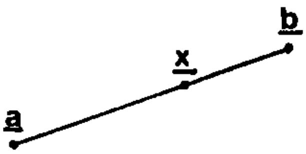
על היחס ההרמוני ועל היחס הכפול

מאת: פאול כץ

בפגישה עם מורי הניסוי שהתקיימה באוניברסיטת חיפה ביולי 1986 נתבקשתי לפתור את תרגיל 47 בעמ' 80 של הספר "אלגברה - כרך שני - 4-5 י"ל (וקטורים בגישה אלגברית)". מפאת אורך החישובים שבהם כרוך הפיתרון לא יכולתי להיענות לבקשת המורים; אעשה זאת כאן, בהרחבה מסויימת של הנושא.

נסמן ב $(a\ x\ b)$ את היחס שבו נקודה x שעל ישר $a\ b$ מחלקת את הקטע $a\ b$, כלומר



$$(a\ x\ b) = \pm \frac{\text{אורך } \overline{ax}}{\text{אורך } \overline{xb}}$$

כאשר הסימן באגף ימין הוא פלוס אם x בפנים הקטע $a\ b$ (לחצים $\overline{ax}$ ו $\overline{xb}$ אותו כיוון), ומינוס אם x מחוץ לקטע. היחס הכפול $(a,b;x\ y)$ של 4 נקודות שונות a,b,x,y שעל ישר אחד מוגדר כמנה של היחסים $(a\ x\ b)$ ו $(a\ y\ b)$, כלומר

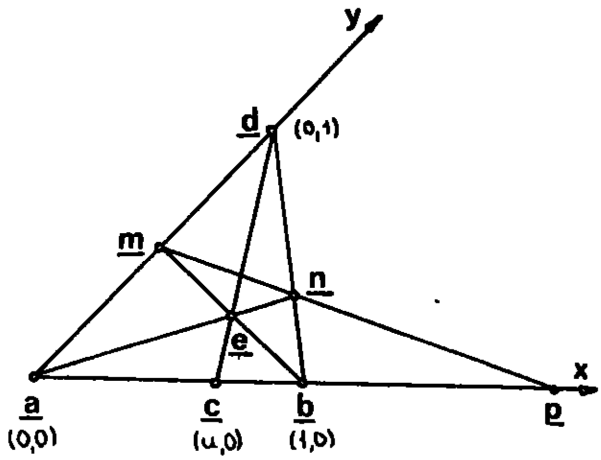
$$(a,b;x,y) = \frac{(a\ x\ b)}{(a\ y\ b)}$$

הרביעיה הסדורה a,b,x,y נקראת הרמונית אם

$$(a,b;x,y) = -1 \Leftrightarrow (a\ x\ b) = -(a\ y,b)$$

במלים אחרות, ברביעיה הרמונית a,b,x,y הנקודה y מחלקת את הקטע $a\ b$ מבחוץ (מבפנים) באותו יחס שבו x מחלקת אותו מבפנים (מבחוץ).

את התרגיל נפתור תחילה על פי ההדרכה שבציור המלווה אותו.



תרגיל 47

נתונות הנקודות

$\underline{a} = (0,0)$, $\underline{c} = (u,0)$, $\underline{b} = (1,0)$

בוחרים נקודה $\underline{d} = (0,1)$ שאיננה על הישר $\underline{a}\ \underline{b}$. מעבירים את שלושת הישרים

$\underline{d}\ \underline{a}$, $\underline{d}\ \underline{c}$, $\underline{d}\ \underline{b}$

בוחרים נקודה שלישית $\underline{e}$ על הישר $\underline{d}\ \underline{c}$.

הישר $\underline{a}\ \underline{e}$ פוגש את הישר $\underline{d}\ \underline{b}$ בנקודה $\underline{n}$.

הישר $\underline{b}\ \underline{e}$ פוגש את הישר $\underline{d}\ \underline{a}$ בנקודה $\underline{m}$.

הישר $\underline{m}\ \underline{n}$ פוגש את הישר $\underline{a}\ \underline{b}$ בנקודה $\underline{p}$.

הוכח: הרביעיה $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{p}$ היא הרמונית.

