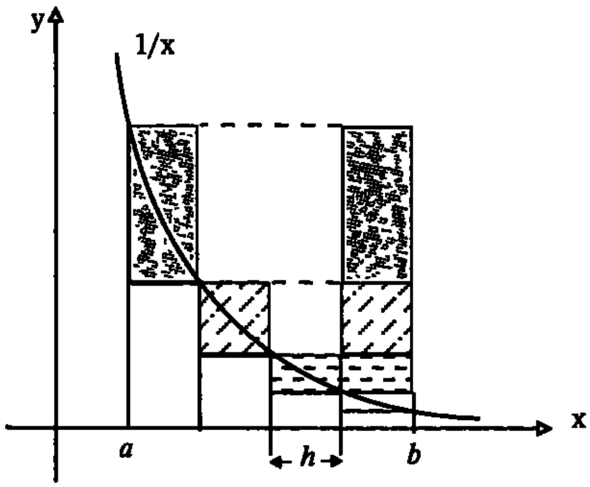
באמצע שנות השבעים הוצאנו לאור שני ספרים 'צעדים ראשונים במתמטיקה נומרית' (בהוצאת 'ידקל', שפרסמה אז את ספרי המרצים באוניברסיטת תל אביב) וספר מקביל באנגלית Computational Mathematics. הציור שעל הכריכה נתן הדגמה גיאומטרית וצבעונית לחסם השגיאה בחישוב שטח מתחת לגרף של פונקציה חיובית ומונוטונית באמצעות שיטת מלבנים. במקביל בנינו מכשיר המחשה מתאים, Integroboard המדגים את הערכת השגיאה בדרך גיאומטרית (המכשיר הוצג בתערוכת עזרי ההוראה בכנס הבינלאומי לחינוך מתמטי שהתקיים באוניברסיטת קרלסרוהה ב־1976). לשם הבהרה, ניקח למשל את $y=1/x$ מ־$a=1$ עד $b=2$, ונחלק את השטח שמתחתיה לפסים שווי רוחב $h=1/n$.

עתה נקרב את השטח מתחת לגרף הפונקציה באמצעות מלבנים שסכום שטחיהם מהווה קירוב מלרע, ומלבנים שסכום שטחיהם מהווה קירוב מלעיל לשטח המבוקש. הפרש הקירובים מהווה כמובן חסם לשגיאה. את החסם המחשנו גיאומטרית באמצעות מלבן המתקבל ליד הקצה $b$ ואשר רוחבו h וגובהו $|f(a)-f(b)|$. לשגיאה הנדונה יש אפוא חסם (ראה איור) שהוא פרופרציונלי הפוך למספר הפסים $n$.

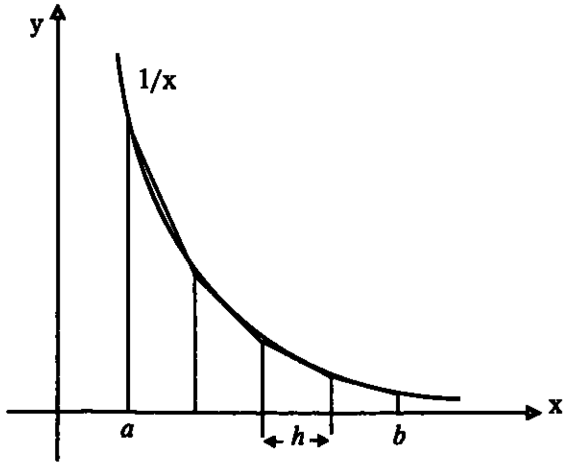
לעומת קירוב המלבנים ניקח עתה את שיטת הטרפז הידועה, בה מקורב השטח בכל פס על־ידי הטרפז המתאים (ראה איור). בדיון זה הגבלנו את הכלליות לפונקציות חיוביות וקמורות (או קעורות) כדי שנוכל לתת הוכחה המשתמשת במתמטיקה של תיכון, לעובדה שחסם השגיאה פרופרציונלי הפוך ל־$n^2$.

