הנושא: קומבינטוריקה ואינדוקציה במתמטיקה עברית ואסלאמית בימי הביניים

הוכן ע"י: ויקטור כץ, University of the District of Columbia, Washington DC

תרגום מאנגלית: אורית חזן, הטכניון, חיפה.

תקציר: במאמר נסקרת ההסטוריה של התפתחות הקומבינטוריקה, תחום שהתפתח בעיקר בתרבות היהודית והאיסלאמית. במאמר מובאות דוגמאות מהספרות היהודית שבהן עוסקים בתמורות ובצירופים למשל של סדור אותיות עבריות.

מילות מפתח: הסטוריה של המתמטיקה, קומבינטוריקה, אינדוקציה, תמורות, צרופים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 14, ניסן תשנ"ד, מרץ 1994, עמודים 33-27.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

קומבינטוריקה ואינדוקציה במתמטיקה עברית ואסלאמית בימי הביניים

בכמה דרכים אפשר לסדר שישה אנשים בשורה? בכמה דרכים אפשר לבחור ועד של שלושה חברים מתוך קבוצה של עשרים חברים? מה ההסתברות לזכות בלוטו כאשר עליך לבחור שישה מספרים נכונים מתוך עשרים וארבעה? רעיון הספירה, הנקרא היום תמורות וצירופים, הוא מושג חשוב, שימושי בשטחים רבים הן במתמטיקה טהורה והן במתמטיקה יישומית. יסודותיו נלמדים, בדרך כלל, בבית-ספר תיכון. טווח השימושים של רעיונות אלה הוא רחב ואת השיטות שבהן משתמשים לפיתוח הנוסחאות אפשר ליישם גם לבעיות ספירה אחרות, כמו למשל בעיות הנמצאות במרכז תורת ההסתברות. במאמר זה נסקור את תחילת ההיסטוריה של שיטות ספירה אלה, היסטוריה שאפילו עתה אין יודעים את כולה. מה שידוע הוא שבסיסם של מושגים אלה, שלא כמו חלקים אחרים מהמתמטיקה המודרנית, אינו ביוון. מסיבה כלשהי, היוונים כנראה שלא עסקו בבעיות כאלה בכלל. האזכור הראשון של בעיות ספירה מסוג זה מופיע במתמטיקה ההודית, בעוד שפיתוח מפורט של נוסחאות והוכחותיהן הושלם בעולם האסלאם והיהדות מן המאה השתים-עשרה עד המאה הארבע-עשרה. כפי שיתברר, הרבה מהשיטות המקורית לפתרון בעיות ספירה מהסוג שהוזכר, אפשר להתאימן להוראה של היום.

ידוע שבעיות תמורות וצירופים הופיעו במתמטיקה הודית עתיקה, אך כמו ברוב המקרים, קשה לקבוע את תאריך הופעתן. יתר על כן, בחומר הכתוב שבידינו אי אפשר למצוא הוכחות או נימוקים לפרוצדורת החישוב המוצעת. (יש להניח שליוצרי חומרים אלה היו הנמקות שאפשר להסבירן בעל-פה לתלמידיהם, אבל בדרך כלל המסורת הכתובה סתומה מאוד). למשל, במסה הרפואית של Susruta שנכתבה כנראה במאה השישית לפני הספירה, מצויה טענה שאפשר ליצור 63 צירופים משישה טעמים שונים - מר, חמוץ, מלוח, תפל, מתוק, חריף - ראשית על-ידי לקיחת אחד מהם בכל פעם, אחר-כך על-ידי לקיחת שניים מהם בכל פעם, שלושה בכל פעם וכו׳. [1] במילים אחרות, קיימים שישה טעמים בודדים, חמישה-עשר צירופים של שני טעמים, עשרים צירופים של שלושה טעמים וכו׳. בעבודה המיוחסת ל- Jains בערך מהמאה השלישית לפני הספירה, נמצאים חישובים הדנים בנושאים כאלה, נושאים כמו טעמים וקטיגוריות פילוסופיות. מכל מקום, בכל הדוגמאות האלה, המספרים הם די קטנים עד שדי יהיה בספירה פשוטה כדי למצוא את התשובה. לא ידוע אם פותחו הנוסחאות המתאימות.

