התנהגות אלגוריתמית אמיתית ואלגוריתמית לכאורה בלמידת מתמטיקה

מאת: שלמה וינר

1. הבנה מכשירית והבנת יחסים - מבוא

הרוב המכריע של לימודי המתמטיקה בבית-הספר התיכון מסתכם ברכישת טכניקות לפיתרון בעיות. פיתרון מערכת משוואות לינאריות, פיתרון משוואה ריבועית, מציאת נקודות קיצון של פונקציה, התרת משולשים - אלה רק דוגמאות מספר לטענה זו. המורה המסרב לראות את המתמטיקה כאוסף טכניקות מנסה, בדרך כלל, ללמד את הטכניקות על בסיס של מושגים. הוא מנסה להסביר כיצד נגזרות הטכניקות ממושגים וממשפטים ידועים, מדוע הן תקפות ובאילו מקרים פג תוקפן. לדוגמה, מורה המלמד כי סימן לעליית פונקציה בתחום מסויים הוא שנגזרתה חיובית בתחום זה, ינסה גם להסביר מדוע הדבר כך. הוא יתייחס למשמעות מושג הנגזרת, ידון באופן כללי במושג העלייה של פונקציה ויברר באילו מקרים השימוש בגזירה וחיפוש ערכי נגזרת חיוביים יביא לתוצאות המבוקשות. מאידך, ישנה גם דרך הוראה אחרת, והיא הדרך הטכנית גרידא. המורה נותן לתלמידיו מתכון שבאמצעותו ימצאו תחום עלייה של פונקציה. הוא אינו מסביר להם את הבסיס המתמטי למתכון זה, כשם שספר בישול אינו מסביר את הרקע הכימי למתכונים המצויים בו.

עד כמה שנראה הדבר מוזר ממבט ראשון, מתברר שגם תלמיד שלמד נושא בגישה הטכנית גרידא יטען שהוא מבין אותו. בשביל אנשים רבים, להבין מתמטיקה פירושו לדעת להשתמש בטכניקות מתמטיות שהם רכשו בזמן זה או אחר. השאלה מנין נגזרות טכניקות אלה אינה מעניינת אותם, או אפילו אינה קיימת בשבילם. לסוג זה של הבנה קרא סקמפ (Skemp, 1976) בשם ה ב נ ה מ כ ש י ר י ת (instrumental understanding). לעומת זה, להבנה הנרכשת בדרך ההוראה הראשונה - המושגית - קרא סקמפ בשם ה ב נ ת י ח ס י ם (relational understanding). לפי סקמפ, הבנה מכשירית פירושה ל ד ע ת א י ך ב ל י ל ד ע ת מ ד ו ע. הבנת יחסים היא ל ד ע ת א י ך ו ג ם מ ד ו ע. הדוגמה שמביא סקמפ במאמרו היא: לדעת כי שטח מלבן הוא מכפלת צלעותיו מבלי לדעת מדוע - זוהי הבנה מכשירית; לדעת כי שטח מלבן הוא מכפלת צלעותיו ולדעת גם מדוע הדבר כך - זוהי הבנת יחסים.

כאמור לעיל, מורה בעל יחס רציני למתמטיקה יוסה, עד כמה שהדבר תלוי בו, לפתח אצל התלמיד הבנת יחסים; אלא שלא תמיד מחייע הדבר בידו. בגלל אילוצים שונים (קוצר זמן, רמת התלמידים, מידת העניין שלהם וכדומה), מלמדים מורים לא מעטים במספר לא מבוטל של מצבים בגישה טכנית גרידא. גם אחוז גבוה של תלמידים, בייחוד מבין אלה המתקשים במתמטיקה או הלומדים אותה בהיקף מצומצם, ניגשים אל המתמטיקה באופן מכשירי.

לצורך דיון זה, נאמץ את הגישה המכשירית להוראת מתמטיקה, כלומר נניח כי מטרתנו היא ללמד איך ולא מדוע, להקנות טכניקות ולא להסביר כיצד הן נגזרות. על סמך הנחות אלה ננסה לבדוק מהן ציפיותינו מהתלמיד ומה צריכה להיות התנהגותו המתמטית. לבסוף, ננסה לענות על השאלה האם ציפיות אלה מתמלאות, או שהמצב גרוע אף ממה שאנחנו משערים כשאנו מאמצים את הגישה המכשירית.

