הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם" : לקידום שיפור וריענון החינוך המתימטי

הנושא: "משחק המשושים (הֶקס)"

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, טכניון

תקציר: משחק המשושים (משחק הקס) מיועד לשניים, ומתבצע על לוח של n x n משושים צמודים, שבו כל שחקן מסמן בתורו את הסימן שלו (X או O). השחקן שיצר שרשרת רצופה של סימניו, המחברת שתי שפות לא צמודות של הלוח הוא המנצח. בחומר מובאים שני משפטים הקשורים לאסטרטגיות נצחון במשחק הקס והוכחתם.

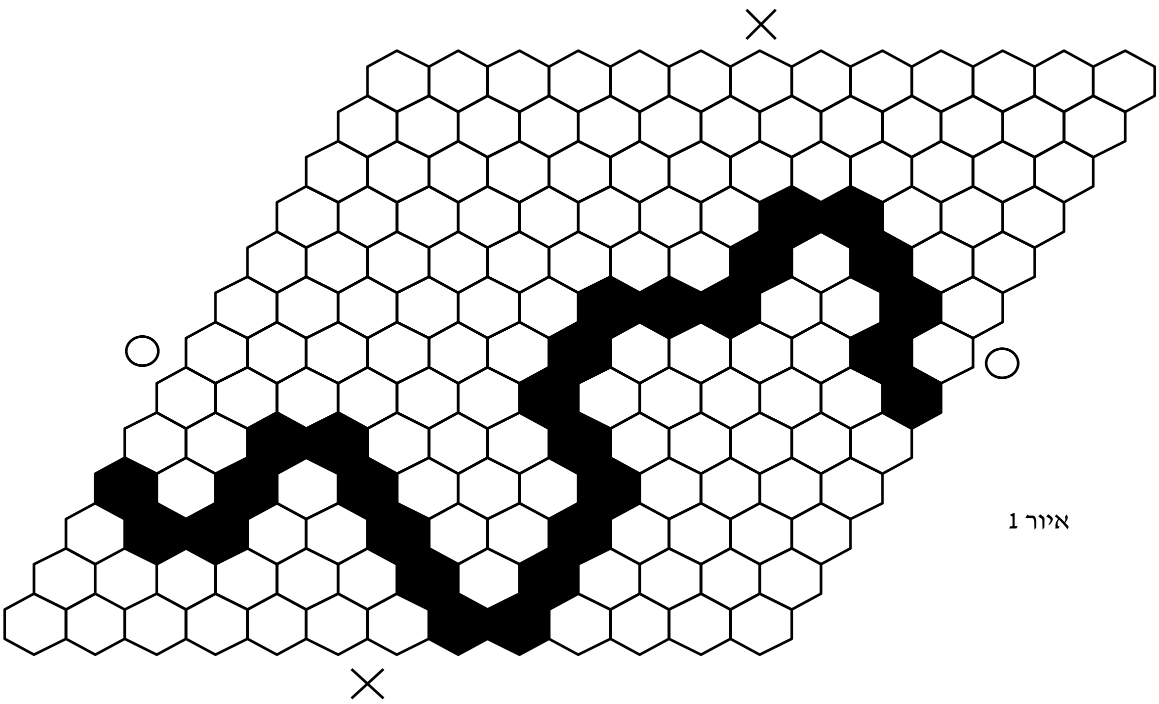
מילות מפתח: משחקים, אסטרטגית נצחון.

החומר הוגש במסגרת:
"קשר-חם", הכנס הארצי של מרכזי מקצוע המתמטיקה, שנה"ל תשנ"ב, אפריל 1992
"קשר-חם", הכנס הארצי של מרכזי מקצוע המתמטיקה, שנה"ל תשנ"ג, מרץ 1993

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 12 עמודים.

משחק המשושים (הֶקס)[1]

משחק המשושים, הידוע בכינויו "הֶקס" (ה' סגולה, מלשון הקסגון) הוא משחק לשניים המתנהל על לוח בצורת מערך של $n \times n$ משושים צמודים, בדרך כלל 13×13, או 14×14. כל שחקן בתורו מסמן את הסימן שלו (למשל × או O) בתוך אחד המשושים שטרם סומנו, לפי בחירתו. משושה שסומן לא יסומן שנית. המטרה של כל שחקן היא ליצור "גשר", דהיינו שרשרת רצופה (גם אם היא מפותלת) של סימניו, המחברת שתי שפות לא צמודות של הלוח שעל שייכותן לשחקן מחליטים בראשית המשחק (ר' איור 1). (המשושים שבקודקודי הלוח נחשבים כשייכים לשתי השפות, כך שכל אחד משני השחקנים יכול ליצור את השרשרת שלו מהם או אליהם). המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים הצליח ליצור "גשר" וניצח, או כאשר אין יותר אפשרות לבצע מהלכים חוקיים.



איור 1

כדי לעמוד על צפונותיו של המשחק רצוי לשחק אותו על לוח קטן (בעמודים האחרונים מצורפים לוחות שונים). אורך המשחק הוא כמובן n^2 צעדים, ותוצאת המשחק מוגדרת כתיקו אם אחרי n^2 צעדים אף אחד משני השחקנים לא ניצח. במצב כזה ברור שכאשר n זוגי לשני השחקנים יש מספר שווה של צעדים וכאשר n אי-זוגי, השחקן הפותח הוא גם השחקן הסוגר. שתי טענות מעניינות אפשר להוכיח על משחק המשושים (הקס). הן מובאות בהמשך.

