היסטוריה

התפתחות הגיאומטריה האוקלידית וגילוי הגיאומטריה הלא-אוקלידית בתולדות המתמטיקה ובחשיבה של תלמידים

אלחנן גזית
תיכון אוהל-שם, רמת-גן[1]

1. גיאומטריה לא-אוקלידית על קצה המזלג

"מכל מלמדי השכלתי, ומתלמידי יותר מכולי"

המניע לכתיבת מאמר זה הוא הסיטואציה שחזרה על עצמה בכיתות שונות שבהן אני מלמד (כיתות ט ו-י) בשיעור שבו התחלתי ללמד את נושא המקבילים, עסקנו במצב הדדי בין שני ישרים במישור והגדרנו את הזוויות הנוצרות בן שני ישרים וישר שלישי החותך אותם סיפרתי לתלמידים שאקסיומת המקבילים נוסחה במקורה על-ידי אוקלידס כך

"אם ישר נופל על שני ישרים, כך שסכום הזוויות הפנימיות הנמצאות מאותו צד של החותך הוא פחות משתי זוויות ישרות, אזי שני הישרים, אם ממשיכים אותם בלי גבול, נחתכים בצד שבו סכום הזוויות הוא פחות משתי זוויות ישרות".

מאקסיומה זו הוכיח אוקלידס את הטענה שאם סכום זוויות פנימיות הנמצאות מאותו צד של החותך הוא $180°$, אז הישרים אינם נחתכים ישרים שאין להם נקודת חיתוך משותפת מוגדרים כמקבילים זה לזה

אקסיומה זו שקולה לאקסיומה שניסח דיוויד הילברט "אם מחוץ לישר a נתונה נקודה P, אפשר להעביר דרכה ישר מקביל אחד ויחיד לישר a " בנקודה זו שאלתי "מה דעתכם על האקסיומה של אוקלידס?" תשובה אחת שקיבלתי הייתה "רואים את זה ולכן אין צורך בהוכחה, כי ברור שהם לא ייפגשו" (הכוונה לישרים) תשובה שנייה הייתה "אין בעיה, רואים את זה ולכן אפשר להוכיח זאת בקלות" יותר ממחצית התלמידים בכיתה חשבו שאפשר להוכיח את האקסיומה סיימתי את השיעור בכך שאמרתי "נסו להוכיח זאת לקראת השיעור הבא, ומי שיצליח ויראה לכיתה את ההוכחה יקבל בונוס בציון" אופן חשיבה זה חזר על עצמו בכיתות שונות ובבתי ספר שונים לכאורה מדובר בשתי מסקנות סותרות זו את זו הנובעות מכך ש"רואים ששני הישרים מקבילים אם סכום הזוויות החד-צדדיות הוא $180°$" מצד אחד אין כלל בעיה ואין צורך בהוכחה, כי רואים זאת ומצד שני אפשר להוכיח זאת כמשפט, בדיוק מאותה סיבה המניע העיקרי לכתיבת עבודה זו היה להבין יותר את פשר התופעה ולדעת יותר על הנושא

[1] הוגש כעבודת גמר ל- M A בחוג להוראת המדעים בקורס "התפתחות של מושגים מדעיים בהיסטוריה של המדעים" בהנחיית פרופ' רות סתוי

השאלות העיקריות שעלו לאחר השיעור מתוך התנסות בכיתה היו

1. **האם תלמידים מבינים מה ההבדל בין אקסיומה למשפט?**
2. **איך תופסים התלמידים את המושג "ישרים מקבילים"?**
3. **מהי הדרך הטובה ביותר להסביר לתלמידים את הסתירה בנימוקים האינטואיטיביים שהביאו?**
4. **איך אפשר לעורר עניין בנושא אקסיומת המקבילים הנחשב כ"יבש" ומשעמם בקרב התלמידים?**

בשיעור שהתקיים לאחר מכן, לא הייתה לאף תלמיד הוכחה מובנת לאקסיומה של אוקלידס (כקוריוז, אחת התלמידות אמרה לי שאחיה הלומד באוניברסיטה יודע להוכיח זאת אך היא שכחה את ההסבר) במקרה היה לאחד התלמידים יום הולדת וחבריו הביאו בלונים לכיתה כדי לחגוג עימו מתוך רצוני לערער על הנימוק של "הברור והנראה מאליו", סרטטתי על הבלון ישר ונקודה מחוץ לישר ושאלתי

א האם "ישר" במישור זהה ל"ישר" על פני כדור, ואיך תגדירו ישר כזה?
ב כמה ישרים אפשר להעביר בין שתי נקודות על פני כדור?
ג כמה ישרים מקבילים אפשר להעביר דרך נקודה מחוץ לישר?

רוב התשובות המיידיות התאימו לגיאומטריה האוקלידית רק אחרי שהבאתי את התלמידים **למודעות שתיאורו של ישר על פני כדור שונה מזה של "ישר" במישור**, ענה חלק קטן מהתלמידים תשובות נכונות. הייתה זו פעילות לא מתוכננת מראש ומאולתרת ואמצעי ההמחשה היו אמצעים של הרגע (בלון יום הולדת) אך יחד עם זאת, הרגשתי שעוררתי עניין רב בקרב התלמידים וכי הסתירה בין הגיאומטריה האוקלידית והגיאומטריה על פני כדור עזרה להם לחשוב באופן שונה

סיכמתי את הדיון בכיתה בכך שהגדרתי מערכת אקסיומות ומושגי יסוד, תוך הצבעה על ההבדלים שבין שתי הגיאומטריות הדגשתי לסיום, שכפי שראינו במודל הכדור, המערכת האקסיומטית איננה קבועה **ואין אמת אחת מוחלטת, אלא היא תלויה במערכת האקסיומות ומושגי היסוד שאנו בוחרים**
ההדגמה על מודל הכדור בכיתה לקחה כמחצית השיעור והרגשתי שהיא הייתה קצרה מדי ולא מבוססת מספיק

הפעילות המוצעת בעבודה זו באה לענות על חלק מהשאלות שעלו מההתנסות בכיתה הפעילות מורכבת משילוב של פעילות התלמידים ולאחריה סקירה מקיפה של התפתחות הגיאומטריה הלא-אוקלידית הצעה שאפשר להוכיח את אקסיומת המקבילים, כפי שהועלתה על-ידי התלמידים בכיתה, שלטה למעשה במשך השנים עד לראשית המאה ה-19 עם גילוי הגיאומטריה הלא-אוקלידית

חשיפת התלמידים באופן אקטיבי להתפתחות ההיסטורית של אקסיומת המקבילים שהובילה לגילוי של גיאומטריות שונות היא, לדעתי, הגישה המתאימה להוראת הגיאומטריה **התלמיד מקשר בין הנושא שנלמד בכיתה לבין התפתחות ההיסטורית שלו תוך שימוש בעקרונות הלוגיים הבאים** (כפי שפותחו על-ידי הדס,1994)

א. חקירה וגילוי של משפטים.
ב. בדיקת נכונות של משפטים – הוכחה אם הם נכונים, הפרכה אם אינם נכונים.
ג. עיסוק במשפטים הפוכים למשפטים נתונים, גם כשאינם נכונים.
ד. פעילויות המדגישות את תפקיד ההוכחה דרך עיסוק במשפטים שאינם נכונים ובמשפטים "מפתיעים".
ה. עיסוק במושגים ומשמעותם וידיעת התפתחותם ההיסטורית של המושגים.