לאחר כל זאת ערכנו תחרות בין חמישה זוגות שחישבו לפי שיטת המלבנים, ובין חמישה זוגות שחישבו לפי שיטת הטרפזים (ולהם, כמובן, מספיק $n$ קטן יותר להבטחת הדיוק שקבענו לעצמנו) איטיות המחשבונים עזרה להבליט את ההבדל שבין שתי השיטות, כי כל זוג שהגיע לתוצאה התבקש לעמוד. אני משוכנע שהסמינריסטיות לא ישכחו תחרות זו שנים רבות ומקווה שכך גם יהיה עם המתמטיקה הנומרית הנלווית לקירובים הללו.

לכל אורך הדרך היינו נאמנים לדרכנו שלא לעסוק באלגוריתמים נומריים, אלא אם הצדקתם המתמטית נלמדה בקפדנות. אחרי הכול, המטרה העיקרית אינה




איור 1




איור 2

חישוב $ln2$ (באמצעות השטח שמתחת לגרף של $y=1/x$), אלא פיתוח החשיבה המתמטית בהקשר של משימה נומרית זו. הערך של $ln2$ לא היה אלא בונוס צדדי, למרות שנפנפנו בו כמטרה לפני תלמידות סמינר לוינסקי ותלמידי כיתת הניסוי בתיכון עירוני ד

לדעתנו, לא ייתכן שאדם משכיל בימינו יאמר כי $\pi$ הוא בקירוב 3 14 (או אף 3 4159265), כי כך אמרה המורה שלו (ומן הסתם כך אמרה מורתה שלה) קבוע זה ילווה את התלמיד עשרות שנים וחישובו לדיוק של 5 (או אולי אף 8) ספרות אחרי הנקודה צריך להיות בתשתית ההשכלתית שלו, יחד עם המתמטיקה הנלווית לשיטת הקירוב שבה השתמש הוא הדין לגבי המספר e שיופיע בהמשך הלימודים בהנדסה, כלכלה, רפואה, כימיה, ביולוגיה וכו' אגב, במיוחד מתאימות לתיכון שיטות נומריות הנותנות קירוב מלעיל וקירוב מלרע, שכן הפרשן מספק לנו חסם טבעי לשגיאת הקירוב בשלב זה הנהגנו את המושגים 'מתמטיקה משולבת מחשב' וכן 'מעבדה נומרית'

**שנות השמונים**

המיקרומחשבים תפסו את המקום המרכזי מאז שנות השמונים בפרט כאשר בתי הספר, במספר הולך וגדל, הקימו מעבדות מיקרומחשבים בשנים אלו התחלנו להשתמש במושג 'מעבדה נומרית' וכתבנו (יחד עם פרופ' שלמה ברויאר ז"ל מאוניברסיטת תל אביב ותבל"א פרופ' יהודית גל-עזר מהאוניברסיטה הפתוחה) מספר מאמרים בהוראת מתמטיקה נומרית בכתב העת Computers and Education ובכתב העת International Journal of Mathematics Education הדגש במאמרים אלה היה לעבד הוכחות מתמטיות לאלגוריתמים נומריים כך שיתאימו לתלמידי תיכון, תוך הקרבה קטנה ככל האפשר של כלליות הניסיון רב השנים שהצטבר אצלנו הצביע על כך, שהקפדה על הצדקת האלגוריתמים, דווקא היא המטפחת את החשיבה המתמטית, שהיא אחרי הכול המטרה העיקרית.

במשך הזמן נוצרה בנו יותר ויותר רתיעה, ואפילו גועל, מחוברות וספרים שהציעו לתלמידים שיטה נומרית כי 'אם כך תעשו, תראו שזה עובד' יותר ויותר ראינו בכך 'מתכוני בישול' שבינם לבין חינוך מתמטי יש מעט מאוד במקביל כאב לנו יותר ויותר כאשר אפילו חוקרים נבונים היו מדברים על הבנה אלגוריתמית כאשר הם מתכוונים להבנה מכנית או אינסטרומנטלית גרידא בנוסח 'במקרה כזה עושים כך וכך' ובהדגשת האידי ללא הימדוע' כך גמלה בלבנו ההחלטה להקדיש זמן רב (1990-1993) לכתיבת ספר שהסתמך ברובו על מאמרינו ופרט את משימות המעבדה הנומרית ברוח העקרונות שהוזכרו, יחד עם 'חישוב לכל דיוק רצוי' לכל אורך הספר