לעומת זאת עבודתו של Varahamihira מהמאה השישית עוסקת בערכים גדולים יותר. מוצגת שם הטענה הפשוטה ש״אם משנים כמות של 16 חומרים בארבע דרכים שונות, התוצאה תהיה 1820״. [2] במילים אחרות, הואיל ו- Varahamihira ניסה ליצור בושם על-ידי שימוש בארבעה מרכיבים מתוך 16, הוא חישב שיש בדיוק 1820 $(=C_4^{16})$ דרכים שונות לבחור את המרכיבים. לא סביר להניח שהמחבר אכן ספר את כל 1820 הצירופים האלה, ולכן אנו יכולים להניח שהנוסחה לחישוב מספר הצירופים היתה ידועה. אף-כל-פי-כן, אי אפשר למצוא עדות על קיום נוסחה כזו בספרות המצויה בידינו.

עבודה מוקדמת אחרת העוסקת בתמורות וצירופים היא **ספר היצירה**, ספר קבלה עברי העוסק באותיות האלף-בית העברי. תאריך כתיבתו אינו ידוע, אבל מעריכים שהוא נכתב לפני המאה השלישית לספירה. נתבונן בשני קטעים:

> עשרים ושתיים אותיות יסוד קבען כגלגל כמין חומה ברל״א שערים... כיצד צרפן שקרלן והמירן **א** עם כלן וכלן עם **א ב** עם כלם וכלן עם **ב** וחוזרות חלילה ונמצאות ברל״א שערים [3]

כֵּיצַד צָרְפָן שָׁקְלָן וְהֵמִירָן א עִם כֻּלָּן וכֻלָּן עִם א ב עִם כֻּלָּן וְכֻלָּן עִם ב וְחוֹזְרוֹת חָלִילָה וְנִמְצָאוֹת בְּרל״א שְׁעָרִים וְנִמְצָא כָּל הַיְצוּר וְכָל הַדִּבּוּר יוֹצֵא מִשֵּׁם אֶחָד:

> שתי אבנים בונות שני בתים שלש אבנים בונות ששה בתים ארבע אבנים בונות ארבעה ועשרים בתים חמש אבנים בונות מאה ועשרים בתים שש אבנים בונות שבע מאות ועשרים בתים שבע אבנים בונות חמשת אלפים (וארבע) וארבעים בתים מכאן ואילך צא וחשוב מה שאין הפה יכולה לדבר ואין האזן יכולה לשמוע. [4]

שְׁתֵּי אֲבָנִים בּוֹנוֹת שְׁנֵי בָתִּים שָׁלֹשׁ אֲבָנִים בּוֹנוֹת שִׁשָּׁה בָתִּים אַרְבַּע אֲבָנִים בּוֹנוֹת אַרְבָּעָה וְעֶשְׂרִים בָּתִּים חָמֵשׁ אֲבָנִים בּוֹנוֹת מֵאָה וְעֶשְׂרִים בָּתִּים שֵׁשׁ אֲבָנִים בּוֹנוֹת שְׁבַע מֵאוֹת וְעֶשְׂרִים בָּתִּים שֶׁבַע

"קומבינטוריקה ואינדוקציה במתמטיקה עברית ואסלאמית בימי הביניים", ויקטור כץ
על"ה 14, ניסן תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

אֲבָנִים בּוֹנוֹת חֲמֵשֶׁת אֲלָפִים (וארבע) וְאַרְבָּעִים בָּתִּים מִכַּאן וְאֵילָךְ צֵא וַחֲשׁוֹב מַה שֶּׁאֵין הַפֶּה יְכוֹלָה לְדַבֵּר וְאֵין הָאֹזֶן יְכוֹלָה לִשְׁמוֹעַ:

בקטע הראשון המחבר שם לב שקיימים 231 צירופים לבחירת שני איברים מתוך קבוצה של 22 (21/2 · 22). פרשן מהמאה העשירית, סעדיה גאון (892-942) שנולד במצרים אך בילה את רוב חייו בבבל, שם לב לכך שילדים בארץ ישראל לומדים לאיית ולהגות את כל 22^2=484 זוגות אותיות האפשריים. יתר על כן, הוא ראה שכדי לקבל את התוצאה הרשומה, השמיט מחבר ספר היצירה את כל 22 ההופעות של אותיות זהות (כמו **אא**) וחילק את המספר לשתיים.