<u>פיתרון</u>: נסמן $\underline{p} = (v,0)$. כדי להוכיח את הטענה, צריך להראות כי:

$$(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{p}) = -1 \Leftrightarrow (\underline{a}\ \underline{c}\ \underline{b}) = -(\underline{a}\ \underline{p}\ \underline{b}) \Leftrightarrow \frac{u-0}{1-u} = -\frac{v-0}{1-v} \Leftrightarrow$$
$$u - uv = -v + uv \Leftrightarrow v = \frac{u}{2u-1}$$

נכתוב תחילה את משוואות הישרים $\underline{d}\ \underline{c}$, $\underline{d}\ \underline{b}$, $\underline{d}\ \underline{a}$.

$$\underline{d}\ \underline{a}: \quad y = 0 \tag{1}$$
$$\underline{d}\ \underline{b}: \quad x + y = 1$$
$$\underline{d}\ \underline{c}: \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{-1} = 1 \Leftrightarrow x + uy = u$$

($u \neq 0$, כי $\underline{c} = \underline{a}$). בשביל הנקודה $\underline{e}$ נבחר $y_0 \neq 0,1$, ואז

$$\underline{e} = (u - uy, y_0)$$

נחשב את משוואות הישרים $\underline{a}\ \underline{e}$ ו $\underline{b}\ \underline{e}$.

$$\underline{a}\ \underline{e}: \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{u(1-y_0)} \Leftrightarrow y = \frac{y_0 x}{u(1-y_0)} \tag{2}$$

$$\underline{b}\,\underline{e}:\quad y \quad y_0 = \frac{0 - y_0}{1 - u(1 - y_0)}\,[x - u(1 - y_0)] \qquad (3)$$

עתה, $\underline{m} = \underline{b}\,\underline{e} \cap \underline{d}\,\underline{a}$, ולכן הקואורדינטה השנייה של $\underline{m}$ מתקבלת מ (3) על-ידי ההצבה $x = 0$; לפיכך נותן חישוב פשוט

$$\underline{m} = (0,\ \frac{y_0}{1 - u + uy_0})$$

היות ו- $\underline{n} = \underline{a}\,\underline{e} \cap \underline{d}\,\underline{b}$, מתקבלות הקואורדינטות של $\underline{n}$ על-ידי פיתרון מערכת המשוואות (1) ו (2):

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_0 x}{u(1 - y_0)} \\ x + y = 1 \end{cases}$$

מתקבל

$$\underline{n} = (\frac{u(1 - y_0)}{u - uy_0 + y_0}\ ,\ \frac{y_0}{u - uy_0 + y_0})$$

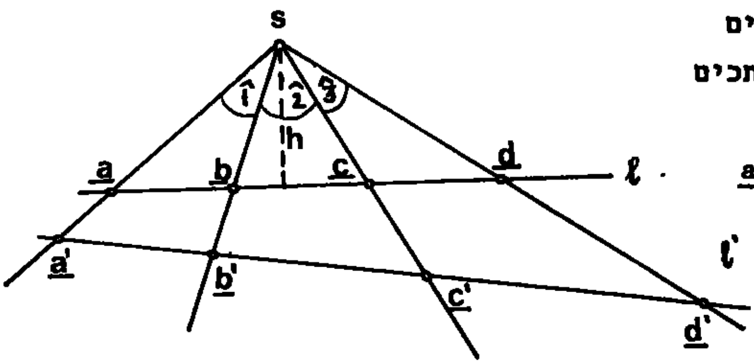
משוואת הישר $\underline{m}\,\underline{n}$ היא

$$y - \frac{y_0}{1 - u + uy_0} = \frac{\dfrac{y_0}{u - uy_0 + y_0} - \dfrac{y_0}{1 - u + uy_0}}{\dfrac{u(1 - y_0)}{u - uy_0 + y_0} - 0}\,(x - 0)$$

הקואורדינטה הראשונה v של נקודת החיתוך $\underline{p} = \underline{m}\,\underline{n} \cap \underline{a}\,\underline{b}$ מתקבלת מהמשוואה האחרונה על-ידי ההצבה $y = 0$. ואכן, אחרי מספר חישובים (והזדמנויות לטעויות) מתקבל $v = \frac{u}{2u - 1}$, כנדרש.

הערה: בחישובים הללו התעלמנו מספר פעמים מן האפשרות שאחד המכנים ישווה ל- 0. כך, למשל, ב $v = \frac{u}{2u - 1}$ יש למנוע $2u - 1 = 0$, כלומר $u = 1/2$. ואכן, במקרה זה $\underline{c}$ הוא אמצע הקטע $\underline{a}\,\underline{b}$, ואז הרי אין בנמצא על הישר הרגיל נקודה $\underline{p}$ ההרמונית לאמצע הקטע (פגם זה מתקנים בגיאומטריה הפרויקטיבית על-ידי הוספה של נקודת אין-סוף לישר). יתר המקרים שבהם מכנה מתאפס מתאימים לבחירות מיוחדות של הנקודה $\underline{e}$.