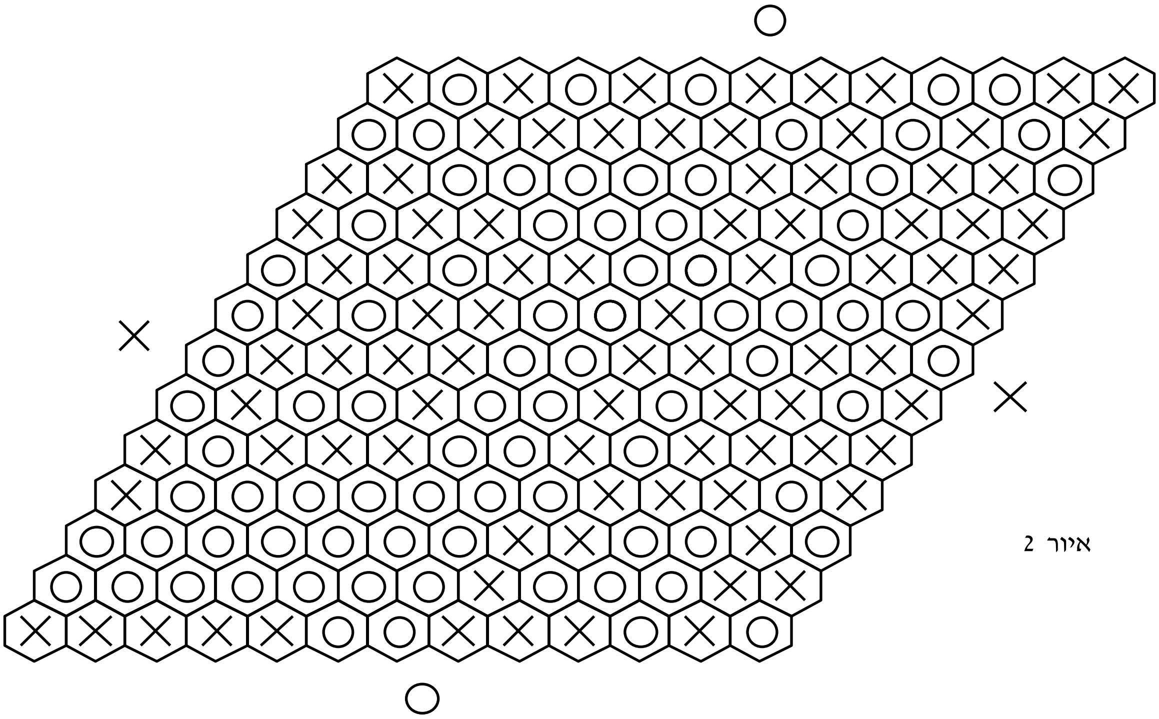
תרגיל הכנה: לנסות לבנות מצב של תיקו (כלומר מצב שבו המשחק מסתיים מבלי שהושג ניצחון).

[1] מאמר זה הוכן לקראת הכנס הארצי של "קשר-חם" – המרכז הארצי לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל, פסח תשנ"ד, ופורסם בגיליון 15 של על"ה – כתב העת למורים למתמטיקה בעל יסודי, 1994

משפט 1: המשחק חייב להסתיים בניצחון של אחד משני השחקנים

(כלומר המשחק אינו יכול להסתיים בתיקו).

הוכחה: נניח שהמשחק הסתיים לפני שאחד השחקנים הכריז על ניצחון. כלומר, כל המשושים בלוח מסומנים (ולכן אין לאף אחד מהשחקנים אפשרות לבצע צעד נוסף). כדי להוכיח את המשפט יש להראות שבכל מצב סיום כזה מוכרח להיות "גשר". נניח את הלוח כך שהשפה העליונה והתחתונה של הלוח שייכות ל- O, והשפה השמאלית והימנית שייכות ל - × (ר' איור 2).