בספר יצירה נידונו גם תמורות. בספר חושב שמספר המילים שאפשר ליצור מ- 2, 3, 4, 5, 6 ו- 7 אותיות הוא !2, !3, !4, !5, !6 ו- !7 בהתאמה. סעדיה גאון הכליל תוצאה זו כך:

> אם אדם רוצה לדעת כמה מילים אפשר לבנות ממספר גדול יותר של אותיות, למשל מ– 8, 9, 10 ... הכלל הוא שיש לכפול את תוצאת המכפלה הראשונה במספר העוקב ומה שמתקבל זה המספר הכולל. הנה ההסבר לכך: קיימות שתי תמורות של שתי אותיות, אם אתה כופל 2 ב– 3, אתה מקבל 6, וזהו מספר התמורות של שלוש אותיות... אם תרצה לדעת מהו מספר התמורות של 8 אותיות, כפול את 5040 שקיבלת מ– 7 ב– 8 ותקבל 40320 מילים, ואם אתה מחפש את מספר התמורות של 9 אותיות, כפול את 320 40 ב– 9 ותקבל 880 362. [5]

היות שהמילה הארוכה ביותר בכתבי הקודש היא בת אחת עשרה אותיות, סעדיה חישב אפילו את מספר התמורות של אחת-עשרה אותיות: 800 916 39.

שבתי דונולו (913-970), שחי בדרום איטליה, הגיע לכלל זה בצורה מפורשת יותר כאשר שם לב כי

> את האות הראשונה של מילה בת שתי אותיות אפשר להחליף פעמיים, ולכל אות ראשונה במילה בת שלוש אותיות אפשר להחליף את שאר האותיות ולקבל שתי מילים בנות שתי אותיות – שלוש פעמים. וכל הסידורים של מילים בנות שלוש אותיות מתאימים לכל אחת מארבע אותיות שאפשר לשים ראשונות במילים בנות ארבע אותיות: אפשר לבנות מילה בת שלוש אותיות בשש דרכים, וכך עבור כל אות ראשונה של מילה בת ארבע אותיות קיימות שש דרכים – הכל ביחד מביא לעשרים וארבע מילים, וכך הלאה. [6]

יתר על כן, דונולו שם לב שאם משתמשים בכל האותיות ומסדרים אותן מחדש בדרכים שונות, אפשר לקבל את כל המילים המצויות על האדמה מכל אורך שהוא. "אבל המספר גדול מדי לחישוב על-ידי בשר ודם".

מעניין לציין שגם אחד הכותבים האסלאמיים הראשונים שעסקו בתמורות, עסק בהן בהקשר של אותיות האלף-בית - במקרה שלו אותיות האלף-בית הערבי. היה זה אל-קליל איבן אחמד (717-791), שידע כיצד לחשב את מספרן של המילים שאפשר לקבל מ- 2, 3, 4, או 5 אותיות מתוך 28 אותיות האלף-בית הערבי. מחברים אסלאמיים מוקדמים אחרים נתנו תשובות הקשורות בתמורות ובצירופים כשדנו בקבוצות קטנות אחרות.

במאה התשיעית, חיבורו של Mahavira ההודי, Ganitasarasangraha, הוסיף פרטים נוספים הדנים בצירופים. המחבר מתאר בפירוט את הכלל לחישוב צירופים:

> הכלל העוסק במספר הצירופים השונים שאפשר ליצור מדברים נתונים: נתחיל באחת ונעלה באחת. ונרשום את המספרים בסדר עולה עד מספר נתון, ובשורה מתחת נרשום את המספרים בסדר יורד (בהתאמה). אם המכפלה של אחד, שניים, שלושה מספרים או יותר מהשורה העליונה הלקוחים מימין לשמאל מתחלקת במכפלה המתאימה של אחד, שניים, שלושה מספרים או יותר מהשורה התחתונה, הלקוחים אף הם מימין לשמאל, הכמות המבוקשת של צירופים בכל מקרה כזה מתקבלת כתוצאה. [7]

בכל מקרה Mahavira לא נתן שום הוכחה לנוסחה:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

כל מה שהציג היו שתי בעיות שבהן יש להפעיל את הכלל, אחת עבור צירופים של טעמים - כפי

שעשה קודמו - ואחת עבור צירופים של אבני-חן על שרשרת, שיכולות להיות יהלומים, ספירים, אבני ברקת, אלמוגים ופנינים.

