

הנושא: **מחשבוני גרפיים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי**

הוכן ע"י: גרינל, איובה, ארה"ב.

תרגום של: Graphing Calculator in Calculus, *The College Mathematics Journal* 25, no. 3 (May 1994): 235-239

עברית: עזריאל לוי

תקציר: במאמר מתארת הכותבת התנסות שלה בשילוב של מחשבוני גרפיים במסגרת קורס חדו"א. היא מדגישה את היתרונות מבחינתה של שימוש במחשבוני גרפיים בהוראה, ומשווה שימוש זה לשימוש במחשבים.

מילות מפתח: כלים טכנולוגיים, מחשבון גרפי (מחשבוני גרפיים), חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א), מעבדה מתמטית, שיטות הוראה, שינוי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 16, אדר ב' תשנ"ה, מרץ 1995, עמודים 53-55.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

מחשבוני גרפיים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי*

הערות מערכת על"ה:

כתב העת The College Mathematics Journal יוצא לאור מטעם האיגוד Mathematical Association of America. איגוד זה עוסק במתמטיקה ברמה של מכללה, כלומר ברמה של לימודים לתואר בוגר, גם במחקר וגם בהוראה, וכתב העת מוקדש לנושאים אלו ובעיקר להוראה. המחברת מספרת על ניסיונה בהוראת הקורס הראשון בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (בהמשך: חדו"א). קורס זה מקביל בערך ללימודי החדו"א של תלמידי 5 יחידות לימוד במתמטיקה, ובמידה רבה גם של תלמידי 4 יחידות לימוד, בחטיבות העליונות בארץ. לכן ניסיון זה הוא משמעותי להוראת המתמטיקה בבתי הספר התיכוניים שלנו.

במאמר נזכרת בחינת הקידום בחדו"א (Examination Advanced Placement Calculus). בחינה זו בחדו"א, נערכת בכל מדינות ארצות הברית ובכל שנה ניגשים אליה כ-100,000 תלמידי כיתה י"ב הבוחרים בכך. בחינה זאת ניתנת על-ידי ה-Educational Testing Service, שהוא הגוף המקביל למרכז הבחינות הבינאוניברסיטאי בישראל. החומר שעליו נבחן התלמיד מקביל בערך לחומר בחדו"א הנלמד אצלנו בתיכון בחמש יחידות לימוד במתמטיקה. במכללות רבות בארצות הברית, הצלחה בבחינה זאת מקנה לבחון, פטור מן הקורס הראשון בחדו"א.

הערות מערכת The College Mathematics Journal:

מאמר זה, המדווח על השימוש במחשבוני גרפיים, הוא שונה מן הסקירות המתפרסמות דרך קבע במדור זה (המאמר התפרסם במדור סקירות התוכנה - המתרגם). למען האמת, מאמר זה אינו סקירת תוכנה כלל. פרופ' סולוב מתארת בו את השימוש בכלי טכנולוגי חשוב, המחשבון הגרפי, בכיתת חדו"א שהיא לימדה. מורים רבים שוקלים את אפשרות השימוש בכלי זה כתחליף לשימוש בתוכנה מתמטית במחשב. לדעתנו התיאור המחושב של הניסיון שלה יביא תועלת למורים אלו.

במכללת גרינל מרבים להשתמש במחשבים. בשנת 1986 התקינה המחלקה למתמטיקה רשת מחשבים בת 55 תחנות עבודה מסוג Sun. מחשבים נמצאים בכל הכיתות, עם צגים עיליים לתצוגה, ובכל המשרדים של חברי סגל ההוראה. יש לנו מעבדת מחשבים אחת וכיתת הוראה אחת מצוידת במחשבים. עם כל זה בהישג יד הגברנו את השימוש במחשבים בקורסים שלנו. נוסף על הקורסים במדעי המחשב מיקדנו את המיחשוב בקורסים חדו"א 1, חדו"א 2, אלגברה ליניארית, משוואות דיפרנציאליות וסטטיסטיקה.