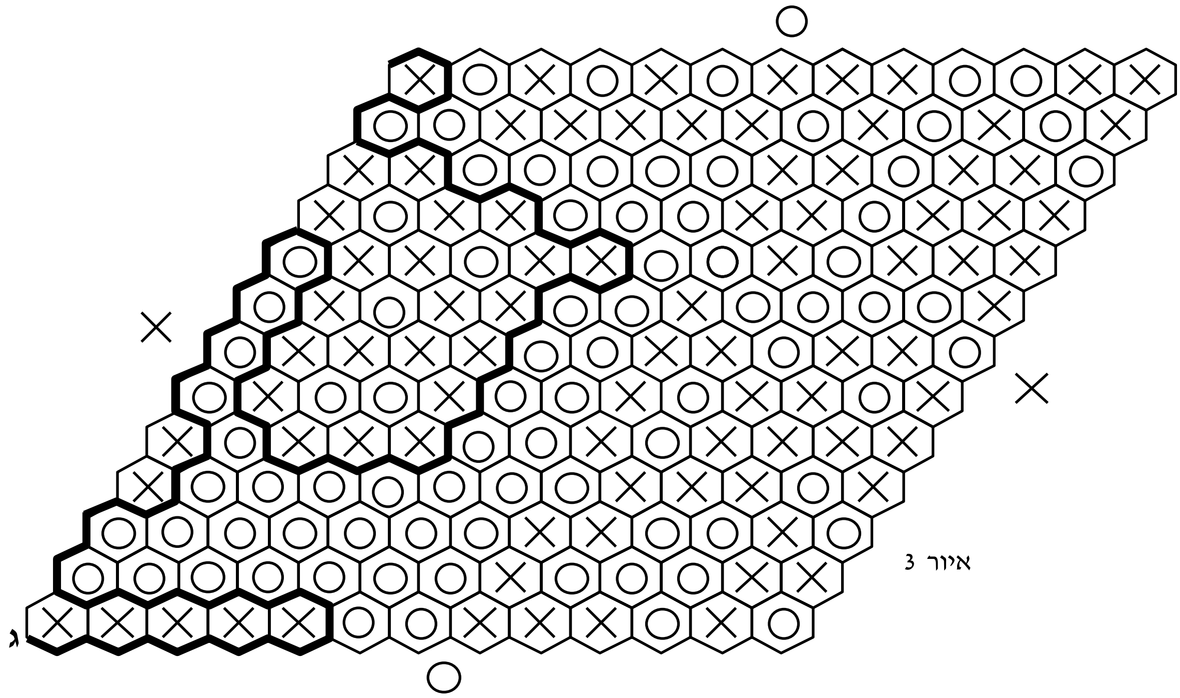
איור 2

ההוכחה נשענת על סימון של קו הפרדה בין המשושים המסומנים ב- × לבין אלה המסומנים ב- O. לשם כך נתחיל בקודקוד של המשושה שנמצא בפינה השמאלית העליונה של הלוח (המסומנת באות **א** באיור 3). ככל יתר המשושים, גם הוא מסומן בסימנו של אחד השחקנים, כמובן. בסימון קו ההפרדה נתקדם מקודקוד לקודקוד לאורך צלע כך שהמשושה שלימיננו מסומן ב- × והמשושה שלשמאלנו מסומן ב- O (או שהצלע היא בשפת הלוח ואז רק אחד התנאים הללו מתקיים והשני תופס לגבי השפה במקום לגבי משושה - ר' איור 3).

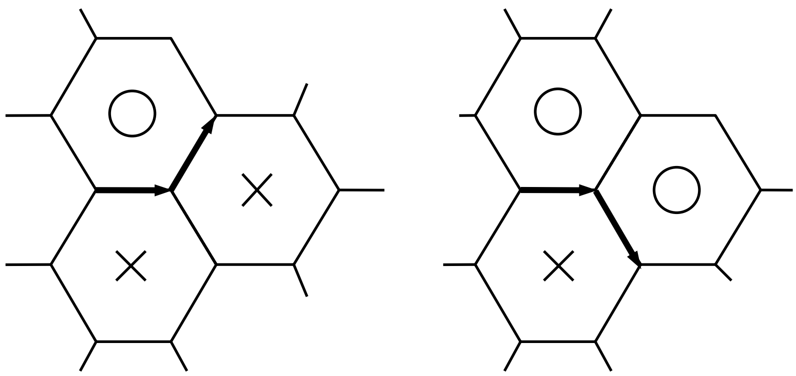
הקו שנסמן באופן כזה יתפתל בין קודקודים סמוכים שבהם נפגשים משושים בעלי סימונים שונים. מכיוון שבכל קודקוד נפגשים שלושה משושים בדיוק, ומכיוון שאנחנו מתקדמים מקודקוד לקודקוד בין משושים שוני סימן, יש רק שני מקרים שונים אפשריים: או שמימין לקו יהיו שני משושי-× צמודים ומשמאלו משושה-O אחד, או שמימין לקו יהיה משושה-× אחד ומשמאלו שני משושי-O צמודים (ר' איור 4).

בכל אחד משני המקרים יהיה רצף של משושי-× מימין לקו ההפרדה ורצף של משושי-O משמאלו. נשים לב גם לכך שבאף אחד מהמקרים לא יכול לקרות שקו ההפרדה יחזור מכיוון אחר אל קודקוד שכבר עבר דרכו וכך יחתוך את עצמו או ייסגר בלולאה, שכן דרך קודקוד כלשהו

עובר רק מסלול אחד המקיים את התנאי שלימינו משושה (או משושים)-× ולשמאלו משושה (או משושים)-O (עיון בוחן באיור 3 יבהיר זאת).



איור 3



איור 4

הדבר נכון הן לקו-ההפרדה בין משושים והן להפרדה בין המשושים לבין קווי-השפה של הלוח (שגם הם, כאמור, שייכים ל- × או ל- O). לפיכך, לאורך הצד השמאלי של קו-ההפרדה חייבת להיות שרשרת רצופה של משושי-O המתחילה בשפה העליונה של הלוח, ולשמאלו של קו ההפרדה חייבת להיות שרשרת רצופה של משושי-× המתחילה בשפה השמאלית של הלוח (קודקוד הפינה שייך לשתיהן ומשום כך הקביעה הזאת נכונה גם לגביו, יהא סימנו אשר יהא). מאחר שקו ההפרדה לא יכול לחתוך את עצמו, הוא לא יכול להתפתל באורח אינסופי, ומפני זה הוא חייב להגיע אחרי מספר סופי של צעדים אל אחת השפות של הלוח (השייכת כנזכר ל- O או ל- ×)

אם בהגיעו אל שפת הלוח, לא הגיע קו ההפרדה אל הפינה הימנית העליונה של הלוח (המסומנת באות ב באיור 3), ולא אל הפינה השמאלית התחתונה של הלוח (המסומנת באות ג), אז תמיד

אפשר להמשיך ולהאריך אותו לפי הכללים, כלומר כשלימינו × ולשמאלו O (משושה או שפה) עד שיגיע אל אחת משתי הפינות האלו (ההמשך לא חייב להישאר צמוד אל השפה, הוא עשוי להיכנס בחזרה אל פנים הלוח אבל כל הזמן הוא מתפתל לפי התנאים).

אם קו ההפרדה יסתיים בפינה הימנית למעלה (ב), אזי שרשרת משושי-× שמימינו המתחילה בשפה השמאלית, תסתיים בשפה הימנית בעוד ששרשרת משושי-O שלשמאלו, תתחיל ותסתיים בשפה העליונה, ועל כן שחקן- × ינצח. ברור ש-O לא יכול היה לנצח מפני שהשרשרת הרצופה של משושי-× משמאל לימין חוסמת קיומה של שרשרת רצופה כלשהי מלמעלה למטה. באופן מקביל, אם קו ההפרדה מסתיים בפינה השמאלית למטה (ג) אז הניצחון הוא של שחקן-O ורק שלו.