בתרגיל 48 (אותו עמוד) תלמיד מתבקש להוכיח, כי היחס הכפול אינו תלוי בישר החותך את ארבעת הישרים הנתונים. נביא כאן הוכחה מטרית פשוטה.



<u>תרגיל 48 ג.</u> דרך נקודה $\underline{s}$ במישור עוברים ארבעה ישרים. שני ישרים ℓ ו ℓ' שאינם עוברים דרך $\underline{s}$ חותכים אותם בנקודות $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$, $\underline{a}',\underline{b}',\underline{c}',\underline{d}'$ בהתאמה. הוכח כי $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = (\underline{a}',\underline{b}';\underline{c}',\underline{d}')$

הוכחה: נבחר את הישר ℓ כציר ה x ; למקום הימצאותם של הראשית ושל ציר ה y אין חשיבות. תהיינה קואורדינטות הנקודות $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ בהתאמה a,b,c,d. נסמן את הזוויות

$$\sphericalangle \underline{a}\ \underline{s}\ \underline{b} = \hat{1} \quad , \sphericalangle \underline{b}\ \underline{s}\ \underline{c} = \hat{2} \quad , \sphericalangle \underline{c}\ \underline{s}\ \underline{d} = \hat{3}$$

יספיק להראות כי היחס הכפול $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d})$ תלוי בזוויות 1,2,3 בלבד. נבטא את היחס הכפול בקואורדינטות.

$$(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = \frac{(\underline{a}\ \underline{c}\ \underline{b})}{(\underline{a}\ \underline{d}\ \underline{b})} = \frac{(c-a)(b-d)}{(b-c)(d-a)}$$

התבונן במשולשים שקדקודם ב $\underline{s}$ ובסיסיהם על הישר ℓ. לכולם אותו גובה h, לכן שטחיהם פרופורציוניים לאורכי הבסיסים. את אורכי הבסיסים נפרש כ"מכוונים". נסמן את שטח המשולש $\underline{a}\ \underline{s}\ \underline{c}$ ב S_{asc} וכו', ואת "אורך" הצלע $\underline{s}\ \underline{a}$ ב sa. נוכל אז לכתוב

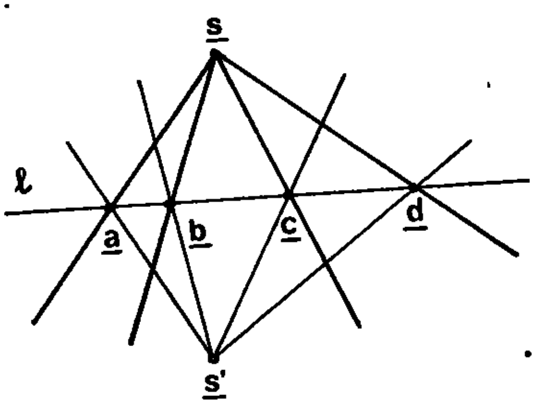
$$(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = \frac{S_{asc} \cdot S_{dsb}}{S_{csb} \cdot S_{asd}} = \frac{1/2\ sa\cdot sc\cdot \sin(\hat{1}+\hat{2}) \cdot 1/2\ sd\cdot sb\cdot \sin(\hat{2}+\hat{3})}{1/2\ sc\cdot sb\cdot \sin\hat{2} \cdot 1/2\ sa\cdot sd\cdot \sin(\hat{1}+\hat{2}+\hat{3})} =$$

$$= \frac{\sin(\hat{1}+\hat{2})\cdot \sin(\hat{2}+\hat{3})}{\sin\hat{2} \cdot \sin(\hat{1}+\hat{2}+\hat{3})}$$

בכך הוכחה הטענה.

היות והיחס הכפול הנ"ל איננו תלוי בישר החותך ℓ, הוא תכונה גיאומטרית של ארבעת הישרים העוברים דרך $\underline{s}$. לפיכך מגדירים את <u>היחס הכפול של האלומה</u> על-ידי

$$(\underline{s}\,\underline{a},\underline{s}\,\underline{b};\underline{s}\,\underline{c},\underline{s}\,\underline{d}) = (\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d})$$



אם $\underline{s}'$ נקודה אחרת שאיננה על הישר ℓ, מתקיים באופן ברור

$$(\underline{s}'\underline{a},\ \underline{s}'\underline{b};\underline{s}'\underline{c},\underline{s}'\underline{d}) = (\underline{s}\,\underline{a},\underline{s}\,\underline{b};\underline{s}\,\underline{c},\underline{s}\,\underline{d})$$

כי הרי שני היחסים הכפולים של האלומות שוות ליחס הכפול $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d})$.

