

טופולוגיה מהי? (דיאלוג)

א' ג' שויץ

האוניברסיטה העברית בירושלים

מאמר זה הופיע לראשונה בשנות החמישים בכתב עת למורי המתמטיקה, והוא מתפרסם כאן כלשונו

הקדמה

הדיאלוג, דיאלוג בין תלמיד בית ספר תיכון (ת') לבין חברו בוגר האוניברסיטה (ב'), אין כוונתו לחדש בתוכנו המדעי, ב"חומר" הנכלל בו הדיאלוג בה להוכיח, שאחדים מהראיונות העומדים ביסוד בניין המתמטיקה, על אף היותם מופשטים יותר מ"חומר" הלימודים הרגיל, עשויים להיות מובנים לתלמיד בבית הספר התיכון, ועשויים לעניין אותו רבים הם המורים הנוהגים לגוון את שיעוריהם בפרפראות שאינן לקוחות מ"חומר" החובה יש לקדם נוהג זה בברכה, אך כדאי להשלימו על-ידי שיעורים העוסקים במבנה המדע המתמטי ובאינפורמציה על הנעשה בו בימינו

ת' אולי תוכל לאמר לי מה זה "טופולוגיה"? קראתי בעיתון שמתמטיקאי ידוע בא להתארח בארץ ולקיים סדרת הרצאות על טופולוגיה אני מתאר לעצמי שזה מדע חדש המשתמש בשיטות מתמטיות, לכן אני מקווה שאתה כבר שמעת על זה ותוכל לענות לי

ב' אני חושב שאוכל למלא את בקשתך ולהסביר לך במה עוסק מדע זה הוא באמת מדע די צעיר, כפי שניחשת, אך לא הייתי אומר שהטופולוגיה "משתמשת בשיטות מתמטיות", כדוגמת הפיסיקה והאסטרונומיה הטופולוגיה היא עצמה חלק מהמתמטיקה, ואפילו חלק חשוב ומעניין

ת' אם כך, אני חושש שלא אבין הרבה גם אם תסביר לי אם זו מתמטיקה גבוהה, בוודאי, צריכים לדעת דיפרנציאלים לשם כך

ב' אתה טועה לא כל ענפי המתמטיקה ה"גבוהה" הם המשך של החשבון הדיפרנציאלי במעט סבלנות תוכל להבין מהי טופולוגיה, ומה מקומה בין חלקי המתמטיקה השונים אם אתה פנוי, אשמח אם תלווה אותי, ואוכל להתחיל מיד בהסבר

ת' טוב מאוד אני מקווה שבאמת אבין משהו

ב' נראה אני מעדיף לא להתחיל מיד בטופולוגיה, אלא להקדים כמה מלים בדבר חלוקת הגיאומטריה לענפיה השונים, כי הטופולוגיה גם היא ביסודה מקצוע גיאומטרי אתה בוודאי מכיר את הגיאומטריה האוקלידית של המישור

ת' כן אצלנו קראו לזה פלנימטריה

ב' נכון ובכן, כיצד היית מסביר במה עוסקת הפלנימטריה?

ת' אפשר לומר שהפלנימטריה עוסקת בתכונות של צורות גיאומטריות במישור

ב' יפה, אך אולי תוכל להבהיר את המושגים שבהם השתמשת על-ידי כמה דוגמאות

ת' בבקשה המשולש, למשל, הוא צורה גיאומטרית, ויכולת להיות לו תכונות כגון זווית ישרה, שוקיים שוות, צלע שאורכה ארבע יחידות

ב' נכון מאוד הזווית הישרה, השוקיים השוות או הצלע בעלת אורך מסוים – כל אלה הם דוגמאות לתכונות שבהן עשוי משולש להיבדל מחברו כעת אראה לך שיש לתכונות אלו דבר משותף אם נקח משולש ישר-זווית, נסובב אותו ונזיז אותו ממקומו, הוא יישאר משולש ישר-זווית משולש שווה-שוקיים – גם הוא יישאר שווה-שוקיים אחרי הזזה או סיבוב בקיצור, כל הדוגמאות שהבאת הן תכונות הנשמרות בשעה שמזיזים את המשולשים ממקומם או מסובבים אותם אין זה מקרה שבחרת

ת' סלח לי שאני מפסיק אותך, אך האם תוכל לתת לי דוגמה לתכונה שאינה נשמרת בשעת הזזה או סיבוב?