המאמצים האישיים שלי מוקדו בקורסים חדו"א 1 וחדו"א 2, ובקורסים אלו הפכו השיעורים במעבדת המחשבים לחלק בלתי נפרד של הקורס. במאמרים שברשימת הספרות דנו באריכות בסיבות לשימוש זה, ולא אחזור על כך כאן. אולם למרות שראיתי בשיעורי המעבדה מרכיב מוצלח של קורס החדו"א שנתתי לפי עקרונות הרפורמה בהוראת החדו"א, מספר היבטים של השימוש במחשבים לא היו לשביעות רצוני. במיוחד, התברר שחלק מן התלמידים העביר את זמן המעבדה באיסוף ובהדפסת נתונים ללא הקדשת מחשבה לכך. היות שזמנם במעבדה היה מוגבל והם לא אצו לשוב למעבדה בזמנם החופשי, הם היו אוספים נתונים בזמן המעבדה וחיכו עד לאחר מכן כדי לגבש את רעיונותיהם ולכתוב את דו"ח המעבדה. הפיצול הזה בין פעילות המעבדה ופעילות החשיבה הביא, לעתים תכופות, לדו"חות מעבדה שמסקנותיהם לא היו תואמות את הנתונים. יתר על כן, הערך של ההתנסות במעבדה, שתוכננה באופן יסודי, ירד במידה מרובה לטמיון משום שהתלמידים לא חשבו בזמן המעבדה.

גורם אחר לאי שביעות רצון היה הכיתה עצמה. הייתי מעונינת בנסיבות גמישות יותר אשר בהן התלמידים משתמשים בטכנולוגיה מכיוון שהיא דרושה באותו הרגע, במקום לחכות להתנסות במעבדה במועד שנקבע מראש. קיומם של זמנים קבועים לשעות המעבדה מכתוב מלבנה מלאכותי לקורס. גם לא כל "התרחשויות הגילוי" מצריכות פגישת מעבדה מלאה עם דו"ח מעבדה לאחריה. דבר אחרון, למרות שעודדתי את התלמידים להשתמש בטכנולוגיה במשך הקורס, חוסר הגישה למחשב בזמן הבחינות הגבילה את השאלות בבחינות למתמטיקה של נייר ועיפרון.

* Graphing Calculators in Calculus, *The College Mathematics Journal* 25, no. 3 (May 1994): 235-239
התרגום מופיע באדיבות המחברת ומערכת כתב העת The College Mathematics Journal.

מחשבוניס גרפיים. הבעיות שמניתי הפריעו לי אבל לא היו בידי פתרונות. למרות שמצאנו דרכים לעשות את חדר המעבדה נעים יותר, התלמידים לא רצו להיכנס למעבדה מחוץ לזמן השיעור. בשנת 1992 התמניתי לוועדת בחינות הקידום בחדו"א, שדנה באפשרות החיוב של הנבחנים במחשבוניס גרפיים, ואז החלטתי שהגיע הזמן שאכיר את הכלים הללו. כמו רבים ממשתמשי המחשבים הבטתי עליהם מלמעלה למטה כעל "מחשבים לעניים" – זה בסדר אם אינך יכול להרשות לעצמך מחשב של ממש, אבל זה בוודאי משהו נחות. לא עקבתי אחרי ההתפתחויות במחשבוניס הגרפיים ולא הייתי מודעת היטב לשימוש שלהם בהוראת המתמטיקה.

סדנה של שלושה ימים ביוני 1992 פקחה את עיניי. נוסף על בדיקה של מספר מחשבוניס גרפיים שמעתי דיווחים של מורי בתי ספר תיכוניים שהתנסו בעבודה עם מחשבוניס גרפיים, אשר תלמידיהם עובדים בקבוצות בחלק גדול של הזמן בכיתה. הם תיארו כיצד חדר הכיתה משתנה כאשר טכנולוגיית המחשבוניס נמצאת בידי התלמידים כל הזמן. כדי להקל על העומס הכספי של התלמידים הם המליצו להשכיר את המחשבוניס לתלמידים. בסוף הסדנה התחלתי לחשוב שהמחשבוניס הגרפיים עשויים לפתור את בעיותיי.

מחשבוניס בכיתה. כאשר שבתי למכללת גרינל הגעתי להסדר עם הדיקן, והמכללה קנתה 35 מחשבוניס מסוג TI-85. מתלמידי חדו"א שלי נדרש שיהיו בידיהם מחשבוניס שהם יכלו לשכור תמורת 25 דולר לסמסטר או לרכוש במחיר העלות. ההתנגדות היחידה להסדר זה באה מצד תלמידים שכבר היו להם מחשבוניס גרפיים פחות חזקים. אני בחרתי את ה-TI-85 בגלל כוחו, קלות השימוש בו והיכולת להעביר תכניות ממחשבון למחשבון. השימוש במחשבוניס הגרפיים עבר באופן חלק יחסית בתוך הסמסטר. קיימתי ערב אחד של אימון, שלא היה חובה, בתחילת הסמסטר. בקורס עצמו לימדתי את התלמידים את הפעולות השונות של מחשבון במקביל למתמטיקה. התלמידים הביאו את המחשבוניס שלהם לכיתה בכל יום, ועודדתי אותם להשתמש במחשבוניס בכיתה ובשיעורי הבית, והם גם השתמשו בהם בבחינות.