חישובים אחרים מופיעים במאות הבאות גם בספרות ההודית וגם בספרות האסלאמית. אל-סמואל בן יחיא בן עבאס אל-מגריבי (נפטר 1175), יהודי מבגדד שהתאסלם, עסק בתמורות כאשר פיתח שיטות לפתירת מערכת משוואות עם מספר רב של משוואות. למעשה, הוא רשם באופן שיטתי את כל 210 הצירופים של שישה פריטים הלקוחים מתוך עשרה. הוא לא ציין כיצד לחשב את מספר התמורות במקרים אחרים. באופן דומה, גם Bhaskara (1114-1185), בסביבות אמצע המאה השתים-עשרה בהודו, רשם כללים ומספר דוגמאות של סוגים שונים של בעיות קומבינטוריות, כולל הכלל שכתב Mahavira :

> נסדר את הספרות החל מאחת ומעלה, בהפרשים של אחת, בסדר הפוך, ונחלק אותם על-ידי אותם המספרים בסדר הרגיל; ונניח שהעוקב מוכפל במספר הקודם לו, והבא אחריו בתוצאה הקודמת. התוצאות השונות הן השינויים, אחד-ים, שניים-ים, שלוש-ים וכו׳. זהו כלל כללי. אפשר להשתמש בו בתורת המשקל (השיר), במציאת הווריאציות השונות של המקצב; באמנויות, כגון בארכיטקטורה, כדי לחשב את השינויים האפשריים על-פני פתח בניין, ובמוסיקה לחשב את הסכימה של תמורות מוסיקליות, ברפואה לחשב את הצירופים של טעמים שונים. [8]

Bhaskara נתן דוגמה בתורת המשקל :

> הגד במהירות, חבר, כמה תמורות אפשריות יש בשיר הכתוב במקצב הגייטרי (gayatri) ואמור כמה צירופים יש עם הברה ארוכה אחת, שתי הברות ארוכות, שלוש הברות ארוכות?

ואז הוא רשם את המספרים :

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1

ושם לב שקיימים שישה שינויים עם הברה ארוכה אחת, 15 - עם שתי הברות ארוכות, 20 - עם שלוש, 15 - עם ארבע, 6 - עם חמש ו- 1 - עם שש. אחר-כך הוא שם לב שקיימת דרך אחת כאשר כל ההברות קצרות. מחישוב זה נבע שהמספר הכולל של צירופים הוא 64.

כמו כן, Bhaskara שם לב שמספר התמורות בקבוצה של n איברים הוא !n. ואז הוא שאל :

> כמה גירסאות שונות של האל Sambhu אפשר ליצור על-ידי החלפת עשרת סמליו המוחזקים בצורה הדדית בידיו השונות: כלומר החבל, קרס הפיל, הנחש, התוף הקטן, הגולגולת, הקלשון, המטה, הפגיון, החץ והקשת? [9]

הוא חישב את התוצאה 3628800 = !10. Bhaskara מוסיף ומראה כיצד לחשב את מספר התמורות בקבוצת ספרות כאשר חלק מהספרות מופיעות יותר מפעם אחת. למשל, הוא הראה שקיימות 6 תמורות של הספרות 2, 2, 1, 1, ו- 20 תמורות של הספרות 8, 4, 5, 5, 5.

ושוב, למרות שהוא נותן כללים מפורטים אין Bhaskara מציג כל הוכחה שהיא או אפילו מקור לתוצאותיו. היה זה אברהם אבן עזרא (1090-1167), בן דורו של Bhaskara, שחי בדרום צרפת, אשר נתן לבסוף מקור מפורט לכלל של מספר הצירופים. הוא עשה זאת בקשר לדיון אסטרולוגי. אבן עזרא התעניין בקביעת מספר השילובים השונים של שבעה כוכבי לכת - השמש, הירח, כוכב-חמה, נוגה, מאדים, צדק ושבתאי. למעשה, הוא הראה כיצד לחשב את המספר C_k^7 עבור כל k מ- 2 עד 7. ואז שם לב שהסכום הכולל הוא 120.