מארבע השאלות העיקריות שהעסיקו אותי לאחר השיעור עלו שתי השערות עיקריות שאותן בדקתי בפעילות שאותה העברתי כחודשיים לאחר אותו שיעור

השערות

1 התלמידים אינם מבינים את משמעות ההבדל בין משפט לאקסיומה
2 התלמידים תופסים באופן אינטואיטיבי את מושג המקבילים על-ידי ראייה ("רואים את זה"), ולכן יש סתירה בין הדימוי הויזואלי שלהם לבין הגדרת המושג

הפעילות המתוכננת

א	מבוא	פתיחה על מקור הגיאומטריה אוקלידית – העברת דף מסי 1
ב	פעילות עם בלונים	מודל להמחשה של גיאומטריה לא-אוקלידית העברת דף מסי 2 סיכום ודיון על תשובות תלמידים מדף 2
ג	הרצאה	מבנה השיטה האקסיומטית ההיסטוריה של אקסיומת המקבילים וגילוי הגיאומטריה הלא-אוקלידית

חשוב לציין שלתלמידים הייתה מוטיווציה רבה, חלקם נשאר מרצונו בכיתה בהפסקה כדי לעסוק בתשובות לשאלות שעלו בדף 2 (ראה נספח – דף פעילות לתלמיד 2-1)

להלן פירוט תשובות התלמידים לשאלה כמה ישרים מקבילים אפשר להעביר דרך נקודה P מחוץ לישר a

לוח 1: התפלגות תשובות התלמידים במספרים ואחוזים

	כמה ישרים מקבילים לישר a	N	%
1	אף ישר	0	–
2	ישר אחד ויחיד	27	75
3	אינסוף ישרים	2	5 6
4	אי-אפשר לדעת	7	19 4
	סה"כ	36	100%

רוב התלמידים בחרו בתשובה 2 שדרך נקודה P מחוץ לישר a עובר רק ישר אחד ויחיד המקביל לישר a
הופתעתי מהמגוון הרב של נימוקי התלמידים לבחירה בתשובה 2 (כשמונה-עשר במספר).
חילקתי את הנימוקים לשני סוגים עיקריים
1 בחירה בתשובה ללא התנייה וסייגים
2 בחירה בתשובה עם הוספת סייגים.

לוח 2: התפלגות הנימוקים לתשובה מסי 2 במספרים ובאחוזים (קיים רק ישר אחד ויחיד המקביל לישר a)

מהות הנימוק	N	%	פרוט הנימוקים העיקריים
בחירה בתשובה ללא התניות וסייגים	16	59	1 קיים רק ישר אחד ויחיד המקביל ל-a ולא משנה היכן נקודה P נמצאת 2 אם נסרטט ישרים אחרים דרך P הם יחתכו את הישר a 3 חייב להיות מרחק שווה וקבוע בין הישרים 4 ידוע שקווים מקבילים לא נפגשים
הוספת התניות וסייגים	8	30	1 נכון רק אם מדובר במישור 2 במרחב או על פני כדור הם לא יפגשו 3 תלוי אם אפשר להזיז את נקודה P
חוסר ידיעה	3	11	לא ידעו לנמק
סה"כ	27	100	

רק תלמיד אחד טען ש"ידוע שקווים מקבילים לא נפגשים" אף תלמיד לא הזכיר את המושג "אקסיומה" ומשמעותו בנימוקיו

60% מהתלמידים לא התייחסו לבעיית מיקום הנקודה P

רוב התלמידים התייחסו בנימוקיהם לדימוי הויזואלי של הישרים המקבילים

אחוז גבוה יחסית של התלמידים ציין את נכונות התשובה תוך שימת מגבלות וסייגים שונים ייתכן שאפשר לייחס זאת לעובדה שהם זכרו מה שהתרחש בשיעור ההדגמה עם הבלון

סה"כ 7 תלמידים בחרו בתשובה מס' 4 "אי-אפשר לדעת כמה ישרים מקבילים לישר a "

שני הנימוקים העיקריים לבחירה בתשובה זו היו
1 יש סוגים שונים של מישורים עם אפשרויות שונות
2 לא ידוע באיזה מרחב מדובר

רק תלמיד אחד נימק את תשובתו בכך שהגדרת הישר שונה במרחבים שונים ולכן אין אפשרות לדעת

אלות ורעיונות נוספים לפיתוח הנושא

1 האם יש התאמה בין תשובות התלמידים לדף מס' 1 (לפני הפעילות) לתשובותיהם בדף מס' 2 (אחרי הפעילות)?

2 האם יש שוני בתפיסות המושג "מקבילים" בין תלמידים בגילים שונים?

3 האם כדאי ללמד גיאומטריה בגישה כוללת, כלומר ללמד את התלמידים את השיטה האקסיומטית ואת המשפטים הנובעים ממנה בראייה רחבה?

4 האם מציאת הבדלים בין גיאומטריה אוקלידית ללא-אוקלידית מחזקת את הידע בגיאומטריה האוקלידית?