כאשר התלמידים עשו את אותן המעבדות כמו בשנה הקודמת מצאתי, שהצלחתם כעת, כאשר המחשבוניס הגרפיים בידיהם, הייתה רבה יותר. המסקנות שלהם התאימו לנתונים והדיונים והשאלות במעבדה היו ברמה הרבה יותר גבוהה. נראה שהצורך לשרטט על גבי הנייר את מה שהם רואים, ולא רק להדפיס את המסך במדפסת, עוזר לתלמידים לחשוב על מה שחשוב. היות שהמחשבוניס הם כל הזמן בידי התלמידים, הם אינם לחוצים בזמן המעבדה והם יכולים להקדיש זמן להבנה של הדברים שהם עושים במקום לדאוג להספק.

שינוי אחר בקורס שלי היה בהנהגת המיני-מעבדות: 20 או 30 דקות בזמן השיעור אשר בהן התלמידים עובדים בקבוצות של שלושה או ארבעה על מספר בעיות קרובות. בדרך כלל יצרתי את המיני-מעבדה על-ידי בחירת חלק מתכנית מעבדה שלקחתי מ-[2]. אחרי העבודה בקבוצות דנה הכיתה כולה בבעיות ובמה שנלמד מהן. התלמידים נהנו בחלק זה של הקורס ואני יכולתי לדעת הרבה יותר על מה שהם יודעים כתוצאה מכך שסיירתי בכיתה בזמן שהם עבדו בקבוצות ודיברתי עם קבוצות שונות.

הדיון הכללי היה עירני, ואפילו תלמידים שבדרך כלל מדברים לעתים רחוקות, נטלו חלק בדיון. תועלת חשובה של הדיון בכיתה מייד לאחר פתרון הבעיות בקבוצות המיני-מעבדה היא, שדיון זה מונע התפשטות מסקנות מוטעות. בעבד, תלמיד שהגיע למסקנה מוטעית נודע לו שהוא טעה רק לאחר שדו"ח המעבדה נבדק והוחזר לו. עד לשלב זה היה התלמיד שרוי בטעות ובבלבול.

כמובן שהתלמידים השתמשו במחשבוניס גם בהרבה דרכים אחרות. עודדתי את השימוש בהם בשיעורי הבית והשימוש בהם נדרש בבחינות. בעבר, קורסי חדו"א שלי השתמשו בטכנולוגיה, כלומר במחשבים, אבל אני קבעתי מתי ואיך ייעשה שימוש זה. בדרך כלל רק תלמיד אחד או שניים השתמשו במחשב בזמן שהדבר לא נדרש מהם. כעת, כאשר התנסיתי בהוראת תלמידים אשר טכנולוגית החישוב נמצאת איתן כל הזמן, אני מאמינה שהטכנולוגיה באמת מתחילה לשנות את אופי הכיתה, כי אנו, המורים, איננו שולטים עוד על השימוש של התלמידים בטכנולוגיה. כאשר

התלמידים יוצרים את השימושים שלהם בטכנולוגיה, הם מתחילים לשלוט בקורס ובתוכנו. במיוחד, הטכנולוגיה מאפשרת להם למצוא יותר מפתרון אחד לבעיות בחדו"א.

תוצאה חשובה אחת של השימוש במחשבוני הגרפיים היא שיותר אחריות מועברת לתלמידים. היות שכל התלמידים יכולים להשתמש מייד במחשבוני שלהם כדי לראות את הגרף של פונקציה, הם אחראיים כעת על ההתאמה בין התשובות שלהם לבין הגרפים. למשל, כאשר הם נשאלים על השיפוע של המשיק, אם הגרף יורד בנקודת ההשקה והם חישובו שהשיפוע חיובי, הם צריכים להסביר שתשובתם לא נכונה. אני משתמשת בזאת כדי להדגיש שטעויות חשבון הם בעלות חשיבה משנית בעוד שטעויות בהבנה הן הטעויות החשובות. תוצאה אחרת היא שהתלמידים צריכים להסביר את תשובותיהם לעתים קרובות יותר מאשר בעבר. היות שבעבר לקח לתלמיד זמן כה רב לפתור בעיה, לא דרשתי ממנו לוודא שהתשובה היא נכונה. עתה בעזרת המחשבוני מגיעים התלמידים לתשובות הרבה יותר מהר, וזה משאיר זמן לפעילות החשובה של הסברת השיקולים שמאחורי התשובה.