ב' בוודאי משולש בעל צלע אחת אופקית עלול לאבד את תכונתו זו אם תסובב אותו ייתכן שצלע אופקית אינה נחשבת אצלך ל"תכונה" שכדאי לדבר עליה, אם כך, רבים לא יסיימו איתך לך שאל צייר, אם לדעתו משולש שווה-שוקיים בעל בסיס אופקי, ומשולש בעל בסיס משופע, החופף את הראשון, נבדלים זה מזה התוכל לנחש מה תהיה תשובתו?

ת' הוא יאמר בוודאי שהם נבדלים ושונים, אך בפלנימטריה

ב' בדיוקי בפלנימטריה אין מבדילים ביניהם צלע אופקית אינה מעניינת את העוסק בפלנימטריה רק תכונות שנשמרות בשעת הזזות וסיבובים הן תכונות פלנימטריות, לכן שתי צורות שאחת מהן מתקבלת מהשנייה על-ידי הזזה או סיבוב, "צורות חופפות", אין הפלנימטריה מבדילה ביניהן אתה מבין?

ת' כן, עד כאן הכול היה פשוט

ב' אם הבנת עד כאן, לא יקשה עליך להבין גם את המשך

ת' בינתיים שכחתי לגמרי שרצית בעצם להסביר לי מהי טופולוגיה

ב' אני לא שכחתי זאת, ובאמת, אנו כבר קרובים מאוד לעניין הטופולוגיה אני מציע שנסכם ונראה לאן הגענו ראינו שהפלינימטריה הרגילה, זו שאתה מכיר מלימודיך בבית הספר, בוחרת לה מבין תכונותיהן של הצורות הגיאומטריות את אלו הנשמרות בשעת הזזות וסיבובים כאשר רצינו להיות בררנים יותר ולעסוק רק בתכונות אשר גם השלכה מקבילה אינה יכולה לשנותן, הגענו לגיאומטריה האפינית מושגים כמו "זווית", "מרחק", "משולש שווה-צלעות" או "ניצב תיכון" כבר אין להם מקום בגיאומטריה זו המשכנו באותו הכיוון, והגענו לגיאומטריה הפרוייקטיבית, העוסקת בקבוצה עוד יותר מצומצמת של תכונות אפילו מושג "הישרים ומקבילים" אינו קיים שם בכדי להגיע לטופולוגיה עלינו לעשות צעד נוסף, באותו כיוון

תאר לעצמך גיליון גדול עשוי גומי שעליו מצוירות צורות גיאומטריות שונות, ואתה אוהב בגיליון ומותח ומכווץ אותו כרצונך התכונות שגם פעולה זו אין בכוחה להשפיע עליהן, להן נקרא בשם תכונות טופולוגיות, והמדע העוסק בחקירתן הוא הטופולוגיה

ת' אינני מבין מה עלול עוד להישמר כשאני מותח את הגומי כרצוני כבר בגיאומטריה הפרוייקטיבית היינו צריכים לוותר על מרחקים, על זוויות, ואפילו על ישרים מקבילים, אך לפחות ישרים נשארו ישרים ומשולשים נשארו משולשים, על גיליון הגומי לעומת זאת, הכל נהרס ומשתנה איך אפשר להקים מדע שלם העוסק בתכונות הנשמרות כשמותחים את הגומי אינני יכול להעלות בדעתי אפילו תכונה אחת שתישמר כאשר

ב' רגע אחדי ייתכן שאינך חושב בכיוון הנכון אמנם התכונות שאתה רגיל לעסוק בהן בפלינימטריה – כמעט כולן הולכות לאיבוד בשעת מתיחת הגיליון, ובכל זאת, יש תכונות, תכונות שבוודאי כבר נתקלת בהן, שאין המתיחה משפיעה עליהן כלל התבונן למשל ב"מגן-דוד" אחת מתכונותיו הידועות היא שאפשר לציירו במשיכת קולמוס אחת אם תצייר מגן-דוד על גיליון הגומי, הצורה שתתקבל אחרי מתיחה של הגיליון גם אותה תוכל לצייר במשיכת קולמוס אחת התכונה של "אפשר לצייר במשיכת קולמוס אחת" היא תכונה טופולוגית גם הבעיה "מתי אפשר, ומתי אי אפשר לצייר צורה מישורית במשיכת קולמוס אחת" היא איפוא בעיה טופולוגית

ת' לא חשבתי מעולם שבמתמטיקה מטפלים בבעיה כזו ועדיין קשה לי להבין כיצד בעיות כאלו מצטרפות ל"מדע" של טופולוגיה