אבן עזרא התחיל עם המקרה הפשוט, כלומר שמספר הזוגות הוא 21. מכיוון שקיימים שישה כוכבי לכת שאפשר להצמידם לצדק, חמישה (חוץ מצדק) שאפשר לצרפם לשבתאי וכן הלאה, מספר זה שווה לסכום השלמים מ- 1 עד 6. אבן-עזרא שם לב שאפשר למצוא את סכום המספרים מ- 1 ועד כל מספר רצוי על-ידי הכפלת המספר במחציתו ועל-ידי הכפלתו בחצי, כלומר,

$$\sum_{i}^{n} i = n\left(\frac{n}{2}\right) + n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

מכך נובע כמקרה פרטי ש- $C_2^7 = \frac{6(7)}{2} = 21$ ובאופן כללי ש- $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

אבן עזרא הסביר את הדרך לחישוב מספר הצירופים של שלושה כוכבי לכת:

> ראשית נשים את שבתאי עם צדק ואתם אחד מהשאר. מספרם של השאר הוא חמש... התוצאה היא 15. ואלו הם הצירופים של צדק. [10]

כלומר, קיימים חמישה צירופים של שלושה כוכבי לכת שבהם נמצאים צדק ושבתאי, ארבעה צירופים שבהם נמצאים צדק ומאדים אבל לא שבתאי, וכן הלאה. לכן קיימים C_2^6 צירופים משולשיים שבהם נמצא צדק. בצורה דומה, כדי למצוא את הצירופים המשולשיים שבהם נמצא שבתאי אבל צדק אינו נמצא בהם, אבן עזרא היה צריך לחשב את מספר הדרכים שבהן אפשר לבחור שני כוכבי לכת מתוך חמשת הנותרים: $C_2^5 = 10$. אחר-כך הוא חישב את מספר הצירופים המשולשיים שבהם נמצא מאדים, אבל צדק ושבתאי אינם נמצאים בהם. לבסוף, הוא סיים עם התוצאה: $C_3^7 = C_2^6 + C_2^5 + C_2^4 + C_2^3 + C_2^2 = 15+10+6+3+1 = 35$

אבן עזרא חישב בשיטות דומות את מספר הצירופים שבהם נמצאים ארבע כוכבי לכת. למציאת הצירופים שצדק נמצא בהם יש לבחור שלושה כוכבי לכת מתוך ששת הנותרים. למציאת הצירופים ששבתאי נמצא בהם וצדק אינו נמצא בהם יש לבחור שלושה כוכבי לכת מתוך חמישה. ולבסוף,

$$C_4^7 = C_3^6 + C_3^5 + C_3^4 + C_3^3 = 20+10+4+1 = 35$$

אבן עזרא הסתפק בציון התוצאה עבור צירופים שבהם נמצאים חמישה, שישה ושבעה כוכבי לכת. בעיקרו של דבר, הוא טען טענה עבור n=7, שאפשר להכלילה לכלל הקומבינטורי:

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^{n-2} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$$

עבודתו האסטרולוגית של אבן עזרא המכילה את החומר הזה הופיעה בתרגום ללטינית בשנת 1281. הגירסה הלטינית רומזת על כך שהתרגום נעשה מערבית, וייתכן כי גם הגירסה הערבית היא מתורגמת, אולם לא נמצא עדיין כתב-יד ערבי המוכיח זאת. בכל אופן, מעניין שבתחילת המאה השלוש-עשרה Ahman al-Ab'dari ibn Mun'im דן באותו כלל שבו דן אבן עזרא, ביתר פירוט. לא ידוע הרבה על אבן מוּנְעִים אבל מניחים שהוא חי בחצר המלוכה של שושלת אלמוהאד במרקש (הנמצאת היום במרוקו) בתקופת מלכותו של אבן יעקוב אל-נסיר (1199-1213). למרות ששושלת אלמוהאד שלטה בתחילה על אימפריה רחבה כולל חלק מצפון אפריקה וספרד, אל-נסיר עצמו הובס על-ידי קואליציה של מלכים נוצריים בקרב לס-נאבאס דה טולוסה בספרד, וכך איבד חלקים רבים מספרד.