כאשר תכננתי לראשונה את הקורס חדו"א 1 עם שימוש במחשבוני גרפיים, התכוונתי להכניס את השימוש במחשב בערך באמצע הסמסטר. היה זה לצורך המחשת הרעיון של סכומי רימן, בעזרת תמונות של סכומים. כך היה אפשר לשכנע את התלמידים שהסכומים אמנם מתכנסים לשטח שמתחת לעקומה. לא רק שהגרפיקה של המחשב היא טובה בהרבה מן התמונות המתקבלות על-ידי המחשבון, אלא גם חשבתי שהתלמידים צריכים להתרגל למחשב למקרה שירצו לעבור לקבוצה אחרת בסמסטר השני. מה שקרה הוא, שהייתי כה מרוצה מעבודת המעבדה שלהם במחשבוני, שבמקום להשתמש במחשבים כתבתי תכניות למחשבוני של התלמידים שאיפשרו להם לבצע את עבודת המעבדה. חוסר החדות והדיוק של הגרפים לא היה בעיה. נתתי לתלמידים את רשימת הפקודות של כל תכנית יחד עם הסברים מפורטים על תפקידי הפקודות השונות. התוכנות הופצו לכל תלמידי הכיתה תוך חמש דקות בקירוב על-ידי העברתן ממחשב למחשב באמצעות חיבור שני מחשבים בכבל מתאים. כך לא נאלצו התלמידים לתכנת בעצמם, אך יכלו לשנות תכנית אם רצו בכך.

בסמסטר האביב של 1993 לא דרשתי מן התלמידים להשתמש במחשבוני בקורס חדו"א 2 העוסק בפונקציות של מספר משתנים. בשביל קורס זה רציתי את היכולת הגרפית החזקה יותר של מחשב. התברר לי, שהתלמידים שלי מן הקורס חדו"א 1 עברו ללא קושי לשימוש במחשב בקורס חדו"א 2. הם התרגלו מהר למחשבים אבל הפריע להם שהטכנולוגיה אינה מצויה כל הזמן בהישג ידם.

מה למדתי? כאשר אני מתבוננת אחורה לסמסטר הסתיי של 1992, אני יכולה לדווח בעיקר תוצאות חיוביות. המחשבוני היו חזקים דיים כדי למלא את הדרישות של חדו"א 1. הם היו קלים לשימוש לרוב התלמידים והתלמידים אמרו שהם אוהבים להשתמש בהם, ובעיקר בשיעורי הבית ובבחינות. למעשה הם השתמשו בהם במספר קורסים. הצורך שלי במעבדות מחשבים בחדו"א בא על סיפוקו בשימוש במחשבוני הגרפיים. חדר הכיתה נעשה למקום חי יותר והתלמידים יכלו להשתתף יותר. במידה מסוימת המחשבון סיפק את הבמה אשר בה גם תלמידים "חלשים" יותר יכלו לתרום, ולא רק לדבר על מה שהם ראו במסך המחשבון.

אני מתכוונת להמשיך ולהשתמש במחשבוני הגרפיים, אבל עם מספר הבדלים. אני אדרוש את השימוש בהם אבל לא אשכיר או אמכור אותם; התלמידים יצטרכו לרכוש אותם בעצמם. עכשיו קל יותר למצוא את המחשבוני בחנויות והמחיריים שלהם יורדים. העלות של מחשבון גרפי וספר הלימוד בחדו"א אינם הרבה יותר מאשר העלות של קורסים אחרים במכללה. אני לא אקבע לתלמידים את סוג המחשבון. כאשר בהתחלה השתמשו כל התלמידים במחשבוני זהים עשיתי זאת בשבילי ולא בשביל התלמידים. היות שלא הייתי בטוחה במה שאני עושה, ניסיתי לפשט ככל האפשר את המצב בכיתה, אבל כעת איני זקוקה עוד לקביים אלו. כעת אתן תמיכה מלאה רק לסוג מחשבון אחד אבל התלמידים יכולים להשתמש בכל מחשבון גרפי שהם ירצו.