קל להוכיח את התכונות דלהלן של היחס הכפול.

א. $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) \neq 1$. כי, לו היה

$$1 = (\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = (\underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b})/(\underline{a}\,\underline{d}\,\underline{b})$$

היה יוצא $(\underline{a},\underline{c},\underline{b}) = (\underline{a},\underline{d},\underline{b})$. זה לא ייתכן, כי את 4 הנקודות הנחנו כשונות ביניהן, בו בשעה שמן השוויון הנ"ל היה יוצא $\underline{c} = \underline{d}$.

ב. $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) \neq 0$, כי מתוך $(\underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b}) = 0$ היה יוצא $\underline{a} = \underline{c}$.

ג. $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = 1/(\underline{b},\underline{a};\underline{c},\underline{d})$. זאת מראים בעזרת קואורדינטות על הישר, כמקודם:

$$(\underline{b},\underline{a};\underline{c},\underline{d}) = \frac{(\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a})}{(\underline{b}\,\underline{d}\,\underline{a})} = \frac{(c-b)(a-d)}{(a-c)(d-b)} = \frac{(b-c)(d-a)}{(c-a)(b-d)} = 1/(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d})$$

בעזרת התכונות הללו ובעזרת היחס הכפול של אלומת ארבעה ישרים מקבלים הוכחה פשוטה יותר בשביל הבנייה של תרגיל 47. נסמן ב $\underline{f}$ את נקודת הפגישה של הישרים $\underline{a}\,\underline{c}$ ו $\underline{m}\,\underline{n}$.

$(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{p}) = (\underline{e}\,\underline{a},\underline{e}\,\underline{b};\underline{e}\,\underline{c},\underline{e}\,\underline{p})$ (על-ידי האלומה מ $\underline{e}$)

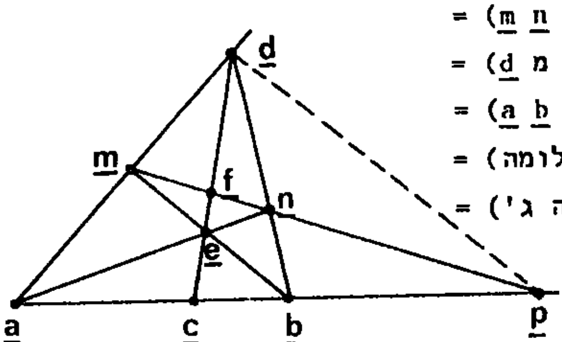
$= (\underline{e}\,\underline{n},\ \underline{e}\,\underline{m};\underline{e}\,\underline{f},\underline{e}\,\underline{p})$ (על-ידי חיתוך האלומה בישר $\underline{m}\,\underline{n}$)

$= (\underline{d}\,\underline{n},\underline{d}\,\underline{m};\underline{d}\,\underline{f},\underline{d}\,\underline{p})$ (על-ידי האלומה מ $\underline{d}$)

$= (\underline{d}\,\underline{b},\underline{d}\,\underline{a};\underline{d}\,\underline{c},\underline{d}\,\underline{p})$ (על-ידי חיתוך האלומה בישר $\underline{a}\,\underline{b}$)

$= (\underline{d},\underline{a};\underline{c},\underline{p})$ (על פי הגדרת היחס הכפול של אלומה)

$= 1/(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{p})$ (על-פי תכונה ג')

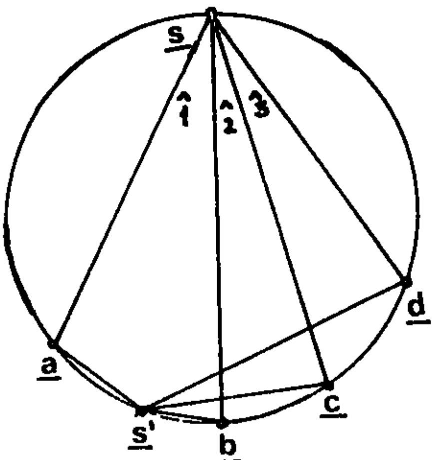


לכן $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{p})^2 = 1$. על פי תכונה א', היחס הכפול אינו מקבל לעולם את הערך 1, ולפיכך

$$(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{p}) = -1$$

כלומר הרביעיה $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{p}$ הרמונית.