המסקנה המתבקשת מהעובדה שהמשחק חייב להסתיים בניצחון של אחד השחקנים היא שקיימת אסטרטגיית משחק המבטיחה ניצחון לשחקן אחד ורק אחד. אסטרטגיית ניצחון היא תפריט המכיל צעד ראשון מסוים (עבורו ייתכנו אלטרנטיבות אחדות) ונוסחה, או כלל אחר של התנהגות השחקן בתגובה לכל צעד אפשרי של היריב בכל שלב מהשלבים הבאים של המשחק, - התנהגות אשר תבטיח לו ניצחון בלי תלות במה שיעשה היריב. מסקנה זאת נשענת על משפט צרמלו המפורט בנספח.

משפט 2: השחקן שצועד ראשון יכול להבטיח לעצמו ניצחון. ("יכול" פירושו "אם ישחק בתבונה").

הוכחה: מהמשפט הקודם נובע (באמצעות משפט צרמלו המפורט, כאמור, בנספח) שאחד ורק אחד מהשניים מוכרח להתקיים: או שקיימת שיטה של משחק שאם רק ינקוט בה השחקן הראשון היא תבטיח את נצחונו ויעשה השני אשר יעשה, או שקיימת שיטה של משחק שאם רק ינקוט בה השחקן השני היא תבטיח לו את נצחונו ויעשה הראשון אשר יעשה.

נניח על דרך השלילה שקיימת אסטרטגיית ניצחון לשחקן הצועד שני, כלומר יש בידיו תפריט המורה לו כיצד לסמן בסימן שלו את אחד המשושים הריקים על הלוח ומבטיח לו לנצח ויסמן השחקן הראשון את הסימן שלו בכל מקום פנוי שירצה. נראה שההנחה הזאת מביאה בהכרח למסקנה שלשחקן הראשון יש תפריט המבטיח לו ניצחון, כלומר הוא יכול לנצח ויעשה השני מה שיעשה . . . המסקנה הזאת היא אבסורדית ועל כן ההנחה אינה נכונה.

ובכן – לפי ההנחה קיים תפריט ניצחון לצועד שני. הנה תיאור של תפריט הניצחון של הראשון, הנובע מכך. המשחק נפתח בכך שהשחקן הראשון בוחר באופן אקראי באחד המשושים שעל הלוח ומסמן בו את הסימן שלו. אחרי שהשחקן השני מגיב, כלומר אחרי שהוא עושה את הצעד הראשון שלו, מגיב על כך הראשון על ידי שימוש בתפריט הניצחון שעל פי ההנחה קיים עבור הצועד שני. המשחק נמשך הלאה והראשון משתמש כל הזמן בתפריט הניצחון הקיים לפי ההנחה לצועד שני. אם בשלב כלשהו הראשון מוכרח, לפי התפריט הזה, לסמן את הסימן שלו במשושה שהוא כבר סימן בצעד הראשון (כאמור באקראי), הוא מסמן משושה אחר באקראי ואז שוב יש משושה אחד שהוא סימן באקראי וכל יתר המשושים שהוא סימן הם משושים שנבחרו על פי תפריט הניצחון (המשחק מתנהל על ידי סימון לסירוגין של המשושים הריקים שנותרו על הלוח, לכן לא יכול להיווצר מצב שבו הראשון צריך לסמן משושה שהשני כבר סימן). אם בצעד נוסף

כלשהו עליו לסמן את המשושה שהוא סימן קודם לכן באקראי, הוא מסמן משושה אחר באקראי. באופן כזה המשושה שאמור להיות מסומן בכל שלב לפי תפריט הניצחון (של הצועד שני, הקיים לפי ההנחה) אכן מסומן על ידי הראשון, ותמיד יש לראשון עוד משושה עודף אחד שמסומן באקראי. עודף זה יכול להפריע לשני מלתפוס משושה מסוים, אבל לא יכול להפריע בכך לראשון, כי עודף משושים מסומנים הוא תמיד יתרון. מכאן שהשחקן הראשון יכול לשחק על-פי תפריט הניצחון של שחקן שני ללא כל הפרעה. בלשון אחרת, הוא יכול לנצח (כי הוא בעצם משחק תפקיד של השחקן השני עם עודף של צעד אחד שלא יכול להפריע לו). אבל זוהי סתירה להנחה שהשני יכול לנצח, ועל כן ההנחה מן הסתם מוטעית, והמסקנה המתבקשת במקומה היא שהשחקן הראשון יכול לנצח בכל מקרה.

הערות

1. קל להראות ללוח של 3×3, 4×4 ואפילו 5×5 פרוצדורה של קבלת החלטות שתבטיח ניצחון במשחק המשושים (הקס). למרות שלא ידועה פרוצדורה כזאת על הלוח הסטנדרטי של 11×11, הוכחנו לעיל שקיימת אסטרטגיית ניצחון לשחקן הראשון על לוח מכל סדר $n \times n$. ככלל, יש שתי דרכים עקרוניות להוכיח שמשהו קיים: הדרך האחת היא לחפש אותו (או לחפש דרך לבנייתו) עד שמוצאים אותו, ואז להצביע עליו (או לבנות אותו ולהראותו). דרך זאת נקראת הוכחה קונסטרוקטיבית. הדרך השנייה היא להבטיח את קיומו באמצעים לוגיים מבלי להראות אותו עצמו. למשל, אפשר לשלול את האפשרות שהוא לא קיים ובכך להוכיח קיום באופן לא-קונסטרוקטיבי. ההוכחה של משפט 2 היא דוגמה להוכחת קיום מהסוג השני. גם אם איננו מכירים אסטרטגיית פתרון לשחקן הראשון, המשפט הזה מבטיח לנו שאסטרטגיה כזאת אכן קיימת וכל מה שעלינו לעשות הוא לחפש אותה עד שהיא תימצא. ברור שכל עוד אין בידנו הוכחת קיום מצבנו פחות טוב, כי אז בחיפוש אחריו אנחנו אפילו לא בטוחים שאנחנו מחפשים משהו שקיים.