בסוף שנות השמונים התחילו בעבודת דוקטורט בהוראת מתמטיקה נומרית שתי מורות מנוסות ומצטיינות, אסתר אופנהיים, מורה בתיכון כצנלסון בכפר סבא, ורונית הופמן ממכללת סמינר הקיבוצים אסתר אופנהיים עסקה ב'הוראת אינטרפולציה פולינומיאלית בבית הספר התיכון' ורונית הופמן ב'מתמטיקה נומרית משולבת מחשב כמרכיב בחינוך המתמטי במכללות למורים'.

אשר לקירובי אינטרפולציה, הנושא ממש התבקש כאשר התלמידים שאלו שוב ושוב איך מוצא המחשב (או המחשבון) את $\cos x$ או $\ln x$ למשל הנושא עלה ביתר תוקף כאשר התברר שאפילו למתמטיקאים מנוסים (שמן הסתם לא למדו אנליזה נומרית) נדמה היה שברקע ספריית הפונקציות של מחשב נמצאים טורי טיילור. האמת היא שקירוב הפונקציה על קטע הוא משימה גלובלית אין זה סביר ליצור קירוב מעולה כזה באמצעות כלי מתמטי לוקלי כטור טיילור, הבנוי על אינפורמציה שכל כולה בנקודה אחת

קירוב אינטרפולטיבי מצטיין בכך שהוא 'מפזר' את השגיאה לאורך הקטע וכל הבעיה היא למצוא נקודות אינטרפולציה מעולות במלים אחרות — כדברי המתמטיקאי הרוסי פפנוטי צ'בישף — עלינו לשאול, אם בין כל הפולינומים ממעלה $n$ (או פחות) קיים פולינום המקרב את הפונקציה הנתונה בקטע הנתון טוב ביותר (במובן של מינימיזציה של מקסימום השגיאה, כלומר בנורמת המקסימום). כמו כן, אם פולינום אופטימלי כזה קיים, אם הוא יחיד ומה מאפיין אותו, ואיך למצוא אותו (או לפחות 'כמעט' למצוא אותו) מתברר שחסם השגיאה של קירוב כזה קטן פי $2^n$ לפחות מחסם השגיאה

הטיילורית המתאימה מכאן כי בספריית הפונקציות של מחשב עדיף שימצאו קירובים שנבנו בסגנון צ'בישף' יש, כמובן, גם מקום לבדוק אינטרפולציות רציונליות כאשר מדובר בתכנה קבועה לספריית הפונקציות של מחשב (או מחשבון), אך לא זה העיקר־כאן העיקר הוא חינוך מתמטי נאות בו מתאימים כלי קירוב גלובלי למשימת קירוב גלובלית נוסף על כך יש להקדים ולבצע צמצום תחום וטווח באופן המודגם להלן

מספר ממשי חיובי u מאוחסן במחשב בצורה $u=v\cdot 2^k$ כאשר $1\leqslant v<2$ ו־$k$ שלם מתאים (בזיכרון המחשב $v$ וגם $k$ מאוחסנים בכתיב בינרי, אך זה אינו משנה לעניין שלנו כאן) נניח שאנו מעוניינים בערך של $\log_2 u$ ולכן

$$\log_2 u=k+\log_2 v$$

במלים אחרות, די לנו להתרכז בקירוב $\log_2 v$ עבור $v$ המתאים כאשר $1\leqslant v<2$ ואז $0\leqslant\log_2 v<1$, וכך לפנינו תחום וטווח מצומצמים המקרה הטריגונומטרי מתאים אף הוא לתלמידי תיכון כאשר צמצום התחום משתלב בחומר שלומדים בטריגונומטריה אסתר אופנהיים ורונית הופמן חיברו תרגילים רבים ואספו חומר רב שהוכן על־ידי תלמידיהם יחד עם הפעלת המיקרומחשבים