מתוך כך שהיחס הכפול של אלומת ארבעה ישרים תלוי רק בזוויות שבין הישרים, נובע:



משפט: תהיינה $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ ו $\underline{s}$ נקודות על מעגל. אזי היחס הכפול $(\underline{s}\ \underline{a},\underline{s}\ \underline{b};\underline{s}\ \underline{c},\underline{s}\ \underline{d})$ אינו תלוי בקדקוד $\underline{s}$ של האלומה.

הוכחה: בשביל כל מצב של $\underline{s}$ על המעגל, הזוויות $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ נשארות קבועות, או הן מוחלפות במשלימות ל $180°$. בציור שלנו, כאשר $\underline{s}'$ נמצאת בצד השני של המיתר $\underline{a}\ \underline{b}$,

$\sphericalangle \underline{a}\ \underline{s}'b = 180° - \sphericalangle\ \underline{a}\ \underline{s}\ \underline{b} = 180° - 1$

זוויות 2,3,4 הן ללא שינוי. לכן בביטוי המביע את היחס הכפול בעזרת סינוסי הזוויות אין כל שינוי.

הערה: משפט זה הוא בתוקף גם כאשר במקום המעגל באה אליפסה, היפרבולה או פרבולה, אולם הדבר הזה מתקבל בשיטות הגיאומטריה הפרויקטיבית. שם מוכיחים:

משפט: תהיינה $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ ארבע נקודות במישור שביניהן אין שלוש על אותו ישר, ויהי k מספר שונה מ 0 ומ 1. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $\underline{s}$ שבשבילן

$$(\underline{s}\ \underline{a},\underline{s}\ \underline{b};\underline{s}\ \underline{c},\underline{s}\ \underline{d}) = k$$

הוא קו ממעלה שנייה (אליפסה, היפרבולה או פרבולה).

הנה כמה תרגילים בשביל התלמיד המעוניין.

תרגילים

1. בצע את בניית הנקודה ההרמונית הרביעית כאשר $\underline{c} = (1/2,0)$, כלומר $\underline{c}$ הוא אמצע הקטע $\underline{b}\ \underline{a}$. נמק את התוצאה באופן גיאומטרי.

2. הוכח, כי $(\underline{c},\underline{d};\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d})$.

3. א. יהי

i. $(\underline{a},\underline{b};\underline{c},\underline{d}) = k$

הוכח:

ii. $(\underline{b},\underline{a};\underline{c},\underline{d}) = 1/k$

iii. $(\underline{c},\underline{b};\underline{a},\underline{d}) = \frac{k}{k-1}$

iv. $(\underline{b},\underline{c};\underline{a},\underline{d}) = \frac{k-1}{k}$

v. $(\underline{a},\underline{c};\underline{b},\underline{d}) = 1 - k$

vi. $(\underline{c},\underline{a};\underline{b},\underline{d}) = \frac{1}{1-k}$

ב. כתוב את כל 24 התמורות האפשריות של האותיות $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$. הראה כי היחסים הכפילים המתאימים מקבלים רק את הערכים i,...,vi. חלק את 24 התמורות לקבוצות של 4, כשבכל קבוצה אותו יחס כפול.

4. תהי הקבוצה $G = \{k, \frac{1}{k}, \frac{k}{k-1}, \frac{k-1}{k}, 1-k, \frac{1}{1-k}\}$ מגדירים בה "פעולת כפל" כדלהלן: אם λ ו μ שני איברים של G, אז $\lambda o \mu$ הוא המספר המתקבל כאשר במקום הערך של k שב λ מציבים את μ. למשל:

$$\lambda = \frac{k-1}{k}, \quad \mu = \frac{1}{k}, \quad \lambda o \mu = \frac{\frac{1}{k} - 1}{\frac{1}{k}}$$

מלא את לוח "הכפל"

$\lambda \quad \mu$	$k \quad 1/k$	$k/(k-1)$	$(k-1)/k$	$1-k$	$1/(1-k)$
k					
$1/k$					
$k/(k-1)$					
$1-k$					
$1/(1-k)$					

וודא כי בתוך לוח כפל זה מופיעים רק איברים של G. האם תמיד $\lambda\circ\mu = \mu\circ\lambda$?

לידיעתך: G היא חבורה ביחס לפעולה דלעיל. G איסומורפית לחבורה S_3 של התמורות של שלושה עצמים.