2. שלבים בהתפתחות הגיאומטריה האוקלידית

מקור המלה "גיאומטריה" הוא המלה היוונית גיאומטרין (שמשמעותה "גיאו" – אדמה, "מטרין" – מדידה) מקור הגיאומטריה הוא ככל הנראה מדע מדידת האדמה

הגיאומטריה העתיקה, 1600-2000 לפנה"ס

גיאומטריה זו הייתה אוסף של חוקים והנחות שהתקבלו כתוצאה מנסיונות, התבוננות ואנלוגיות, השערות והבזקי אינטואיציה היה זה מדע אמפירי שבו תשובות חלקיות ונוסחאות קירוב הספיקו לצרכים מעשיים ידוע ש**הבבלים** הסיקו כי היקף המעגל הוא פי 3 מהיקף הקוטר $\pi = 3$ ערך זה נמצא גם בגיאומטריה הסינית הקדומה **המצרים הקדמונים** חישבו את ערך π בקירוב $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right) \approx 31604$ (מתוך הפפירוס של אחמס – נמצא על-ידי רינד) כנראה שהמצרים לא הבדילו בין נוסחאות מדויקות ונוסחאות קירוב, **למשפט מדויק אין תקפות רבה יותר מאשר למשפט קירוב**. חוסר ההבחנה נבע כפי הנראה, מגישתם המעשית של המצרים הקדמונים בנוסף לא הייתה להם מוטיווציה לעסוק בהוכחה והכללה לבבלים היה גם ידע נרחב יותר מהמצרים באלגברה הם ידעו את משפט פיתגורס במשולש ישר זווית הרבה לפני שפיתגורס נולד

תלס איש מילטוס, 546-600 לפנה"ס

תלס היה הראשון ביוון העתיקה שהחל להפוך את הגיאומטריה ממדע שימושי העוסק בבעיות יום-יומיות, למדע שיטתי העוסק בטיעונים כלליים, כשהמשפטים בגיאומטריה נבנים על-ידי הנמקות באופן דדוקטיבי ולא על-ידי ניסוי וטעייה הוא הכיר את שיטות החישוב של המצרים והבבלים שחלקן היה נכון וחלקן שגוי

בנסיונותיו לקבוע מהן התוצאות הנכונות ומהן התוצאות השגויות, פיתח תלס את הלוגיקה בגיאומטריה ואת **הצורך בהוכחה** שהיה רעיון חדש במתמטיקה היוונית

משפט מפורסם שאמר "המופשט והכללי ראויים למחשבה מעמיקה יותר מהאינטואיטיבי והמתקבל על הדעת"

אריסטו אמר על תלס "לגבי תלס, השאלה העיקרית הייתה לא **מה אנו יודעים, אלא כיצד אנו יודעים זאת**"

פיתגורס

השיטה הדדוקטיבית והצורך בהוכחה שהחלו אצל תלס נמשכו במשך כשני דורות אחריו על-ידי פיתגורס הוא הטיף לחיי נצח של הנשמה דרך גלגול נשמות והקים מסדר של מאמינים שעבר טיהור על-פי שיטתו, ניזונו מאוכל צמחוני וחילקו את רכושם במשותף

הפיתגוראים נבדלים משאר מסדרי הדת שהיו קיימים באותו תקופה בכך, שהאמינו כי איחוד נשמותיהם עם האלהים מושגו על-ידי למידת מוסיקה ומתמטיקה

במוסיקה חישב פיתגורס במדויק את היחסים של המרווחים ההרמוניים במתמטיקה הוא לימד את התכונות היפות והמסתוריות של המספרים ספר VII של אוקלידס, "היסודות" מכיל את הטקסט של תאוריית המספרים שאותה למדו בבית הספר הפיתגוראי פיתגורס עסק בבעיות בנייה גיאומטריות מתוך שאיפה לשלמות ודיוק וללא קשר לבעיות יום-יומיות

על-פי פיתגורס, היקום כולו הוא יצירת אלהים מושלמת וככזו הוא מורכב מגופים משוכללים כיסודות אפשר להבין את ההלם הגדול שאחז בפיתגוראים כאשר גילו, כי לא כל אורך אפשר לתארו כמנה של שלמים (מספר רציונלי) בתחילה הם ניסו לשמור בסוד את הגילוי, כפי שמתאר ההיסטוריון פקורלוס "רווחה השמועה שהאדם הראשון שהשמיע בפומבי את התיאוריה על האירציונלים נעלם בתוך שברי ספינה שטבעה כד

שהלא-מושג והלא-מובן לא יתגלה לעולם" (Greenberg 1980, עמ' 8)

היפוקרטס, 400 לפנה"ס

הביסוס השיטתי של הגיאומטריה של המישור שבוצע על-ידי הפיתגוראים סוכם בספרו "היסודות" של המתמטיקאי היפוקרטס למרות שרוב ספרו נעלם, אפשר לומר, שספרו מצוי בכרכים V-IV בספר "היסודות" של אוקלידס, שהופיע כמאה שנה אחריו בכרך V הצליח אוקלידס לפתח את תיאוריית הדמיון והיחס

אפלטון, 387 לפנה"ס

המאה הרביעית לפני הספירה ביוון מאופיינת בשגשוג רעיוני שהתפתח באקדמיה של אפלטון למדע ולפילוסופיה

בספרו "הרפובליקה" כתב אפלטון **"לימוד המתמטיקה מפתח ומכניס מכניזם מחשבתי שהוא בעל ערך גבוה יותר מאלף עיניים, משום שרק בדרך זו האמת יכולה להיתפס בהכרה".**

אפלטון חשב שהעולם האידיאלי חשוב יותר מהעולם המוחשי הנתפס בחושים, והוא רק צילו של העולם האידיאי העולם המוחשי הוא כמערה חשוכה שעל קירותיה הכהים אפשר לראות רק את הצללים של האמת, בעוד שהשמש והאור נמצאים בחוץ **השגיאות הנעשות על-ידי החושים חייבות להיות מתוקנות על-ידי ריכוז מחשבתי שאותו אפשר ללמוד באופן הטוב ביותר על-ידי לימוד מתמטיקה.**

אוקלידס – ספר "היסודות", 306 לפנה"ס

אוקלידס היה בוגר בית ספרו של אפלטון לאחר מות אלכסנדר מוקדון ירדה האימפריה היוונית מגדולתה ובערך בשנת 300 לפה"ס עברה השליטה על מצרים לידי השליט פטולמי הראשון אחת מפעולותיו הראשונות, תוך כדי שיקום מצרים, הייתה הקמת האקדמיה באלכסנדריה שאליה הוזמנו טובי המורים באותה עת אחד המורים היה אוקלידס שחיבר את ספרו "היסודות" באותה תקופה הספר הכיל כשלושה-עשר כרכים, שכללו את כל הידע במתמטיקה שהיה ידוע עד אותה עת

כרכים 1-4, 7, ו-9 הכילו את תורת הפיתגוראים (Pythagoreans),

כרכים 5, 6, 9 הכילו את תורת אודוקסוס (Eudoxus),

כרך 8 – את ידיעותיו של ארכיטאס (Archytas),

וכרכים 10, 13 הכילו את ידיעותיו של תיאיטטוס (Theaetetus)

בניגוד לדעה הרווחת, הספר מכיל, נוסף על חלק העוסק בגיאומטריה, חלקים גדולים מתורת המספרים שהייתה קיימת באותה תקופה ובה כמה משפטי מפתח כמו כן הכיל הספר את תורת היחס והדמיון שהייתה תקפה גם לגדלים אי-רציונליים (פותחה על-ידי אודוקסוס)