2. בווריאציה אחרת של משחק המשושים (הקס) כל שחקן מנסה להכריח (במקום למנוע) את יריבו ליצור שרשרת רצופה משפה לשפה נגדית של הלוח. רוברט ווינדר, הוכיח בעת לימודיו בפרינסטון, שהשחקן הראשון יכול תמיד לעשות זאת (ולנצח) על לוח משושים מסדר $n \times n$ שבו n זוגי, והשחקן השני יכול לנצח על לוח שבו n אי-זוגי.

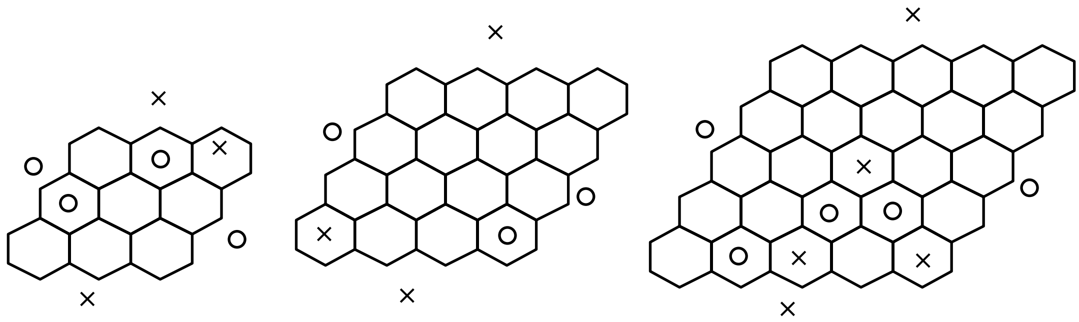
3. את משחק המשושים (הקס) המציא המהנדס והפיסיקאי פיט היין(Piet Hein) מדנמרק, כאשר התלבט בבעיה הטופולוגית הידועה בשם: בעיית ארבעת צבעי המפה (שנפתרה רק לאחרונה, ראה מאמרו של רובין וילסון בעל"ה 10 ו- 11). פיט היין, שכתב גם שירים בשם הבדוי קמבל (Kumbel), הציג את משחק המשושים (הקס) בפני סטודנטים שלו בשנת 1942. ב-1948 ג'ון נש (John Nash) המציא שוב באופן בלתי תלוי את המשחק, בעת היותו סטודנט באוניברסיטת פרינסטון בארה"ב, והוכיח שקיימת לו אסטרטגיית ניצחון על לוח מכל סדר $n \times n$. מאז המשחק ידוע בשמות נש או הקס.

שאלות למחשבה

1. האם הטענה הבאה נכונה?

<u>טענה</u>: המשחק ההפוך, כלומר המשחק שבו המנצח הוא זה שמאלץ את יריבו ליצור שרשרת רצופה לפניו, יכול להסתיים בתיקו על לוח של $n \times n$ אם n הוא זוגי, וחייב להסתיים בניצחון אם n אי-זוגי?

2. בכל אחד ממצבי המשחק המתוארים להלן, התור לבצע מהלך הוא של שחקן-×. מהו הצעד הראשון שעליו לבצע כדי להבטיח לעצמו ניצחון?



איור 5

שני שירים קצרים מאת Piet Hein (Kumbel):

The road to wisdo*m* . . .
well' it's easy to express:
lt's try
and try
and try again
but – err and err less.

Proble*m*s worthy
of attac*k*
prove their worth
by hitting bac*k*.

נספח

משחק המשושים (הקס) הוא דוגמה למשחקים של שני שחקנים המצטיינים בתכונות הבאות:

א. המשחק הוא סופי, כלומר הוא חייב להסתיים כעבור מספר סופי ידוע מראש של מהלכים. (במקרה של המשושים (הקס) -המספר הזה תלוי בגודלו של לוח המשחק).

ב. יש למשחק מצב פתיחה ידוע והבחנה ברורה בין מהלכיהם של שני השחקנים. (במקרה של המשושים (הקס) מצב הפתיחה הוא של לוח משחק נקי מסימנים והכרעה מיהו השחקן הפותח ומה סימנו).

ג. לאחר מהלך הפתיחה המשחק מתנהל כך שכל אחד מהשחקנים לסירוגין מבצע בתורו מהלך משלו על פי חוקי המשחק עד למצב סיום של המשחק המוגדר מראש.

ד. בסיום המשחק תוצאת המשחק (ניצחון, תיקו, מספר נקודות וכדי) ניתנת לקביעה באופן חד-משמעי בהתאם לכללי המשחק הידועים מראש.

ה. המשחק הוא בעל ידיעה שלמה, כלומר בכל שלב במשחק יודע כל אחד מהשחקנים בדיוק מה היו המהלכים של יריבו (וגם של עצמו, כמובן) עד לאותו מצב.

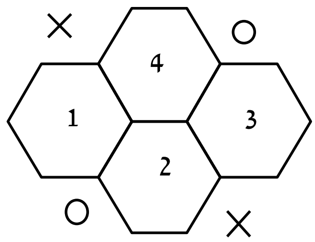
שאלת ביניים: האם המשחקים דמקה ושח-מט הם משחקים בעלי חמש התכונות הנזכרות?