מאלף גם להכין מאגר עשיר של נקודות שבהן ידוע הערך המדויק של הפונקציות הטריגונומטריות והלוגריתמיות בעזרת החומר שממילא נלמד במתמטיקה (חוקי הלוגריתמים, נוסחאות חצי זווית וכו') ממאגרים אלה יהיה אפשר בהמשך לבחור נקודות אינטרפולציה מעולות כך, ששגיאת הקירוב תקטן הקטנה זו מאפשרת להוריד את מעלת הפולינום המקרב וליצור ספריית פונקציות יעילה מאוד

## שנות התשעים

לאחר כל הניסיון המגוון שנצבר במשך חצי יובל שנים נכתב ויצא לאור ספרנו
*Numerical Mathematics – A Laboratory Approach* הוצאת Cambridge University Press,
מחברים Shlomo Breuer and Gideon Zwas

הספר הוקדש לזכרו של פרופ' שלמה ברויאר שנפטר באופן פתאומי זמן קצר לפני צאת ספרנו לאור באוקטובר 1993 בשלב זה התחילה להתגבש התכנית החדשה במדעי המחשב לחטיבה העליונה, תכנית לשלוש יחידות ותכנית לחמש יחידות ועדת המקצוע והתכנית למדעי המחשב, בראשותו של פרופ' עמירם יהודאי, החליטה לשלב פרקי אנליזה נומרית ביחידה החמישית ובחרה בנושאים

א מבוא ־ אנליזה נומרית ומעבדה נומרית
ב גישה אלגוריתמית למערכות ליניאריות
ג איטרציות לחישוב שורשים

בחירה זו הושפעה כמובן מערכם של נושאים אלה מנקודת ראות של מדעי המחשב לכן, כנראה, לא ניתנה עדיפות לפרק כמו 'חישובי שטחים בדיוק רצוי ־ תשתית למושג האינטגרל'

בינתיים בוטלו לדאבוני פרקי הבחירה בתכניות המתמטיקה לחטיבה העליונה, וועדת המקצוע למדעי המחשב הפכה למושיע של האנליזה הנומרית בתכניות הלימודים בישראל תוך שיתוף פעולה עם מנהל בית הספר להנדסאים בתל אביב, אלחנן אילת, ומנהל הגמנסיה הרצליה, רון חולדאי, וכן המורות נילי עירון וניצה גוטליב, ערכתי טרום־ניסוי נוסף בהוראת הפרקים בכיתות יא היה חשוב להוסיף תרגילי בית, כולל תרגילים מיוחדים לתלמידים מצטיינים התכנית לחמש יחידות אינה מיועדת לכולם ובין התלמידים המתאימים יש המשוועים לבעיות עם אתגרים התואמים את הפוטנציאל שלהם

בהכנת תרגילים שונים, וגם שאלות המתאימות לבחינות, עמדה לנגד עיניי כל העת הערתו של ידידי פרופ' אמיר פנואלי ממכון וייצמן (חתן פרס טורינג 1997) 'התלמידים צריכים לכתוב אלגוריתמים יעילים, אך לא פחות חשוב שילמדו לקרוא ולהבין אלגוריתמים נתונים'

## אנליזה נומרית בלימודי מדעי המחשב

יחד עם ד"ר רונית הופמן כתבנו מהדורת ניסוי של פרקי האנליזה הנומרית שהוזכרו, כולל כמאה תרגילים בתחילת 1998 הושלם גם המדריך למורה הכולל פתרונות לתרגילים, שפע הערות דידקטיות שהובאו על סמך הניסיון שהצטבר,