ספר זה הוא הפופולרי והנקרא ביותר, אחרי התנ"ך גישתו של אוקלידס לגיאומטריה שולבה בלימוד הנושא במשך יותר מאלפיים שנה

הספר מתואר בספרות המודרנית כשורש המהפכה שהתרחשה במתמטיקה של המאה ה-19 במהפכה זו עשו שימוש בשיטה האקסיומטית שפיתח אוקלידס הכוונה כאן לאופן שבו אסף אוקלידס את כל האינפורמציה שהייתה קיימת בזמנו **ולשיטה האקסיומטית שאותה המציא ושבעזרתה נראה הקיים בדרך חדשה** למתמטיקאים בעידן המודרני עקרונות האירגון והשיטה האקסיומטית הם בעלי משמעות גדולה יותר מהתוכן הגיאומטרי של ה"יסודות"

לסיכום, אפשר לציין, כי הספר לא שימש, בזמנו של אוקלידס, כספר ללימוד מתמטיקה, ובוודאי שלא שימש להוראת הגיאומטריה לנוער מטרת הספר "היסודות" הייתה בניית מבנה דדוקטיבי, עיוני, לשם אימון שכלי כל זה כהכנה לקראת הוראת הפילוסופיה, כנהוג באקדמיה של אפלטון

3. השיטה האקסיומטית

השיטה האקסיומטית היא שיטה להוכיח נכונות של תוצאות ההוכחות מאשרות את נכונות התוצאות ובמקרים רבים מכלילות אותן לדוגמה, המצרים הקדמונים וההודים ידעו, שאם למשולש יש צלעות שאורכן 3, 4, 5 יחידות כי אז הוא משולש ישר זווית לעומת זאת, היוונים **הוכיחו** שאם למשולש יש צלעות באורך a, b, c ומתקיים השוויון $a^2+b^2=c^2$, כי אז המשולש הוא ישר זווית

אלפי נסיונות יידרשו כדי לבדוק תוצאה זו, מה עוד שכל בדיקה ומדידה היא לא מדויקת, אלא נעשית בקירוב מסוים ההוכחה מאפשרת תובנה והבנה של קשרים בין דברים שונים שאנו לומדים, ומכריחה אותנו לארגן את הרעיונות בדרך קוהרנטית אפשר לסכם את השיטה של אוקלידס במשפט אחד

איסוף הידיעות המתמטיות ועריכתן מחדש, כאשר הסקת המסקנות נעשית בדרך דדוקטיבית-לוגית מתוך הנחות מוסכמות מראש, בניגוד להסקת מסקנות מהכללה של מספר תצפיות.

לשיטה אקסיומטית כלשהי יש שתי דרישות בסיסיות

1 **קבלת מספר הנחות נכונות מראש** אלה נקראות אקסיומות (axiom או postulate) אחרות נגררים למעגל סגור שבו משפט מוצדק על-ידי משפט אחר הדורש הצדקה וחוזר חלילה

2 **הסכמה על השיטה שבעזרתה נקבעת ההנחה הבאה מההנחות הקודמות כנכונה, בעזרת חוקי הלוגיקה.**

בנוסף, קיימת דרישה מובנת מאליה והיא **שימוש בשפה אחידה – החסכמה על פירוש המלים והמושגים שבהם משתמשים** בשיטה האקסיומטית כדי שהמושגים והמלים יהיו מובנים לכולם. יש צורך בהגדרות מעניין שדווקא החלק החלש ביותר בגיאומטריה של אוקלידס הוא ההגדרות. אוקלידס ניסה להגדיר את הכול. הוא לא קיבל, שייתכן מושג שאינו מוגדר וכך הגדיר נקודה – "דבר שאין לו חלק" קו – "אורך ללא רוחב"

כיום נהוג לקבל את המושגים "נקודה" ו"קו" כמושגי יסוד שאינם מוגדרים, ובעזרתם להגדיר את כל שאר המושגים. ברור, כי כמו בהנחות היסוד (אקסיומות), גם ההגדרה מובילה למושגים שצריך לקבלם כמושגי יסוד

אוקלידס קיבל חמישה הנחות יסוד (אקסיומות) ללא הוכחה, ובעזרתן הסיק, בדרך דדוקטיבית ולוגית, כ-465 משפטים שחלקם הגדול מסובך ואינו אינטואיטיבי. יכולתו המופלאה הייתה בכך שבדרך לוגית, **הוא הצליח להסיק כל כך הרבה מכל כך מעט.**

אוקלידס השתמש בסירטוטים ובהמחשות כדי לקבל מסקנות אינטואיטיביות, אבל בנסחו את המשפטים והוכחתם הוא הסתמך אך ורק על האקסיומות ועל כללי הוכחת המסקנות על-ידי חוקי הלוגיקה

ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס הן:

1 אפשר למשוך ישר מנקודה נתונה אל נקודה אחרת
2 אפשר להאריך, ללא הגבלה, קטע של ישר
3 אפשר לחוג סביב נקודה נתונה (מרכז) מעגל העובר דרך נקודה נתונה אחרת
4 ככל הזוויות הישרות שוות זו לזו

בנוסף, קיבל אוקלידס כמה תפיסות מקובלות מתורת ההיגיון ותורת הגדלים

1 $a = c$ ו-$b = c$ אז $a = b$ "מה ששווה לאותו גודל שלישי שווה גם זה לזה"
2 $b = c$ ו-$c = d$ אז $a + c = b + d$ "בהוסיפנו שווה על שווה נקבל שווה"
3 $a = b$ ו-$c = d$ אז $a - c = b - d$ "בחסרנו שווה משווה נקבל שווה"
4 "השלם גדול מחלקו" $a > a - b$ $(a > b, b > 0)$
5 "מה שחופף הוא שווה" (תפיסה פחות ברורה, המרמזת על תנועה)

הצורך לביסוס הגיאומטריה באופן שיטתי וחסר סתירות העסיק את טובי המוחות בכל הדורות מאז פירסום ספרו של אוקלידס "היסודות" מחקר זה קרוי היום "האקסיומטיקה של הגיאומטריה" והדמות המרכזית בביסוסו בעת החדשה הוא דייויד הילברט (David Hilbert 1862-1943), אשר בספרו "יסודות הגיאומטריה" (1899) העמיד את הגיאומטריה על מערכת אקסיומות ודן במסקנות הנובעות ממנה. הילברט בנה את הגיאומטריה תוך הסתמכות על מספר "מושגי יסוד" שאינם מוגדרים ועל חמש קבוצות של אקסיומות, המקשרות ביניהם