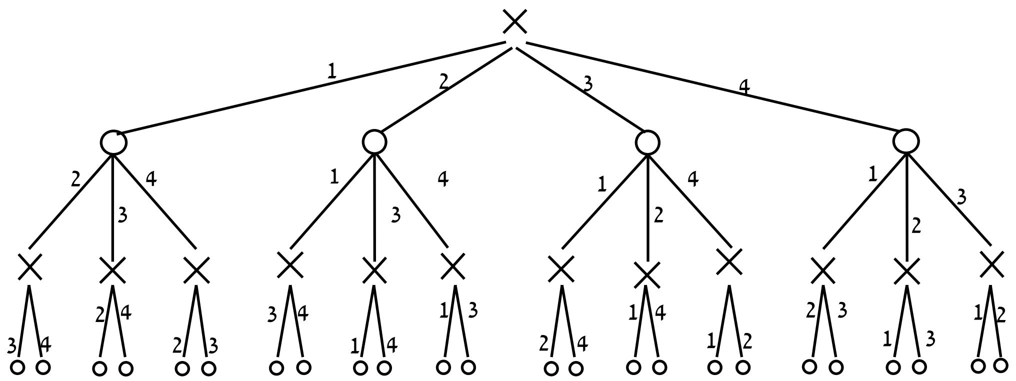
משפט צרמלו:

לגבי כל משחק של שני שחקנים שהוא סופי ובעל ידיעה שלמה יתכן רק אחד משני המקרים הבאים: או שכל אחד מהשחקנים יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו, ואם לא אז אחד ורק אחד משני השחקנים יכול להבטיח לעצמו את הניצחון.

(כלומר: במשחק שאינו יכול להסתיים בתיקו, לא יכול להיות ששחקן אחד יכול לכפות ניצחון על השני רק בחלק מהמצבים, אך אינו יכול לכפות ניצחון על השני ביתר המצבים האפשריים במשחק, או גרוע מזה, השני יכול לכפות ניצחון על הראשון במצבים אלה).

לפני ההוכחה: ככל משחק מסוג זה אפשר לתאר את המשושים (הקס) תיאור גרפי על ידי עץ.
איור 6 מתאר את עץ המשחק על לוח של 2×2. כל קודקוד בעץ מסמן מצב משחק של אחד משני השחקנים שבו על שחקן זה לבחור במהלך ולבצעו. המהלכים האפשריים לכל שחקן מתוארים על ידי הקטעים היוצאים מהקודקוד. היות שהמשחק הוא סופי, גם העץ הוא סופי ומשום כך יש לו, בנוסף לקודקודים הנזכרים, גם קודקודי סיום. כל חזרה על המשחק מראשיתו ועד סופו היא למעשה ענף אחד של העץ המוביל מקודקוד של השחקן הפותח לקודקוד של השחקן השני וממנו אל קודקוד של השחקן הראשון וכך הלאה עד לקודקוד סיום של העץ (ושל המשחק). העובדה שהמשחק הוא בעל ידיעה שלמה מתבטאת בכך שכל שחקן בתורו יודע באיזה קודקוד בעץ המשחק הוא נמצא (וגם איך הוא הגיע לשם).





משפט צרמלו טוען, איפוא, שבכל משחק של[6] שני שחקנים שהוא בעל ידיעה שלמה ושהענף המכסימלי שלו הוא באורך m, מתקיים אחד מהשניים: או שכל אחד מהשחקנים יכול למנוע ניצחון מהאחר ולהבטיח לעצמו לפחות תיקו, ואם לא אז קיימת אסטרטגיית ניצחון לאחד מהשחקנים, ורק אחד משני השחקנים יכול לכפות ניצחון על השני באמצעות אסטרטגיה זו.

הוכחת משפט צרמלו: ההוכחה היא באינדוקציה על m – האורך המכסימלי של ענף בעץ המשחק.

נ. מובשוביץ-הדר, משחק המשושים (הקס), 1994

בדיקה עבור m=1:

נתייחס למשחק כלשהו של שני שחקנים המקיים את תנאי המשפט שמסתיים אחרי צעד אחד לכל היותר, כלומר המשחק מסתיים מיד לאחר מהלך הפתיחה, והשחקן השני בכלל לא משתתף באופן פעיל במשחק. במשחק כזה, ברור שאם יש, בין מהלכי הפתיחה האפשריים, לפחות מהלך אחד כזה שעם ביצועו מסתיים המשחק במצב שמוגדר כניצחון, אז השחקן הפותח יכול להבטיח לעצמו ניצחון במשחק על ידי נקיטת צעד פתיחה זה. אם אין אף מהלך פתיחה כזה, אז לאחר כל פתיחה מסתיים המשחק מבלי שיש ניצחון לא לפותח וכמובן שלא ליריבו. כלומר, המשחק מסתיים בתיקו. נכון על כן לומר לגבי כל משחק בעל אורך מכסימלי של צעד אחד שמתקיים לגביו אחד מהשניים: או שהפותח יכול לכפות ניצחון על השני, או ששני השחקנים יכולים לכפות תיקו זה על זה. בכך הוכחה הטענה במשפט צרמלו בשביל m=1. (במקרה של המשושים (הקס), המשחק על לוח של משושה יחיד מסתיים בניצחון של הפותח, כמובן).

בדיקת המעבר מ- $m < k$ ל- $m = k$:

נניח, איפוא, שלכל משחק של שני שחקנים שהוא משחק בעל ידיעה שלמה ושאורכו המכסימלי קטן ממש מ- k, אכן מתקיימת הטענה של משפט צרמלו, ונוכיח זאת למשחק שאורכו המכסימלי הוא k. לפי ההנחה, לכל משחק כנ"ל שאורכו המכסימלי קטן ממש מ- k קיימת אסטרטגיית ניצחון שבנקיטתה יכול אחד השחקנים, ורק הוא, להבטיח לעצמו ניצחון, או שלכל אחד משני השחקנים קיימת אסטרטגיה שבנקיטתה יכול אותו שחקן להשיג תוצאה של תיקו ולפחות למנוע מהשני מלנצח. לאחר מהלך הפתיחה הופך כל משחק שאורכו המכסימלי הוא k למשחק חדש, שאורכו המכסימלי הוא $k - 1$. במשחק החדש, הקצר יותר, השחקן השני (של המשחק המקורי) הוא הפותח, וכל התנאים המאפשרים להחיל עליו את הנחת האינדוקציה, מתקיימים. לפיכך במשחק החדש הזה, מתקיים אחד מהשניים: או שקיימת אסטרטגיית ניצחון שבנקיטתה יכול אחד השחקנים, ורק הוא, להבטיח לעצמו ניצחון, או שלכל אחד משני השחקנים קיימת אסטרטגיה שבנקיטתה יכול אותו שחקן לפחות להשיג תוצאה של תיקו ולמנוע מהשני מלנצח. ברור שלכל מהלך פתיחה של המשחק המקורי, נוצר משחק קצר אחר, אבל על כל משחק קצר כזה חלה הנחת האינדוקציה. לגבי אוסף המשחקים הקצרים המתקבל, יכול לקרות רק אחד משלושה המקרים הזרים הבאים:

מקרה ראשון: קיים משחק קצר אחד לפחות, שבו השחקן שביצע את מהלך הפתיחה p של המשחק המקורי אשר ממנו נוצר המשחק הקצר הזה, יכול לכפות ניצחון על השני. במקרה כזה, הפותח (במשחק המקורי) יכול לכפות ניצחון גם במשחק המקורי על ידי כך שיבחר במהלך p כמהלך הפתיחה שלו וימשיך לשחק אחר כך לפי האסטרטגיה המבטיחה לו ניצחון במשחק הקצר.

מקרה שני: בכל המשחקים הקצרים הנוצרים מאוסף מהלכי הפתיחה האפשריים של המשחק המקורי, השני (במשחק המקורי) יכול לכפות ניצחון על הפותח (במשחק המקורי). במקרה כזה, השחקן השני (במשחק המקורי) יכול לכפות על הפותח ניצחון גם במשחק המקורי, כי העובדה שיש לו דרך להבטיח לעצמו את הניצחון בכל משחק קצר ויהיה צעד הפתיחה שממנו נוצר המשחק הקצר אשר יהיה, פירושה שהוא יכול לכפות ניצחון על הפותח את המשחק המקורי.

מקרה שלישי: אף אחד משני המקרים שסקרנו אינו תופס. הואיל והמקרה הראשון אינו תופס, למשחק המקורי לא קיים אף מהלך פתיחה כזה שבמשחק הקצר הנובע ממנו, הפותח (במשחק המקורי) יכול להבטיח לעצמו ניצחון. כלומר, מכל מהלך פתיחה של המשחק המקורי, נובע אחד מהשניים: או משחק קצר שבו השחקן השני יכול להבטיח לעצמו ניצחון, או משחק קצר שבו כל אחד משני השחקנים יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו. במילים אחרות אי-קיומו של המקרה הראשון פירושו שהשחקן השני יכול להבטיח לעצמו או ניצחון או לפחות תיקו לכל פתיחה של המשחק המקורי. הואיל וגם המקרה השני אינו תופס, קיים (לפחות) מהלך פתיחה אחד כזה שבמשחק הקצר הנובע ממנו כל אחד מהשחקנים יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו (האפשרות האחרת – שהניצחון במשחק הקצר יכול להיות מובטח לפותח – נשללת מפני שהאפשרות הראשונה כולה נשללה, ולא קיים מהלך פתיחה כזה). במילים אחרות, הפותח במשחק המקורי יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו.

מכאן שבמקרה השלישי, כל שחקן יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו.

לסיכום, במשחק שאורכו המכסימלי הוא k צעדים, חייב להתקיים אחד מהמצבים האלה: או שהפותח יכול לכפות ניצחון (מקרה ראשון לעיל), או שהשני יכול (מקרה שני לעיל), או שכל אחד מהשחקנים יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו (מקרה שלישי, לעיל). זוהי בדיוק הטענה של משפט צרמלו ועל כן הושלמה בכך גם בדיקתו של המעבר באינדוקציה. על פי אכסיומת האינדוקציה השלמה אפשר, איפוא, להסיק שמשפט צרמלו נכון למשחקים בעלי אורך מכסימלי סופי כלשהו.

ממשפט צרמלו אפשר להסיק שבכל משחק של שני שחקנים שהוא בעל ידיעה שלמה, שהענף המכסימלי שלו הוא באורך m סופי כלשהו, ושאינו יכול להסתיים בתיקו, קיימת לאחד ורק אחד משני השחקנים אסטרטגיית ניצחון שבאמצעותה הוא יכול תמיד לכפות ניצחון על השני. מי מהם הוא זה, ואיזו היא אסטרטגיית הניצחון שקיומה מובטח על ידי משפט צרמלו – אלו הן שתי שאלות שהתשובות עליהן במשחקים רבים אינן ידועות.

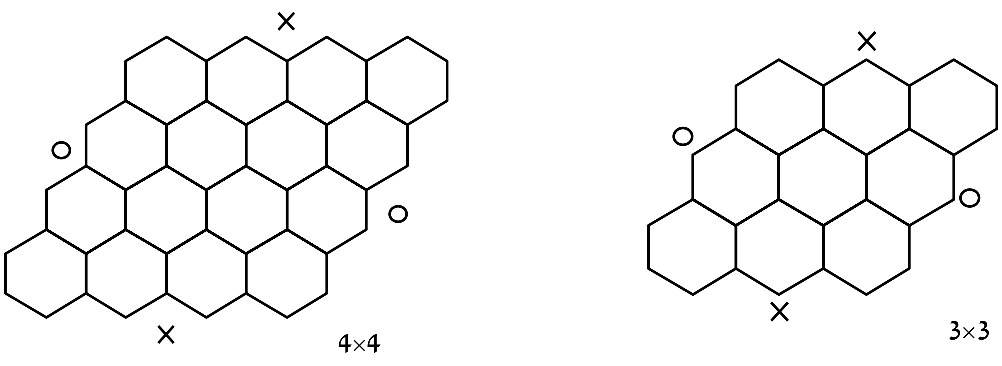
רשימת מקורות

אומן י., זמיר ש., טאומן י. [1991]: **תורת המשחקים**. האוניברסיטה הפתוחה, תל-אביב (יחידה 1 עמ' 7-9, יחידה 2 עמ' 22-23, עמ' 48 - ???).