2. <u>התנהגות אלגוריתמית אמיתית</u>

ברובן המכריע של המשימות המתמטיות המוצגות לתלמידים, נתונה בעיה (לפעמים בעיה מילולית) שיש להתאים לה דרך פיתרון אלגוריתמית (נוסחה, טכניקה וכדומה). השאלה האם התלמיד יודע כיצד נגזרת דרך הפיתרון ומדוע היא בתוקף אינה חשובה כלל לתהליך הפיתרון. ברצוננו להציע מספר הנחות כלליות על תהליכי הפיתרון של בעיות כנ"ל. אנחנו מאמינים כי הנחות אלה נמצאות - אם כי לא בהכרח באופן מפורש - ביסוד תפיסתם של מורים רבים ואנשי הוראת המתמטיקה. ברצוננו לטפל במצבים שבהם אין התלמיד יודע מראש באיזו דרך פיתרון עליו ללכת כדי לפתור את הבעיה הנתונה לו. במקרים כאלה סביר להניח כי קיימים בשכלו הדברים האלה:

A. מאגר של אלגוריתמים;

B. מנגנון המנתח בעיות נתונות וקובע את הטיפוס והמבנה שלהן;

C. מנגנון המתאים אלגוריתם פיתרון לבעיות לאחר שהטיפוס והמבנה שלהן נקבעו.

בהמשך נבהיר ע"י דוגמאות כיצד פועלת המערכת של A , B ו C. באשר ל A, ברצוננו לומר כבר בשלב זה, כי בדרך כלל אנו מאמינים שהאלגוריתמים שמורים בזיכרון במלים או בסמלים. כלומר, אנו מצפים שהתלמיד יוכל לנסח את האלגוריתמים במלים או בסמלים (לדוגמה: "שטח מלבן הוא מכפלת הצלעות שלו" או "שטח משולש הוא $ah/2$ באשר a היא אחת מצלעות המשולש ו h הוא הגובה לצלע זו"). איננו טוענים שלתלמיד צריכה להיות היכולת לנסח את האלגוריתם באופן דקדוקי ומלא. ניסוחו יכול להיות משובש וחלקי. אבל איזושהי גרסה, מילולית או סימבולית, חייבת להימצא בזיכרון התלמיד.

כאשר בעיה מתמטית X ניתנת לתלמיד, אמור להתרחש תהליך זה:
הבעיה X מפעילה את המנגנון B הקובע את הטיפוס והמבנה של X; נקרא להם Y.
Y מפעיל את המנגנון C הפועל על Y ועל מאגר האלגוריתמים A ובוחר מתוכו אלגוריתם Z המתאים לפיתרון X.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, leftrightarrow] & B \arrow[r, leftrightarrow] & Y \arrow[r, leftrightarrow] & C \arrow[dl] \\
& Z \arrow[ul] \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{A \quad Y} &
\end{tikzcd}$$

השתמשנו בשרטוט בחיצים דו-כיווניים כדי להצביע על כך שבמנגנונים יכולים להתרחש מספר תהליכי משנה של בחינה ובחינה מחדש לפני שמתקבלת החלטה סופית בדבר טיפוס השאלה, המבנה שלה ומהו האלגוריתם המתאים לפיתרונה.

נמחיש את התיאור הכללי הנ"ל בעזרת דוגמה. נתבונן בבעית שטח.
X_1 : מצא את השטח של משולש שווה-שוקיים שבסיסו 6 ס"מ וצלעו 4 ס"מ.
הנה קו מחשבות היפותטי לפיתרון הבעיה הזאת:
זוהי בעית שטח. זהו שטח משולש. נוסחה לחישוב שטח משולש S היא:
$S = ah/2$, באשר a היא אחת מצלעות המשולש, ו-h היא הגובה לצלע זו.
בבעיה הנתונה נתונות שתיים מצלעות המשולש, אבל לא נזכר כל גובה.
לפיכך, $S = ah/2$ אינה הנוסחה המתאימה לפיתרון הבעיה. מאידך, נתון שהמשולש שווה שוקיים ולכן נתונות למעשה שלוש צלעות המשולש. האם יש נוסחה הנותנת את שטח המשולש תוך שימוש בשלוש הצלעות? כן. זוהי הנוסחה:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ באשר c,b,a הן צלעות המשולש
ו- $p = (a+b+c)/2$. השטח המבוקש יהיה אם כך:
$\sqrt{7(7-6)(7-4)(7-4)} = \sqrt{7\cdot1\cdot3\cdot3} = 3\sqrt{7}$ סמ"ר

בהציענו קו היפותטי זה של מחשבות, איננו טוענים שהוא אכן נוצר כך ככתבו וכלשונו בתודעתו של תלמיד פלוני. לעתים קרובות, חלקים של התהליך המנטלי אינם ורבאליים, ובתהליך יש שלבים רבים נוספים של ניסוי וטעות. למרות זאת, קו המחשבות ההיפותטי הנ"ל עשוי ל י י צ ג קו מחשבות אמיתי אשר קשה מאוד לתארו במלואו במלים. נוכל לחזק טענה זו בעזרת אנלוגיה מתחום המחשבים. בתחום זה אומרים לעתים קרובות שהמחשב קורא נתונים, מסיק מסקנות ומבצע שיקולים. זה איננו תיאור במונחים של זרמים חשמליים, שהם הדבר האמיתי היחיד המתרחש במחשב. אבל תיאור זה מ י י צ ג את התהליך המתרחש במחשב ומאפשר לנו להתייחס להיבטים שונים של פעולת המחשב, מבלי שנזדקק למינוח המסורבל של הנדסת החשמל.