4. ההיסטוריה של אקסיומת המקבילים

כפי שנאמר בפתיחת רשימה זו, אותה מחשבה אינטואיטיבית שאפשר להוכיח את אקסיומת המקבילים של אוקלידס (להלן תיקרא "האקסיומה החמישית"), מחשבה הקיימת בקרב התלמידים כיום, הייתה שלטת במשך שנים עד תחילת המאה ה-19. גילוי הגיאומטריה הלא-אוקלידית עזר באופן פרדוקסאלי להבין טוב יותר את הגיאומטריה האוקלידית

בסקירה זו נתאר בקצרה את נסיונותיהם של המתמטיקאים הבולטים בכל תקופה להוכיח את האקסיומה החמישית. על מתמטיקאים נוספים ופירוט ההוכחות המוזכרות כאן אפשר לקרוא בספרו של Greenberg (1980), עמ' 119-139

עד ראשית המאה ה-19 נראו ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס ברורות כל-כך עד שלא היה אפשר להטיל בהן ספק בניגוד לאקסיומה החמישית

מצד אחד, האקסיומה החמישית היא יותר מורכבת מאשר האקסיומות הראשונות ונראה שאפשר להוכיחה כמשפט הנובע משאר ארבע האקסיומות, מצד שני, יש הרגשה שביטולה הוא בניגוד ל"שכל הישר"

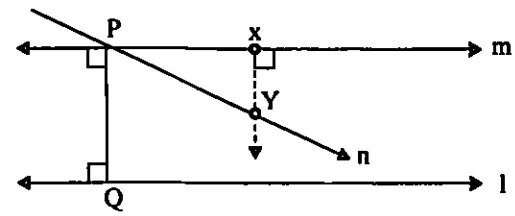
אלברט איינשטיין חיווה דעתו על ה"שכל הישר" "השכל הישר הוא למעשה לא יותר מאשר שכבות של תחושות והנחות שהופנמו ואוכסנו בזיכרון וברגשות בעיקר לפני גיל 18" העובדה שאוקלידס בעצמו לא סמך על האקסיומה החמישית נראית בכך שהוא דחה את השימוש בה בככל האפשר עד למשפט ה-29 שלו

פרוקלוס (Proclus), 410-485 לספירה

ספר זכרונותיו של פרוקלוס הוא אחד ממקורות המידע העיקריים של הגיאומטריה היוונית. פרוקלוס מבטא את דעתו על האקסיומה החמישית כך "זאת, צריכה להיות מוצאת מהאקסיומות האחרות, כיוון שזה משפט קשה מאוד להוכחה שגם תלמי בספר מסוים ניסה בעצמו להוכיחה. **הטענה, ששני ישרים המוארכים ללא הגבלה בסופו של דבר נפגשים, היא אפשרית אך לא הכרחית"**. פרוקלוס מביא דוגמה נגדית: פרבולה המתקרבת באסימפטוטה שלה אך לעולם אינה חותכת את הצירים

הניסיון הראשון הידוע לנו להוכחת האקסיומה החמישית נעשה על-ידי **תלמי** (Ptolemy). למעשה, הוא הסיק בהוכחתו את האקסיומה של הילברט מבלי שהיה מודע לכך, שהיא השקולה לאקסיומה החמישית. בעצם, הוא הניח נכונות של דבר שרצה להוכיחו, ולכן הוכחתו היא מעגלית ושגויה

גם פרוקלוס ניסה להוכיח את האקסיומה החמישית כמשפט וכך הוכיח



נתון: $\ell \| m$, n ישר החותך את הישר m בנקודה P

צ"ל: הישר n חותך גם את ℓ

הוכחה: נבנה בניית עזר $\overrightarrow{QP} \perp \ell$, $\overrightarrow{QP} \perp m$

אם n מתלכד עם QP, אז הוא חותך את ℓ וסיימנו

אחרת, הקרן $\overrightarrow{PY}$ שעל הישר n נמצאת בין $\overrightarrow{PQ}$ ל- $\overrightarrow{PX}$ (X נקודה על הישר m)

נניח, ש- $\overrightarrow{XY} \perp m$ ככל שנקודה Y נעה מ-P על הישר n בתנועה אינסופית ובהתמדה, כך הקטע $\overrightarrow{XY}$ גדל באופן אינסופי עד שלבסוף הוא יהיה גדול יותר מאשר קטע $\overrightarrow{PQ}$

מכאן נובע, שנקודה Y חייבת לעבור את הישר ℓ לצידו השני, ומכאן שישר n חותך את ℓ

(מש"ל)

החלק האחרון בהוכחה של פרוקלס הוא המעניין ביותר ומשלב תנועה והתמדה כמו-כן, כל צעד בהוכחתו הוא נכון על-פי חוקי הלוגיקה, לכן נשאלת השאלה האם זו הוכחה של האקסיומה החמישית [1]

הוכחה זו מדגישה את המורכבות של ההגדרה של "מקבילים" זאת בניגוד לתפיסה האינטואיטיבית של קווים מקבילים, שאפשר לדמותם לפסי רכבת שמרחקם זה מזה הוא שווה בכל נקודה ונקודה אין איזכור לתפיסה זו באקסיומה החמישית ולמעשה זה נכון רק בגיאומטריה האוקלידית

לכן, מעצם ההגדרה עצמה, אנו יודעים שאין לשני הישרים המקבילים נקודת חיתוך משותפת, אך אי-אפשר להניח מראש שבכל נקודה ונקודה מרחקם שווה.

[1] אי נכונות ההוכחה של פרוקלוס נובעת מהעובדה שמסקנתו שגויה תיתכן הוספת גדלים אינסופית המתכנסת לגבול מסוים שהוא תמיד פחות מ-1 לדוגמה סדרת המספרים $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},$

נאסר א-דין (Nasiraddin), 1274-1201

האסטרונום והמתמטיקאי הפרסי ניסה גם הוא להוכיח את האקסיומה החמישית, אך נכשל כי בכמה מהנחותיו היו שגיאות

ג'ון ואליס (John Wallis), 1703-1616

ואליס ניסה להוכיח את האקסיומה החמישית על-ידי החלפתה באקסיומה חמישית שונה, הקשורה לדמיון משולשים ביחד עם ארבע האקסיומות הראשונות הוא ניסה להוכיח את האקסיומה החמישית כמשפט הנובע מהן למעשה, אין לקבל את האקסיומה של ואליס כהנחת יסוד טובה יותר מזו של אוקלידס, כי מבחינה לוגית היא שקולה לה ואליס השתמש במה שצריך להוכיח כטיעון נסיונות נוספים נעשו מאוחר יותר על-ידי המתמטיקאים לז'נדר (Legendre) וולפגנג (פרקש) בויאי (Wolfgang [Farkas] Bolyai), אך גם בהם נמצאו הנחות שגויות במהלך ההוכחה.