וכן הצעות לשאלות לבחינות

לפי שעה נוסה החומר שלוש פעמים בתשנ״ו-תשנ״ח בכיתות יא מדעית בתיכון שוז בבת ים (המורה: טלי איוניר), בכיתות יב בישיבת נתיב מאיר בירושלים (המורה: מאיר קומר) ובכיתה יב בגמנסיה ריאלית קררי בראשון לציון (המורה דינה קראוס) החומר גם נכלל בבחינות הבגרות בתשנ״ז ובתשנ״ח (בינתיים בחינות בגרות פנימיות). קיבלנו בתודה הערות שונות וגם תיקוני הגהה לשוניות ותרגילים נוספים. נכתבו גם קטעים חדשים אחדים והספרים יצאו לאור בהוצאת ׳רמות׳ (03-6426465, שלוחה 436), בפסח תשנ״ח — ספר לתלמיד ומדריך למורה, ונמצאים בדיונון ובאקדמון

בשנתיים האחרונות קוימו כבר מספר השתלמויות מורים באנליזה נומרית והוראתה בתיכון, וברור כי בכיוון זה יהיה צורך להשקיע מעתה את עיקר המאמצים בתיאום עם הפיקוח על הוראת מדעי המחשב והנהלת המרכז הארצי להוראת המדעים (מל״מ) לשנת תשנ״ט מתוכננת עתה סדרה של השתלמויות מורים ופעילויות של הטמעת החומר בחטיבה העליונה, בהיקף הולך וגדל

לפי שעה כותבים התלמידים את תכניות המחשב בשפת פסקל בהתאם לעקרונות שלמדו בארבע היחידות הקודמות בחומר האנליזה הנומרית נכתבים האלגוריתמים בצורה המאפשרת לממש אותם לפי הרצוי בשפת התכנית שנלמדה, ואשר אולי תוחלף בעתיד

להלן מספר פרטים על שלושת פרקי החומר

**בפרק המבוא.** בעקבות תיאור כללי של נושא האנליזה הנומרית מוסבר כאן על שיטות קירוב, שגיאה יחסית, חסם שגיאה, שיטת הנקודה הצפה, שגיאות עיגול, יעילות חישובית וסיבוכיות של אלגוריתם נומרי, וכן חישוב לכל דיוק רצוי. מפורטות מספר נקודות הנראות לנו כמשקפות את הפוטנציאל החינוכי של למידה במעבדה נומרית, כגון המחשת מושגים מופשטים, לימוד לעומק (בפרט ניתוח האלגוריתם כשמדובר בקלט חריג) וכן טיפוח מיומנות לתרגום רעיון לקבלת פתרון **להלכה**, לאלגוריתם היוצר את הפתרון **למעשה.**

**בפרק על מערכות ליניאריות** מופיעים שוב ושוב מערכים דו־ממדיים ולולאות מקוננות כאשר מקדמי המערכת מאוחסנים כטבלה בת *n* שורות ו־$(n+1)$ עמודות, וכאשר העמודה האחרונה מכילה את איברי ׳הצד הימני׳ של המשוואות. בכוונה נמנענו מתורת המטריצות, שכן אין צורך בכפל מטריצות, מטריצה הפוכה וכו׳

לצורך מציאות הפתרון מועברת המערכת למערכת משולשית שקולה באמצעות אלגוריתם השילוש אלגוריתם זה, המכיל שלוש לולאות מקוננות, מובא להלן כדי להדגים כיצד האלגוריתמים מופיעים בספר לתלמיד, בהתאם לדרך הכתיבה שלמדו לאוסף מקדמי המערכת בחרנו את המשתנה T (מזכיר Table וזהו המערך הדו־ממדי שהוזכר) ובדרך כלל r מספר השורה (מזכיר row) ו־c מספר העמודה (מזכיר column).

**אלגוריתם השילוש**

1. עבור r המקבל ערכים מ־1 עד (n-1) בצע

1 1 עבור *k* המקבל ערכים מ־$(r+1)$ עד n בצע:

1 1 1 $f \leftarrow -T(k,r)/T(r,r)$

1.1 2 $T(r) \leftarrow 0$

1.1 3 עבור c המקבל ערכים מ־$(r+1)$ עד $(n+1)$ בצע

1 1 3 1 $T(k,c) \leftarrow T(c,k) + f\,T(r,c)$

זו פרוצדורת השילוש (בספר לתלמיד אנו משתמשים במונח ׳שגרה׳ במקום ׳פרוצדורה׳) המעבירה את המערכת לצורה משולשית עליונה, שבה אופסו כל האיברים מתחת לאלכסון.