ב' אני מקווה שאם תכיר עוד כמה דוגמאות, תקבל מושג יותר ברור תמונה שלמה של הטופולוגיה תוכל לקבל רק אחרי שתכיר את מושגי היסוד של שאר חלקי המתמטיקה המודרנית

הדברים האם אתה יודע מהי השלכה מקבילה לא בדיוקי ובכן תאר לעצמך לוח זכוכית גדול שעליו מצוירות בצבע שחור צורות גיאומטריות שונות אם תעמיד לוח כזה בשמש ותשים מאחוריו לוח לבן – לאו דווקא מקביל לראשון – תופענה גם על הלוח הלבן צורות גיאומטריות, הלא הן הצללים של הצורות המצוירות על לוח הזכוכית נוהגים לומר, במקרה זה, שהצורות החדשות "התקבלו מהקודמות עלידי השלכה מקבילה"

ת' גם במקרה שהלוחות לא היו מקבילים, מדברים על "השלכה מקבילה"

ב' כן המלה "מקבילה" אינה נוגעת ללוחות, אלא לקרני האור אשר בעזרתן בוצעה ההשלכה נשוב עתה לתכונות הגיאומטריות האם לדעתך התכונות אשר בהן עוסקת הפלינימטריה נשמרות גם בשעת השלכה מקבילה

ת' רגע אחד – נדמה לי שיש כאלה ויש כאלה

ב' נכון הצל של משולש ישר-זווית לא יהיה תמיד ישר-זווית, אך נקודה החוצה קטע, הצל שלה יחצה את הצל של אותו קטע נוכח, איפוא, להבדיל מתוך התכונות הפלינימטריות סוג מיוחד של תכונות, הן התכונות הנשמרות גם בשעת השלכות מקבילות נוהגים לקרוא לתכונות אלו בשם "תכונות אפיניות", ולמקצוע העוסק בחקירתן בשם "גיאומטריה אפינית"

ת' אינני מבין מה אנו מרוויחים כשאנו לוקחים חלק מהפלינימטריה וקוראים לו בשם מיוחד

ב' אתה יודע בודאי כיצד בנויה הפלינימטריה ביסודה מונחים כמה מושגי-יסוד ומספר אקסיומות המקשרות ביניהן, ומאלו נבנית הפלינימטריה כולה אם נתבונן עתה באותו חלק של הפלינימטריה שקראנו לו "גיאומטריה אפינית", מתקבל על הדעת שלשם ביסוסו נוכל להסתפק במערכת יותר קטנה של מושגים ואקסיומות במערכת מצומצמת זו ימצא החוקר את דרכו ביתר קלות

ת' כן, זה מתקבל על הדעת

ב' אם נמשיך ללכת בדרך זו של מיון התכונות הגיאומטריות, נגיע לסוגים מעניינים של גיאומטריה למשל הגיאומטריה הפרוייקטיבית הגדרתה זומה להגדרת הגיאומטריה האפינית, אלא שבמקום השלכות מקבילות לוקחים שם גם השלכות מרכזיות, כלומר, נותנים לקרני האור המשליכות לצאת מנקודה אחת (למשל, ממנורה חשמלית) חבל שלא אספיק לספר לך היום על הגיאומטריה הפרוייקטיבית, ועל שאר ה"גיאומטריות", שבכל אחת מהן נכתבו מחקרים רבים – אך הרי עלי להגיע עוד לעניין הטופולוגיה

ת' האם יש לך עוד דוגמאות פשוטות, שאוכל להבין כבר עכשיו

ב' בטופולוגיה של המרחב יש כמה דוגמאות יפות

ת' מה פירוש "טופולוגיה של המרחב"?

ב' אתה זוכר כיצד חילקנו את תכונותיהן של הצורות המישוריות, אותה שיטה של חלוקה יפה למרחב

ת' האם יש גם "גיאומטריה אפינית של המרחב" ו"גיאומטריה פרויקטיבית של המרחב"?