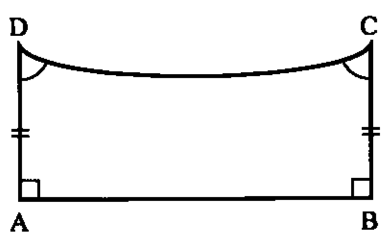
ג'ירולאמו סאקרי (Girolamo Saccheri), 1733-1667

סאקרי היה נזיר שלפני מותו הספיק לפרסם ספר קטן המציג את עבודתו ספר זה התגלה כמאה וחמישים שנה לאחר מכן על-ידי בלטרמי (Beltrami) שפירסם אותו

סאקרי השתמש בטיעון הידוע מחוקי הלוגיקה היוונית "a reductio ad absurdum" (הוכחה בדרך הסתירה) האומר שאם משפט נובע ממשפטים קודמים, אז שלילת המסקנה של המשפט חייבת להביא לסתירה

לפיכך, כדי להראות שהאקסיומה החמישית נכונה, סאקרי שלל את המסקנות הנובעות מהאקסיומה החמישית ורצה להגיע לסתירה

נושא עבודתו העיקרית היה המרובעים, הקרויים על שמו "Saccheri quadrilaterals"



בבסיס המרובעים שתי זוויות ישרות ותצלעות הנגדיות מצידי זוויות הבסיס חופפות זו לזו קל להוכיח ששתי הזוויות הנותרות שוות וחופפות לו לזו

$\angle C \cong \angle D$ (על-פי חפיפת משולשים)

לכן יש שלוש אפשרויות לגבי הסכום של שתי זוויות אלה

1. הסכום של $\angle D$ ו- $\angle C$ שווה ל-180°
2. הסכום של $\angle D$ ו- $\angle C$ גדול מ-180°
3. הסכום של $\angle D$ ו- $\angle C$ קטן מ-180° (הוגדרו בספרו של סאקרי כ"אקוטיות")

סאקרי הוכיח שהאפשרות הראשונה מתקיימת בגיאומטריה האוקלידית. הוא ניסה להראות שהוכחת שני המקרים הנותרים מובילה לסתירה.

בהוכחת האפשרות השנייה הוא קיבל סתירה עם המשפט "סכום הזוויות בכל מרובע קעור הוא קטן או שווה ל-360°" (משפט סאקרי לז׳נדר). סתירה זו הובילה לסתירה עם המשפט בגיאומטריה האוקלידית "סכום שתי צלעות במשולש גדול תמיד מהצלע השלישית".

לעומת זאת, בנסותו להוכיח את האפשרות השלישית קיבל סאקרי תוצאות שונות, אך לא הגיע לסתירה. בהיותו משוכנע בנכונות האקסיומה החמישית ובתיסכולו הגדול הוא סיכם "הוכחת האפשרות השלישית מובילה לסתירה עם האקסיומה החמישית **מאחר שטבעה גורר את קיומו של קו הסותר את טבעו של הקו הישר".**

למעשה, סאקרי היה הראשון שעלה על רעיון הגיאומטריה הלא-אוקלידית, אבל היותו שבוי באמונה, שהאקסיומה החמישית אי-אפשר לערערה, מנעה ממנו לראות ולהבין את גדולת גילויו. במשך הזמן היו הרבה נסיונות כושלים להוכיח את האקסיומה החמישית. בשנת 1763 הגיש קליגל (G S Klugel) כעבודת דוקטורט את ניתוח הטעויות שנעשו ב-28 נסיונות שונים להוכחת האקסיומה. לדעתו קיים ספק גדול אם אי פעם תיתכן הוכחתה. כמשפט האנציקלופדיסט והמתמטיקאי הצרפתי ד׳אלמברט (J L R d'Alembret) כינה את האקסיומה החמישית "השערוריה של הגיאומטריה". גם לז׳נדר בשנת 1823 נוכח בטעות שעשה כשניסה להוכיח את האקסיומה.

למעשה, המתמטיקאים של אותה תקופה נואשו מלחפש דרך חדשה להוכיח אקסיומה זו. ביטוי יפה לרוח אותה תקופה מובא במכתבו של ההונגרי וולפגנג (פרקש) בויאי לבנו: "עליך לחדול מנסיונותיך לגבי המקבילים. אני מכיר דרך חתחתים זו היטב לאחר לילות כימים שבהם נעלמה חדוות החיים שלי, אני מפציר בך׳ עזוב את מדע המקבילים לנפשו. אני חשבתי שאקריב את עצמי למען מציאות אמת. הייתי מוכן להפוך לקדוש המעונה שיסיר את הטעות מהגיאומטריה ויהפכה למזוככת עבור האנושות. לאחר כל נסיונותיי והישגיי עד כה לא הצלחתי ואני מרחם על עצמי ועל כל האנושות. לכן אני מודה שאני מצפה למעט מאוד מכל נסיונותיך. נראה לי שכבר הפלגתי באותם מקומות, עברתי אותם מכשולי גיהנום של ים המוות ותמיד חזרתי עם תורן שבור ומפרש קרוע, תוך הסתכנות באיבוד שמחת החיים שבי" (Greenberg 1980, עמ׳ 127-128)

אבל בויאי הצעיר לא נרתע ממכתב זה ובשנת 1823 כותב מכתב תשובה לאביו:

" בעת זו החלטתי הסופית לפרסם את עבודתי על המקבילים בהזדמנות הראשונה שתקרה בדרכי, ברגע שאסיים לארגן את החומר. כרגע אינני יכול להגיד דבר פרט לכך, **שמשום דבר יצרתי יקום חדש ומוזר**. כל מה שכתבתי לך בעבר נחשב כבניין קלפים בהשוואה למגדל הטירה שבניתי. אני בטוח שגילויי אלה יביאו לי כבוד אם אסיים לכתבם"

5. הגילוי של הגיאומטריה הלא-אוקלידית

"Out of nothing I have created a strange new universe "

(יוהאן בויאי Bolyai Johann).