המערכת המשולשית (במקרה זה משולשית עליונה, כי מתחת לאלכסון הכול אופס) נפתרת בהמשך על־ידי פרוצדורת הצבה לאחור (תחילה X(n), אחריו X(n-1) וכו׳) והרי לנו אלימינציה גאוסית למערכת ליניארית נאיבית, כאשר איברי הציר (שהוגדרו קודם לכן) אינם אפס ואינם קרובים לאפס (המושג קרבה לאפס הוסבר היטב)

בהמשך מוכיחים, כי לתהליך הפתרון סיבוכיות $O(n^3)$ וליתר פירוט יעילות חישובית של $n^3/3 + n^2 + O(n)$ נוסף על כך דנים בשיטות פתרון מתחרות ובתת־תכניות המיועדות לטפל גם במקרים בעייתיים שבהם דרושה

החלפת ציר (pivoting) או כיול המשוואות (scaling) למניעת אבדן דיוק תכניות אלה נועדו גם לאבחן ולטפל במקרים סינגולריים

מקרה יותר סבוך ומעניין הוא הטיפול במערכת בעלת מוצגות גרועה (ill conditioned) במקרה זה מדובר בפרובלמטיות נומרית ללא תקנה, שאינה נובעת משיטת הפתרון, אלא מהמשוואות עצמן, שהן כמעט תלויות ליניארית במילים אחרות, יש בין המשוואות לפחות משוואה אחת שכמעט שאין בה אינפורמציה שאינה נובעת מקומבינציה ליניארית של משוואות אחרות מערכת כזו היא כמעט סינגולרית ובהיבט נומרי היא היפר־רגישה לשינויים (אפילו זעירים) בנתונים, כלומר בקלט ייתכן אפילו שלפנינו מערכת סינגולרית הנראית לנו כמעט סינגולרית כתוצאה משגיאות עיגול. כלל ידוע באנליזה נומרית הוא שאם קלט מסוים מתאים לבעיה מתמטית סינגולרית, אז גם סביבתו של קלט זה היא פרובלמטית מבחינה נומרית מערכת ליניארית בעלת מוצגות גרועה היא דוגמה לכך. לשם הדגמה, הבה ונבחן את רגישות המערכת הנתונה כאן לשינוי זעיר באחד משלושים הנתונים שלה

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | | | | 0 01 |
| | | | | 0.01 |
| 0.01 | -1 | | | -1 |
| | 0 01 | -1 | | 0.01 |
| | | 0 01 | -1 | -1 |
| | | | 0.01 | 0.01 + e |

דוגמה זו לקוחה כפי שהיא מהספר לתלמיד הואיל והמערכת כבר בצורה משולשית, מקבלים מיד את X(5) ולאחריו את X(4) וכו׳ אחורנית עד X(1) כך נקבל עבור $e=0$ את הפתרון

$$X(1)=1,\ X(2)=0,\ X(3)=1,\ X(4)=0,\ X(5)=1$$

עתה ניקח $e=10^{-6}$ ונקבל בהצבה לאחור

$$X(1)=10001,\ X(2)=100,\ X(3)=2,\ X(4)=0.01,\ X(5)=1.0001$$

ראו נא מה קרה לפתרון (בפרט לרכיב X(1)) כתוצאה משינוי של מליונית באחד הנתונים" כמובן שדוגמה זו נבנתה לצרכים לימודיים כדי להבליט את אפקט המוצגות הגרועה ועתה נקראים התלמידים לבנות דוגמאות משל עצמם בהמשך לומדים התלמידים כיצד לצרף לאלגוריתם מנגנון נומרי המאבחן מוצגות גרועה ועוצר את הביצוע מבלי להגיע לפתרונות שגויים שאין לסמוך עליהם כלל גם כאשר יפעילו התלמידים בעתיד תכנות מוכנות מסוגים שונים, יזכרו את הלקח ללמוד את מגבלות התכנה, להכיר מקרים בעייתיים, להוסיף תיקון כאשר אפשר, ובמקרה שאינו בר־תקנה לעצור את ההרצה גם אם הכול נראה כשר וטוב במבט ראשון

**בפרק של חישוב שורשים** לומדים התלמידים מהו תהליך איטרטיבי לקירוב תוצאה רצויה בשלבים, מהו אתחול (כלומר קירוב התחלתי) ומהי חשיבות טיב האתחול.