קו המחשבות הנ"ל מדגים את התהליך הכללי שתאריו קודם והמיוצג בשרטוט 1. הוא איננו הדרך היחידה לפתור את X_1 (אפשר גם לחשב את הגובה לבסיס המשולש שווה-השוקיים בעזרת משפט פיתגורס). אולם, תהיה דרך הפיתרון אשר תהיה, ברור כי לפנינו תהליך אינטלקטואלי מורכב. אם תהליך כזה אמנם מתרחש אצל תלמיד פלוני, אנחנו יכולים להיות מרוצים ממנו גם אם אין הוא יודע מדוע פועלת הנוסחה שבה השתמש לפיתרון הבעיה. במקרה המיוחד שלפנינו - מדובר בנוסחת הרון - אין המורה מצפה אפילו שתלמידיו ידעו כיצד נגזרה נוסחת הפיתרון.

נתבונן כעת בשתי בעיות שטח נוספות.
X_2 : מהו שטחו של חצי מעגל שקוטרו 10 ס"מ?
X_3: מהו השטח התחום ע"י הגרף של $y = x(x - 1)(x - 2)$ וציר ה x בין 0 ל 2?

בכל אחת משתי השאלות יש מלכודת. בבעיה הראשונה (בעיה לכיתה ו' או ז') צריך התלמיד להיזהר ולא להשתמש מיד בנוסחת שטח העיגול, שכן, בשאלה נתון קוטר העיגול ולא רדיוסו. כמו כן הוא צריך לשים לב לכך שמדובר בשטח מחצית העיגול ולא בשטח העיגול השלם. בבעיה השניה (בעיה לכיתה י"א או י"ב) על התלמיד להיזהר ולא לחשב את $\int_0^2 ydx$, שכן חלק מהשטח המבוקש נמצא מתחת לציר ה x. נדמה לנו כי מורה המתמטיקה יהיה די מרוצה אם תלמידיו יוכלו לפתור את השאלות הנ"ל מבלי ליפול בפחים הטמונים בהן. הידיעה "מדוע" היא בדרך כלל מעבר ליכולת המתמטית של רוב התלמידים המתבקשים לפתור שאלות אלה.

אנו רואים אפוא, כי הגישה המכשירית כרוכה לעתים קרובות בתהליכים אינטלקטואליים די מורכבים. אם בפיתרון בעיה מתמטית אצל תלמיד פלוני מתרחש תהליך כמתואר לעיל (התיאור הכללי, שרטוט 1 ובעיה X_1) נכנה את התנהגותו בשם התנהגות אלגוריתמית אמיתית. אם תורשה לנו הערה ערכית בשלב זה נאמר, כי לדעתנו התנהגות אלגוריתמית אמיתית היא התנהגות אינטלקטואלית מכובדת, גם אם אין מתלווה אליה הבנת יחסים. הידיעה "מדוע" איננה תנאי הכרחי לפיתרון בעיות מהסוג הזה וכאמור, היא גם לעתים קרובות מעבר ליכולת המתמטית של התלמידים.

בנוסף לידיעה מדוע הנוגעת לדיוננו, ישנה גם ידיעת המושגים הדרושה להבנת בעיה מתמטית נתונה. סביר לטעון, כי אפילו נוותר על הידיעה מדוע, הרי שידיעת המושגים היא דבר הכרחי. ברצוננו לבחון דעה זו באמצעות דוגמה:
X_4: מהו שטחו של מלבן שאחת מצלעותיו 4 ס"מ והיקפו 12 ס"מ?

נתאר לעצמנו תלמיד שאינו יודע מהו מלבן (כלומר, המלה "מלבן" אינה קשורה בתודעתו לשום תמונה מנטלית של מלבן). כמו-כן, אין התלמיד יודע מהו שטח (דהיינו, המלה "שטח" אינה קשורה בתודעתו בְּפְנִים של צורה גיאומטרית או במספר ריבועי היחידה החסומים בה). נוסף לכך אין התלמיד מכיר את מושג האורך. אבל נניח כי התלמיד יודע כי שטח מלבן הוא מכפלת שתי צלעותיו הסמוכות, והיקף המלבן הוא פעמיים סכום שתי צלעותיו הסמוכות. (מורה המתמטיקה יטען, ובצדק, כי "ידיעה" כזאת היא חסרת כל ערך; בכל זאת נמשיך מעט את הדיון במצב היפותתי זה.) על סמך ידיעה זו, ולמרות העדר ידיעת המושגים המופיעים ב X_4, יוכל התלמיד הדמיוני שלנו ליצור קו מחשבות כדלהלן:

זוהי בעית שטח. מדובר בשטח מלבן. כדי לחשב שטח מלבן יש לכפול את צלעותיו הסמוכות. אבל רק צלע אחת של המלבן נתונה בשאלה. מאידך, נתון היקף המלבן. זהו פעמיים סכום שתי צלעותיו הסמוכות. כלומר, 12 הוא פעמיים סכום הצלעות. לכן 6 הוא סכום הצלעות והוא הסכום של 4 והצלע השנייה. מכאן, שהצלע השנייה היא: 4 - 6, כלומר 2. שטח המלבן הוא אם כך: $4\cdot2 = 8$.

קו מחשבות זה הוא לפי הגדרתנו אלגוריתמי אמיתי. העדר היכולת לדמות מלבנים או ליצור תמונה מנטלית של שטח או אורך אינו מכשול לתלמיד הדמיוני שלנו בדרך לפיתרון של X_4. כמורים למתמטיקה, אנו עשויים להיות מתוסכלים ממצב זה, שכן היינו רוצים שתלמידינו לפחות ידעו את המושגים המופיעים בשאלות שאנו מציגים להם. מתסכל ששאלות כמו X_4 אינן יכולות לבדוק דברים שאולי ציפינו מהן לבדוק. אבל אין לנו עילה לבוא בטענות אל התלמיד. אם ניגש ל X_4 מנקודת מבט האינטלגנציה המלאכותית ונבנה תכנית מחשב לפיתרון בעיות הדומות לה, הרי שתוכנית כזאת תפתור את X_4 בדרך דומה לזו של קו המחשבות הנ"ל. תוכנית זו לא תיצור ייצוגים חזותיים למושג המלבן או למושגי השטח והאורך. אמנם, נוכל להוסיף לתכנית חלק שיצייר מלבן כל פעם שמלה זו מופיעה ואפילו יצביע על שטחו או היקפו, אבל חלק זה לא יהיה משמעותי לפיתרון הבעיה.

האם להתנהגות אלגוריתמית אמיתית יש ערך גם בהעדר ידיעת המושגים הבסיסיים - זוהי שאלה של דעה. בעזרת הניתוח דלעיל ושתי הדוגמאות X_1 ו X_4 ניסינו לטעון, כי התנהגות אלגוריתמית אמיתית היא התנהגות אינטלקטואלית מכובדת. בכך איננו רוצים לטעון שזו צריכה להיות מטרתנו בהוראת מתמטיקה. ההיפך הוא הנכון, אולם בדיון זה איננו מתכוונים לדון במטרות. כוונתנו רק לאפיין את התנהגות התלמידים. ניתוחנו ניתן להרחבה לרוב המצבים שבהם נבדק הידע המתמטי של תלמידים. מסתבר, כי אלה יכולים

להסתפק בהתנהגות אלגוריתמית אמיתית כדי ליצור אצלנו את הרושם שהם יודעים את החומר. כאמור, מצב זה עלול להיות מסוכן מאין כמוהו. למרבית הצער, אין מנוס ממצב זה אם מאמצים את הגישה המכשירית למתמטיקה. ממצב זה גם אין מנוס אם אין מאמצים במפורש את הגישה המכשירית אבל בוחנים את התלמידים בסוג שאלות כאלה, כלומר בשאלות שלפיתרונן יש להשתמש בטכניקות ידועות.

כפי שכבר הזכרנו קודם, לדעתנו, לו הצלחנו להקנות לתלמידים התנהגות אלגוריתמית אמיתית, לא היה המצב רע כל כך. השאלה היא, אפוא, האם כדי להצליח בלימודי המתמטיקה חייב התלמיד לרכוש את ההתנהגות האלגוריתמית האמיתית. יש לזכור כי מבחינת רוב התלמידים, ללמוד - פירושו לעשות את הפעולות הדרושות כדי להצליח בבחינות. השאלה היא, אם כך, האם יש התנהגות אחרת פשוטה מההתנהגות האלגוריתמית האמיתית, היכולה להביא לתלמיד הצלחה בבחינות. אם יש כזאת, נוכל להניח כי רוב התלמידים יעדיף אותה, שכן עקרון המאמץ המינימלי פועל כמעט בכל תחום בחיים. עקרון זה אומר שמבין מספר פעולות המובילות לאותה מטרה יעדיף האדם את זו שכרוך בה המאמץ המינימלי.

על שאלה זאת נענה בחלק הבא של המאמר.

<u>מראי מקומות:</u>

Skemp, R., 1976, Relational Understanding and Instrumental Understanding, Mathematics Teaching 77, 20-26.