יוהאן בויאי פרסם את עבודתו בנספח לספרו של אביו שיצא בשנת 1831 ("Tentamen"). אביו שלח בהתלהבות עותק מספרו לידידו משכבר הימים, המתמטיקאי הגרמני המפורסם גאוס. גאוס נחשב בעיני בני דורו למתמטיקאי הראשון בשורת המתמטיקאים של זמנו, והיכרותו עם אביו של יוהאן בויאי החלה שלושים וחמש שנה מוקדם יותר כשלמדו שניהם באוניברסיטת גוטינגן. לכן אפשר לתאר את האכזבה הגדולה שאחזה את בויאי האב בקבלו את תשובתו של גאוס לעותק של הספר ששלח לו. המכתב הדהים גם את בויאי הצעיר. תשובתו של גאוס הייתה כדלקמן:

"אם אפתח ואומר שאינני מסוגל לשבח את עבודתו של יוהאן בויאי, בוודאי תופתע ברגע הראשון. אך אינני יכול לומר אחרת. לשבח עבודה זו משמעו, למעשה, לשבח את עצמי, מאחר שכל התוכן של עבודה זו, המסלול שבחר בנך, המסקנות שאליהן הגיע, מתלכדות כמעט לחלוטין עם מחשבותיי, שהעסיקוני במשך שלושים וחמש השנים האחרונות" (Bonola 1995, עמ׳ 100)

בהמשך הוא מוסיף שהוא לא התכוון לפרסם את עבודתו מאחר שמעט מדי אנשים מבינים אותה. למרות המחמאה, בסוף מכתבו של גאוס על רמת עבודתו, בויאי הצעיר חש נבגד, ושקע בדיכאון. הוא לא התאושש מתשובתו של גאוס ולא פרסם יותר דבר בנושא.

ק׳פ׳ גאוס (Carl Friedrich Gauss), 1777-1855

קיימת הוכחה לכך שגאוס חזה מספר מתגליותיו של יוהאן בויאי. למעשה עבד גאוס על הגיאומטריה האוקלידית משנת 1722, בהיותו בן 15. במכתבו משנת 1824, למתמטיקאי אחר שניסה לחקור את תיאוריית המקבילים, הוא כתב:

" ההנחה שסכום הזוויות במשולש הוא פחות מ-180°, מובילה לגיאומטריה מוזרה ומעניינת, השונה לגמרי מהגיאומטריה שלנו (האוקלידית). למרבה הפלא היא עקבית בצורה זו, שאפשר לפתור כל בעיה באמצעותה. כל נסיונותי לגלות בגיאומטריה זו סתירה וחוסר עקביות הסתיימו בכישלון. הדבר היחיד הסותר

את תפיסתנו הוא שאם גיאומטריה זו נכונה, חייב להימצא במרחב גודל ליניארי המוגדר בפני עצמו אך לא ידוע לנו נראה לי, שלמרות התרברבותם של המטה-פיסיקאים, איננו יודעים כמעט דבר על טבעו האמיתי של המרחב **לכן אין אנו יכולים לשלול לחלוטין אפשרות הנראית לנו כבלתי אפשרית** אין בלבי ספק, כי רק אדם בעל הבנה מתמטית מעמיקה יוכל להבין את הגיאומטריה הזו אבקשך לשמור התכתבות זו בינינו בלבד ולא לתת לה פרסום בשום אופן ייתכן כי אם יהיה לי זמן פנוי בעתיד, אפרסם את תוצאות מחקרי זה"

מחלקו האחרון של המכתב עולה כי למרות מעמדו הבלתי מעורע של גאוס כמתמטיקאי הראשון במעלה באותה תקופה, הוא חושש לפרסום תגליותיו אלה ייתכן שלא רצה להיגרר לפולמוס ציבורי עם אגודת ה-Boeotians (אנשים שהתנגדו בתוקף לרעיונות החדשים של גאוס ורימן), או שייתכן שבשאיפתו לשלמות החליט לא לפרסם את תוצאותיו עד שתהיה בידיו עבודה מושלמת

ניקולאי איבנוביץ לובצ׳בסקי (N.I. Lobachevsky), 1792-1856

לובצ׳בסקי היה הראשון שפרסם מאמר הדן בגיאומטריה הלא-אוקלידית (1829) פרסומו הראשון משך מעט מאוד תשומת לב בשל העובדה שהוא פורסם ברוסית ואף זכה לביקורת קשה מקוראיו לובצ׳בסקי עלה מסטודנט באוניברסיטה של קאזן ברוסיה עד לדרגת פרופסור בשנת 1927 הוא נבחר לרקטור, משרה שהחזיק במשך כ-19 שנה בשנת 1846 הוא פוטר ממשרתו באוניברסיטה, למרות תרומתו הרבה כמרצה וכאדמיניסטרטור את ספרו האחרון הוא נאלץ להכתיב, מכיוון שאיבד את מאור עיניו הספר יצא לאור כשנה לפני מותו רק לאחר מות גאוס, בשנת 1855, החלו מתמטיקאים להתייחס ברצינות לגיאומטריה הלא-אוקלידית ביניהם אפשר למנות את בלטרמי (Beltrami), קליין (Klein), פואנקרה (Poincaré) ורימן (Riemann) שהרחיבו את הנושא, הבהירו אותו וגם יישמו אותו בענפים אחרים של המתמטיקה, בעיקר בתיאוריית הפונקציות המורכבות

בעיני רבים נחשב לובצ׳בסקי למייסד הגיאומטריה הלא-אוקלידית היות שהוא פיתח אותה בפירוט רב ואומנם, לעתים, מכנים אותה על שמו – "הגיאומטריה של לובצ׳בסקי"

כאנקדוטה אפשר לספר, שבשנת 1848 הגיעה לאוזני י׳ בויאי הידיעה על עבודתו של לובצ׳בסקי דרך העתק מכתב של גאוס לאביו כעסו של י׳ בויאי על גאוס הוצת מחדש, היות שלדעתו, ההסבר היחיד לדמיון עבודתו של לובצ׳בסקי לשלו הוא, שגאוס מסר את עבודתו ללובצ׳בסקי, וזה הציגה כשלו למרות זאת, אין בסיס להנחה זו של בויאי הניסיון של לובצ׳בסקי ובויאי להוכיח את נכונות האקסיומה החמישית דומה במידה מסוימת לנסיונו של סאקרי החוק הלוגי שהשתמשו בו היה הטענה ש-A גורר את B, שקולה לטענה שלא-A גורר את לא-B הם הניחו ששלילת האקסיומה החמישית תוביל לסתירה או לאבסורד ולכן אפשר להוכיחה

ננסה לתאר בקצרה את מהות הגיאומטריה הלא-אוקלידית הנחת שלילת האקסיומה החמישית של אוקלידס מובילה לשתי אקסיומות חלופיות

(S) דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון **לא עובר אף ישר מקביל** לישר נתון

גיאומטריה זו קרויה בשם "גיאומטריה ספיראלית" (Spiral Geometry)