בבחינות הקידום במתמטיקה יידרשו הנבחנים להשתמש במחשבון גרפי החל בבחינה של מאי 1995. כתוצאה מכך יבואו יותר תלמידים למכללה עם ניסיון בשימוש במחשבון גרפי. אני רוצה לקרוא לתלמידים אלו לבוא לכיתות שלי ולעודד אותם להשתמש במחשבונים הגרפיים שהם רגילים להם, בתנאי שהם די חזקים בשביל הפעילות הנדרשת.

מסקנות. מהניסיון שלי במחשבים ובמחשבונים גרפיים אני מאמינה שהמחשבון הגרפי מתאים לקורס חדו"א 1. הוא מאפשר לתלמידים לראות את הפונקציות, להבין את האופי הגיאומטרי של הנושא ולחשב מספרית נגזרות ואינטגרלים. הוא קל לשימוש ולנשיאה, יכול להיות עם התלמידים כל הזמן ומאפשר להוראה בכיתה להיות תערוכת גמישה יותר של דיונים, פתרון בעיות, עבודות מעבדה והרצאות, וכל זאת בעלות מזערית.

מוסדות חינוך רבים נתקלים בשלוש בעיות כאשר הם רוצים לעבור להוראה עתירת מחשבים: עלות המחשבים, ההתיישנות המהירה שלהם והמחסור במקום עבורם. מחשבונים גרפיים יכולים לעזור לפתור בעיות אלו.

היות שמקובל לדרוש מהתלמידים לקנות את המחשבונים שלהם, ההוצאה עבור הטכנולוגיה עוברת מן המוסד לתלמידים. יצירת מעבדות מחשבים וחדרי כיתות המצוידים במחשבים היא יקרה, וזה מתסכל לראות שמערכת המחשבים נעשית מיושנת הרבה לפני שהיא מפסיקה לפעול. לעתים רבות קשה יותר להשיג כסף להחלפת הציוד מאשר לרכישתו הראשונה, כי הנהלת המוסד עלולה לא להבין מדוע המערכת הקיימת אינה מתאימה עוד. יותר קל להיות מעודכנים עם מחשבונים גרפיים היות שהתלמידים קונים אותם כל שנה. כמו כן, כאשר יותר ויותר קורסים משתמשים בטכנולוגיית המחשבים, תחרות הגישה למעבדות המחשבים נעשית חריפה יותר. השימוש במחשבונים גרפיים בקורסים רבי המשתתפים עד חדו"א 1 ועד בכלל יכול לשחרר את מעבדות המחשבים לקורסים מתקדמים יותר אשר בהם דרושה היכולת העדיפה של המחשבים.

הטכנולוגיה משתנה במהירות ובקרב יהיו בידינו מחשבונים לא יקרים עם מערכות אלגבריות כמו אלו שבמחשבים. יתר על כן, תלמידים יוכלו להתקשר עם תוכנות מתמטיות ממחשבים אישיים קלים וניידים. מחשבונים גרפיים אינם המטרה האידיאלית של חדו"א 1. בשלב זה אני ממליצה שכל מורה שלא בדק לאחרונה את המחשבונים הגרפיים, ייקח אחד בידו וישחק עמו. אתה תראה שלמרות שהיכולת שלהם אינה ברמה של מערכת אלגברית מתוחכמת במחשב, הם מספיקים בהחלט לחדו"א של משתנה אחד, והיתרון בכך שהטכנולוגיה הזאת היא בבעלות התלמידים עולה על החסרון הטמון בכוח הקטן יותר שלה בהשוואה לזה של המחשב.

אני רואה בצער את הקרע בין המורים המשתמשים במחשבים לבין אילו המשתמשים במחשבונים. לשתי טכנולוגיות אלו יש יתרונות וחסרונות. עם הפעלת הרפורמה בהוראת החדו"א התברר שיש הרבה דרכים לערוך את השינוי. למרות שהקורסים שונים, המטרות זהות. בדומה, אני מקווה שניווכח בכך שיש דרכים רבות להבאת טכנולוגיה להוראת החדו"א.

רשימת ספרות

[1] L. Carl Leinbach, ed., *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*, MAA Notes, NO. 20, 1991.

[2] Anita E. Solow, ed., *Learning by Discovery: A Lab Manual for Calculus*, MAA Notes, NO. 27, 1993.