הנושא: **איך לעקוף את השטח בשאיפה לגבול**

הוכן ע״י: יעקב קופיץ, קרית משה, ירושלים.

תקציר: במאמר מציג המחבר הוכחה של הגבול הנ״ל שאינה מתבססת על מושג השטח. ההוכחה מתבססת על המושג מסילה פוליגונלית.

מילות מפתח: גבול, הוכחות מתמטיות, מסילה פוליגונלית.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 16, אדר ב׳ תשנ״ה, מרץ 1995, עמוד 89.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

איך לעקוף את השטח בשאיפה לגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$$

בספרי לימוד מוכיחים את הטענה $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

כמסקנה מהאי-שוויונים

(1) $\sin x \le x \le \tan x$ בשביל $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

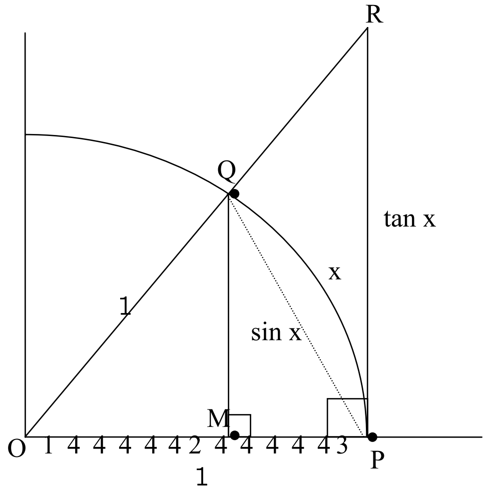
את אלו מוכיחים על ידי פירוש התבניות $\frac{\tan x}{2}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{\sin x}{2}$ כשטחים (ראה איור 1).

$\frac{\tan x}{2}$ = שטח המשולש ΔOPR;

$\frac{x}{2}$ = שטח הגזרה המעגלית ΔOPQ;

$\frac{\sin x}{2}$ = שטח המשולש ΔOPQ .

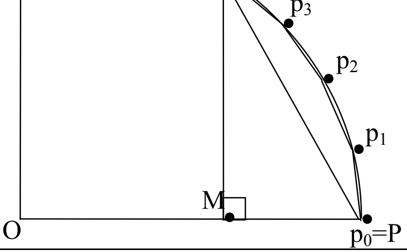
איור 1



מכיוון ששטחים אלה מכילים זה את זה ופונקציית השטח מונוטונית לגבי יחס ההכלה מקבלים את (1) כמסקנה מיידית. בהוכחה זו, שהיא משכנעת מאוד, משתמשים במושג בשטח כדי להוכיח בעצם אי-שוויון בין אורכים. לכן, חשוב לפתח קודם את מושג השטח. אך פיתוח המושג הזה (כפונקציה אדיטיבית לאיחודים זרים) הוא נושא בפני עצמו ובוודאי שלא נעשה בתיכון. אם כן, יש עניין בהוכחה של האי-שוויונים (1) שהיא בלתי תלויה במושג השטח, כפי שתוצג להלן.

אורך הקשת $x = \overset{\frown}{PQ}$ מוגדר כגבול העליון (lim sup) של אורכי המסילות הפוליגונליות החסומות מונוטונית בקשת זו. תהי אם כן $p_0 , p_1 , \dots p_{n-1} , p_n$ סדרת קדקודים של מסילה פוליגונלית על הקשת $\overset{\frown}{PQ}$, $p_0 = P$, $p_n = Q$ מסודרים לפי הסדר המונוטוני הטבעי של הקשת. אורך המסילה הפוליגונלית מוגדר כסכום אורכי צלעותיה, ומסומן להלן ב- $l\,(p_0 , p_1 , \dots , p_n)$.
(ראה איור 2 בשביל n=4).
יהא M עקב האנך מ- Q לישר PO ותהא R נקודת החיתוך של הישר המאונך ל- PO ב- P והישר QO (איור 1)

איור 2



"איך לעקוף את השטח בשאיפה לגבול", יעקב קופיץ
על"ה 16, אדר ב' תשנ"ה, מרץ 1995
האוניברסיטה העברית ירושלים

(1) הוא מסקנה מיידית של האי–שוויונים

$$QM \overset{(I)}{\leq} l\left(p_0, p_1, \ldots, p_n\right) \overset{(II)}{\leq} PR \qquad (2)$$

קל להוכיח את האי–שוויון השמאלי (I):

מאי שוויון המשולש נובע ש– $PQ < l\left(p_0, p_1, \ldots, p_n\right)$

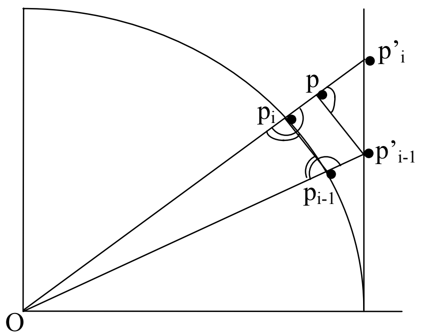
ו– $QM < PQ$ (היתר גדול מכל ניצב במשולש ישר זווית).

נותר להוכיח את (II).

תהא (p_{i-1}, p_i) $1 \leq i \leq n$ צלע של המסילה הפוליגונלית $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ ויהי (p'_{i-1}, p'_i) ה"צל" שלה על OR המתקבל מנקודת אור ב– O (איור 3). ברור אינטואיטיבית וגם קל להוכיח ש–

$$p_{i-1}\, p_i < p'_{i-1}\, p'_i \qquad (3)$$

איור 3



(הוכחה: העבר מקביל ל– $p_{i-1} p_i$ דרך p'_{i-1}. סמן ב– p את נקודת החיתוך של מקביל זה עם $p_i p'_i$. הזווית $\sphericalangle p\, p_i\, p_{i-1}$ קהה ולכן $\sphericalangle p'_i\, p\, p'_{i-1}$ (השווה לה) קהה, ולכן $p'_i\, p'_{i-1} > p\, p'_{i-1}$. אבל $p\, p'_{i-1} > p_i\, p_{i-1}$ כי בטרפז $p_{i-1}\, p_i\, p p'_{i-1}$ זוויות הבסיס $p_{i-1}\, p_i$ קהות ולכן הוא הבסיס הקטן).

סיכום האי שוויוניים (3) בשביל $i = 1, \ldots, n$ נותן את האי–שוויון (II).