המתמטיקאים שפיתחו גיאומטריה זו הם רימן, פואנקרה

(H) דרך נקודה מחוץ לישר נתון אפשר להעביר **אינסוף ישרים המקבילים** לישר הנתון

גיאומטריה זו קרויה בשם "גיאומטריה היפרבולית" (Hyperbolic Geometry), או הגיאומטריה של לובצ׳בסקי

המתמטיקאים שפיתחו גיאומטריה זו הם גאוס, י׳ בויאי, לובצ׳בסקי, קליין

תיאור מערכת האקסיומות והמושגים

בגיאומטריה אוקלידית יש צורך לשנות חלק מארבע האקסיומות של כדי למנוע סתירה פנימית במערכת

לדוגמה

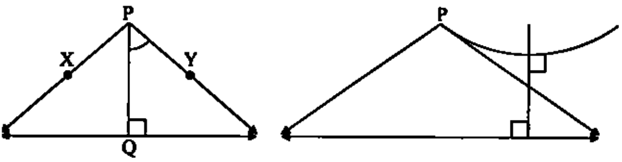
"בין שתי נקודות עוברים אינסוף ישרים"

יש להוסיף מערכת אקסיומות של הפרדה במקום מערכת האקסיומות של רצף

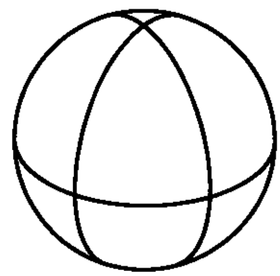
המושג "ישר" מתואר באופן שונה מאשר בגיאומטריה האוקלידית

בגיאומטריה זו, שאר האקסיומות של אוקלידס נשארו ללא שינוי יחד עם זאת, היה צורך להגדיר מושגי יסוד חדשים הקשורים באקסיומת המקבילים (H) "ישר חותך", "ישר מפריד", "ישר היפרבולי", "זווית הקבלה"

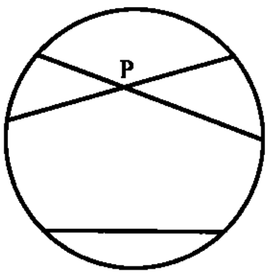
"משולש אסימפטוטי"



מודל להמחשה כדור, ספיראלה



מודל להמחשה:



יחד עם זאת, הראו פואנקרה וקליין שקיימים מודלים היפרבולים במישור האוקלידי. מודולים אלו מתקיימים ללא סתירות פנימיות

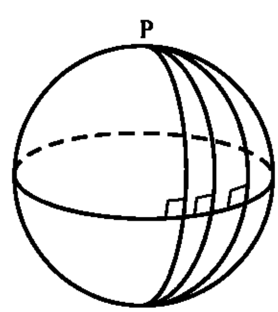
להלן מספר משפטים בגיאומטריה הלא-אוקלידית:

בגיאומטריה על-פני כדור

1 סכום הזוויות במשולש גדול מ- 180°

2 זווית חיצונית למשולש גדולה או שווה לכל זווית פנימית במשולש שאינה צמודה לה

3 מנקודה מחוץ לישר נתון אפשר להעביר אינסוף ישרים מאונכים לישר הנתון



בגיאומטריה היפרבולית

1 סכום הזוויות קטן או שווה ל- 180°

2 סכום הזוויות במרובע סאקרי קטן מ- 360°

3 זווית חיצונית למשולש קטנה או שווה לכל זווית פנימית במשולש שאינה צמודה לה.

דף מספר 1 - פעילות לתלמיד

הנחיות:
סמן את האפשרות הנראית לך ביותר מבין התשובות הבאות לבעיה נמק את תשובתך (אפשר לסמן יותר מאפשרות אחת)

נתון: ישר a ונקודה P שאיננה נמצאת על הישר
הבעיה: כמה ישרים מקבלים לישר a אפשר להעביר דרך הנקודה P?
תשובה:

א אף ישר
נמק (הסבר)____________________________

ב ישר אחד ויחיד
נמק (הסבר)____________________________

ג אינסוף ישרים
נמק (הסבר)____________________________

ד אי-אפשר לדעת
נמק (הסבר)____________________________

דף מספר 2 - פעילות לתלמיד

הנחיות:
א לפניכם סדרת אכסיומות ומשפטים שנכתבו על-ידי אוקלידס בספרו ה"יסודות"
ב בדקו, בעזרת שימוש בבלון, האם אכסיומות ומשפטים אלה מתקיימים על פני כדור
ג במידה ולא, רישמו דוגמה נגדית ונמקו מדוע, לדעתכם, האכסיומה או המשפט אינו מתקיים

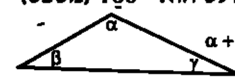
בגאומטריה של המישור על-פי אוקלידס מתקיים:

1 ישר הוא מושג יסוד, ותאורו הוא

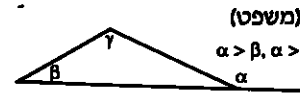
2 דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד (אכסיומה ראשונה)

3 מנקודה P מחוץ לישר a עובר רק ישר מקביל אחד ויחיד ל-a (אכסיומה חמישית)

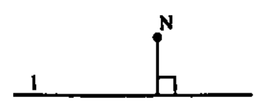
4 סכום הזוויות בכל משולש הוא $180°$ (משפט)



5 זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית במשולש שאינה צמודה לה (משפט)



6 מנקודה כלשהי מחוץ לישר אפשר להעביר רק אנך אחד ויחיד לישר (משפט)



בגאומטריה על פני כדור מתקיים:

1 ישר מוגדר כמסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות שהוא חלק מקו הבנוי מנקודות על פני הכדור הנמצא במישור שעובר דרך מרכז הכדור

2 דרך שתי נקודות____________________________

3 מנקודה P מחוץ לישר a ____________________________
____

4 סכום הזוויות בכל משולש הוא______________________

5 זווית חיצונית
למשולש____________________________

6 מנקודה כלשהי מחוץ לישר אפשר להעביר________________

רשימת ספרות

Beck, A , M A Bleicher and D W Crowe [1969] *Excursions into Mathematics* Worth Publishers, University of Wisconsin, New York (pp 213-314)

Greenberg, M J [1980] *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History* San Francisco, W H Freeman U S A

Bonola, R [1955] *Non-Euclidean Geometry* New York, Dover

Harold, R Jacobs [1974] *Geometry* San Francisco, W H Freeman

האוניברסיטה הפתוחה [1978] **הגיאומטריה האוקלידית** יחידה 10

הדס, נ' [1994] **גישות להוראת הגיאומטריה** מתוך הרצאה למנחי מורים קבוצת המתמטיקה, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן, רחובות