כדי לחוש ולהעריך את השיטות המעולות מתחילים בשיטה שהיא בבחינת ׳לאט אבל בטוח׳, והיא שיטת החצייה. לאחר מכן מוצגת התנהגות ריבועית של תהליך איטרטיבי, לפני שברור, כי תהליך בעל התנהגות כזו אפשרי בכלל הערכת השגיאה בסגנון ׳אילו היה תהליך כזה׳ מספקת מוטיבציה חזקה ובעקבות זאת בונים נוסחה מתאימה וחסם לשגיאה אחרי *n* צעדים כך מתברר, כי לחבטחת מלוא הדיוק של מיקרומחשב מספיקות איטרציות אחדות בהשוואה לעשרות איטרציות חצייה.

כל האנליזה המתמטית מובאת עבור שורש ריבועי ושורש שלישי, בדיוק משום העובדה, כי במקרים אלו אפשר להביא את מלוא המתמטיקה הנלווית באמצעים הנלמדים בבית הספר התיכון

למעשה, אנו מראים בסוף הפרק את הקשר לשיטת המשיקים של ניוטון־רפסון אמנם אפשר ללא קושי רב לקבל את הנוסחה הידועה

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

אולם אנו לא הלכנו בדרך זו (פרט לציון הקשר בסוף הפרק) שכן לא מתאפשר להוכיח את ההתנהגות הריבועית באופן כללי ללא פיתוח טיילור עם איבר שארית, ומשפטים נוספים שאינם נלמדים בתיכון העדפנו אפוא לצמצם את היריעה למען חינוך מתמטי טוב ולהישאר נאמנים לעיקרון שהכרזנו עליו להציג שיטה נומרית ואלגוריתם מתאים רק יחד עם כל המתמטיקה הנלווית

בהמשך אנו מרחיבים לשורש שלישי וכו' ודנים בשיפור טיב האתחול ומה מביא שיפור כזה בעקבותיו להשלמת התמונה אנו דנים גם באיטרציות בעלות התנהגות קובית (איטרציות **מסדר שלישי**) אם מעוניינים ב־$\sqrt{v}$, $1 \leqslant v < 4$, הרי הפעם מבוקשת ההתנהגות

$$\left|X_{n+1} - \sqrt{v}\right| \le C\left|X_{n} - \sqrt{v}\right|^{3}$$

עבור קבוע מתאים C אנו מראים שאם כי הדבר אפשרי, החיסכון הנוסף במספר האיטרציות אינו מאזן את ההסתבכות החישובית של הנוסחה האיטרטיבית המתקבלת, ועל כן המתמטיקה הנומרית לא התפתחה בכיוון זה

לסיום בונים התלמידים את פונקציית השורש הריבועי שלהם שסימונה MSR (x) לכבוד My Square Root כך הם מקבלים מושג על פונקציית השורש הריבועי של המחשב, כלומר חושפים את 'הסיפור שמאחורי המקש'

חשוב שנזכור כי המטרה אינה חישוב השורש הריבועי דווקא, אלא הכרת תהליכים איטרטיביים, כולל צמצום התחום והטווח של קלט נכנס, שיטות לשיפור האתחול, דרך להערכת השגיאה, וכל הדרוש לחישוב נכון ויעיל הקשר בין מתמטיקה למדעי המחשב בולט לאורך כל פרקי החומר ומעניק, לדעתנו, מימד נוסף לשני מקצועות הלימוד

שיעור במתמטיקה נומרית