ב' בהחלט הסיבה שדיברתי עד כאן רק על המישור, היא האפשרות להגדיר את הגיאומטריות השונות במישור בעזרת אמצעים פשוטים, כמו לוח זכוכית, קרני אור או גיליון גומי להגדרת הגיאומטריה הפרויקטיבית של המרחב, למשל, דרושים מושגים יותר מופשטים, שהסברתם הייתה נמשכת זמן רב יותר המושג "תכונה טופולוגית", לעומת זאת, אפשר להגדירו הגדרה פשוטה גם במרחב למטרה זו נשתמש שוב בגומי, הפעם לא בכדי לצייר עליו, אלא בכדי לבנות ממנו את הצורות המרחביות שלנו בתור "תכונה טופולוגית" של צורה כזאת, נגדיר עתה כל תכונה שתישמר אם נמעך את הגומי ונעוות את צורתו כמו כדור נפשונו שוב נהרסות התכונות הגיאומטריות ה"רגילות", ואף על פי כן נשארות די תכונות בכדי לשמש חומר למחקר נקח, למשל, כדור הוא מצטיין בתכונה הבאה אם תצייר עליו עקום סגור, היינו, עקום המתחיל בנקודה מסוימת, אינו חותך את עצמו במשך כל דרכו וחוזר בסופו לנקודה שממנה יצא, עקום כזה יחלק את פני הכדור לשני חלקים, ולא תוכל להגיע על פני הכדור מחלק אחד לשני בלי לחצות את העקום

ת' אינני חושב שתכונה זו מיוחדת לכדור דווקא, הרי על ביצה יתקיימו בדיוק אותם הדברים, ונדמה לי שאפילו על פני קוביה

ב' נכון מאוד, ובאמת, הכדור, הביצה והקוביה אינם שונים זה מזה בתכונותיהם הטופולוגיות אך יש גופים אחרים, שאינם מצטיינים בתכונה זו הכעך, למשל אם תצייר על פני כעך מעגל המקיף את החור שבמרכז הכעך, המעגל לא יחלק את פני כעך תוכל להגיע מכל נקודה לחברתה, בלי לחצות את המעגל הכדור והכעך נבדלים איפוא מבחינה טופולוגית

ת' באמת אינני יכול להפוך כעך-גומי לכדור-גומי, בלי לקרוע את הכעך

ב' וגם אינך יכול להפוך כדור לכעך בלי להדביק אתה רואה איפוא שההגדרה עולה בקנה אחד עם הדוגמה

ת' בהחלט! אני מתחיל גם להאמין שיש מה לחקור בטופולוגיה האם דיבר אותו מתמטיקאי אורח גם על הדוגמאות שהבאת לי

ב' הוא הביא אותן כדוגמאות לשימוש בשיטות הכלליות שלהסברתן הוקדשה הרצאתו לצערי לא אוכל אף לרמוז לך על טיבן של שיטות אלו

ת' אני מבין שעלי להזדיין בסבלנות על כל פנים אני מודה לך על כל מה שהסברת לי היום

ב' אינך צריך להודות לי אשמח להיפגש איתך שוב ולהשיב על שאלותיך בכל הנוגע למתמטיקה

המתמטיקה

המתמטיקה איננה מדע זו אמנות ואנו יכולים לומר עליה כדברי ניטשה "אנושי, יותר מדי אנושי"

לרחי שלי יש סיפוק כל כך מופלא ממשפט פיתגורס או מלוח הכפל, עד כי העונג הזה מיד משרה בי השדנות גדולה הצולע התביב חשב שיש לו רגל תקינה כי הוא חש טוב בעליו הוא שחכ כבר שיצר לו אותם לפי מידה הוא טעה, אך הוא צדק בנוגעל אותם כי הדבר לא הפריע לאיש וגרם לו הנאה

מרסל פאניול
(אפריל 1963)
מצרפתית
רבקה ויאיר
רוסקוביץ'

האדם שהמציא את המספרים מתפלא אחר-כך שהם מוצאים תן בעיניו ושהם מביאים לו סיפוק מושלם הוא נחפו לחשוף את התכונות שהוא עצמו נתן להם באותו יום שבו ברא אותם הוא חושב שבכך הוא צועד לקראת גילוי של הטבע כשבעצם הוא מגלה רק את רוחו הוא מצוהיר בגאווה נתנת שהמתמטיקה יכולה לבחון את העולם כשלמעשה היא בוחנת רק את המתמטיקאי

היכולת הקטנה הזו של המתמטיקה היא בכל זאת בעלת חשיבות גדולה מפני שהמתמטיקאי עצמו חלק מהיקום אם אטום של ברזל היה בעל יכולת לבחון את ההרכב ואת הכוחות שלו עצמו, הוא היה מכיר כך את ההרכב ואת הכוחות של כל אטומי-הברזל האחרים, כלומר של חלק של היקום, קטן ככול שיהיה