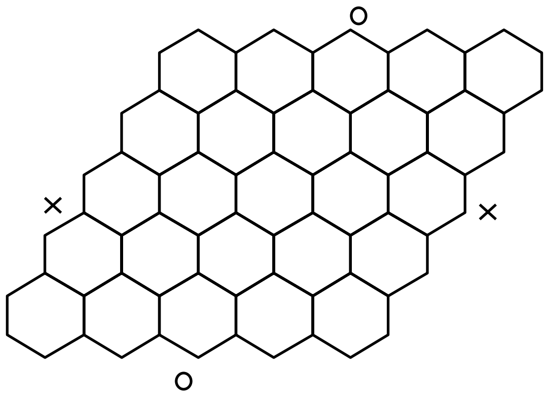
Gardner, M.: *Mathematical Puzzles and Diversions*, Pelican Books, 1965 (pp.70-77).

Pierce, J. R.: *Symbols, Signals and Noise: the Nature and Process of Communication,* Harper Modern Science Series, Harper & Brothers, New-York, 1961 (pp. 10-13).

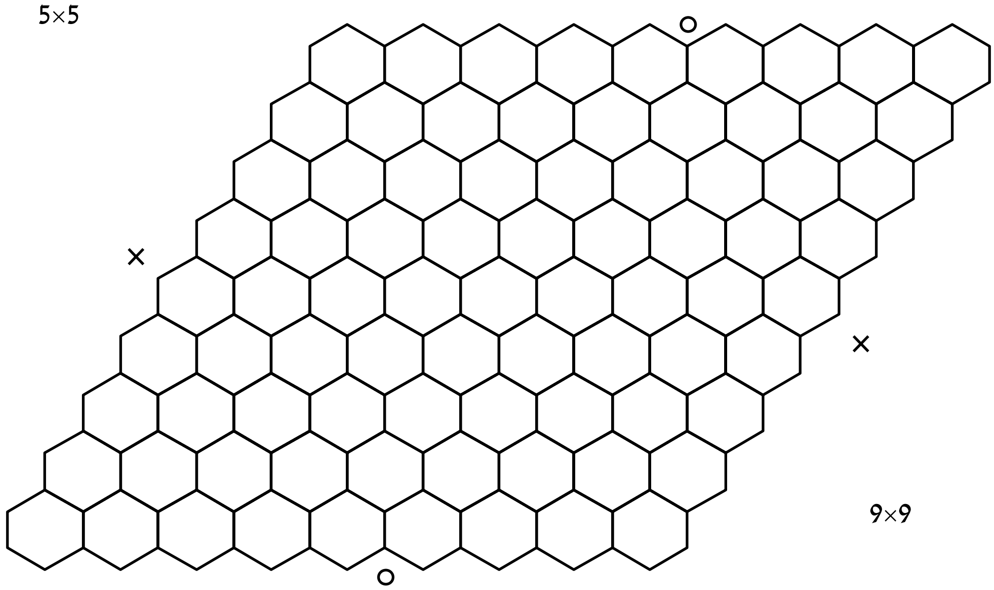
לוחות שונים למשחק המשושים (הקס)



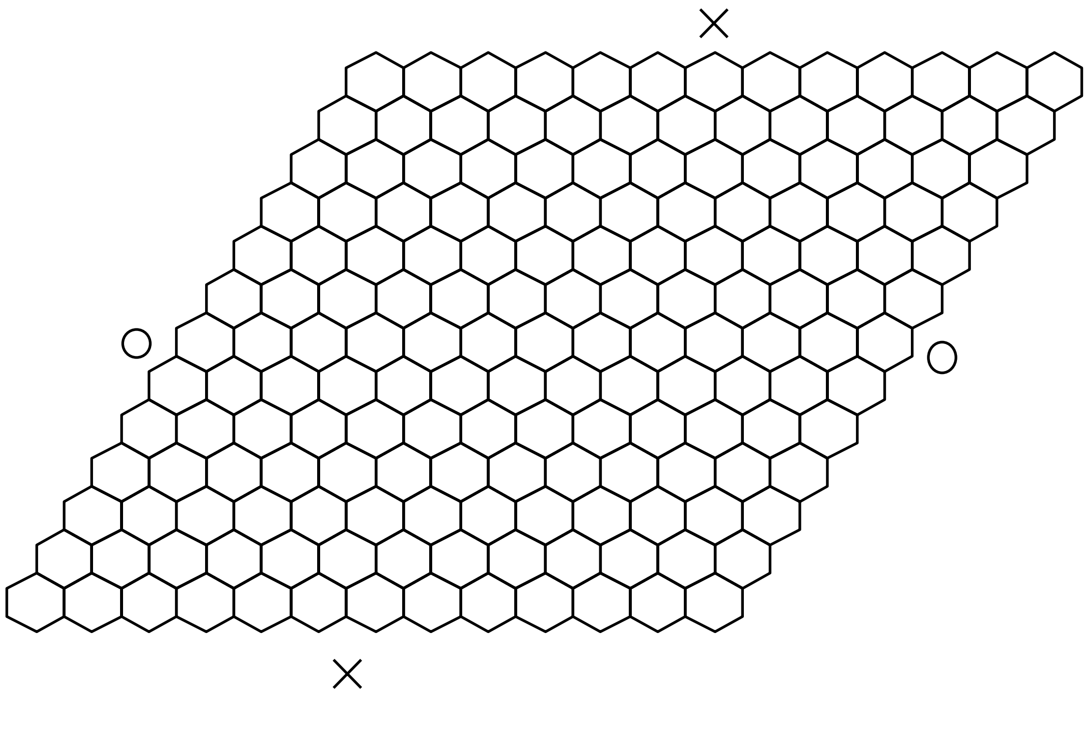
4×4 3×3



5×5



9×9



13×13