אבן מונעים התעניין בעיקר בשאלה העתיקה העוסקת במספר המילים שאפשר ליצור משלוש אותיות מתוך האלף-בית הערבי. אבל לפני שדן בשאלה זו, הוא עסק בבעיה אחרת: כמה חבילות שונות של צבעים אפשר ליצור מעשרה צבעים שונים של משי. הוא חישב זאת בזהירות. ראשית, אם משתמשים רק בצבע אחד, קיימות 10 אפשרויות, כלומר: $C_1^{10} = 10$. כדי לחשב את מספר האפשרויות לבחירת שני צבעים, אבן מונעים ערך רשימה של זוגות:

$$(C_2, C_1) ; (C_3, C_1) ; (C_3, C_2) ; \ldots \ (C_{10}, C_1) ; (C_{10}, C_2) , \ldots , (C_{10}, C_9) ;$$

ואז שם לב כי: $C_2^{10} = 1+2+\ldots+9 = C_1^1 + C_1^2 + \ldots + C_1^9 = 45$

את C_2^k אפשר לחשב בצורה דומה בשביל ערכי k קטנים מ- 10. את החישוב של C_3^{10} ביצע אבן מונעים בצורה אנלוגית.

> כדי לקבוע את מספר הצירופים של שלושה צבעים, יש לצרף את הצבע השלישי עם הצבע השני ועם הצבע הראשון, ואז לצרף את הצבע הרביעי עם כל אחד מהזוגות שאפשר ליצור מתוך שלושת הצבעים הקודמים – הראשון, השני והשלישי – ואז לצרף את הצבע החמישי עם כל אחד מהזוגות שאפשר ליצור מארבעת הצבעים הקודמים, ... עד לצירוף הצבע העשירי לכל אחד מהזוגות שאפשר ליצור מתשעת הצבעים הקודמים. אבל כל זוג צבעים הוא צירוף מהשורה השניה. מסיבה זו, ... במקרה של הצבע הרביעי נכתוב שמספר הצירופים המתקבלים מצירוף הצבע הרביעי לכל אחד מהזוגות הנוצרים מהצבעים הקודמים שווה למספר הצרורות

של שני צבעים המורכבים מהצבעים הקודמים לצבע הרביעי, ומספר זה שווה גם לסכום שני המספרים הראשונים בשורה השניה, כלומר 3. לכן נכתוב 3 במקרה השני בשורה השלישית ... [11]

במילים אחרות, עבור כל c_k $k = 3, 4, \ldots 10$ אבן מונעים לקח את הזוגות מהחישוב הקודם בעלי אינדקסים קטנים מ- k, למשל:

$$(c_3 , (c_2 , c_1)) ; (c_4 , (c_2 , c_1)) , (c_4 , (c_3 , c_1)) , (c_4 , (c_3 , c_2)) ; (c_5 , (c_2 , c_1)) , \ldots$$

בדרך זו C_3^{10} שווה לסכום $1+3+6+\ldots+36 = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \ldots + C_2^9$

אפשר לחשב בקלות כל אחד מהמספרים האלה מתוך חישובי השורה הקודמת. המילה "שורה" קשורה לעובדה שאבן מונעים הציג תוצאות אלה בטבלה. בשורה הראשונה בטבלה הופיעה רשימת המספרים $1, 2, \ldots 10 (= C_1^1, C_1^2, \ldots, C_1^{10})$ בשורה השנייה רשימת המספרים $1, 3, 6, \ldots 36 (= C_2^2, C_2^3, C_2^4, \ldots, C_2^9)$ וכן הלאה. אבן מונעים התייחס באופן עקבי לטבלה זו - שאחד מתוצאותיה הוא משולש פסקל - כדי להראות כיצד אפשר לבצע בקלות את החישובים (ראה ציור)

جدول جمع الجداول											وهكذا تخطيط المثال في الجدول
1	1										من عشرة الوان
10	9	1									جدول الشراريب التي من تسعة الوان تسعة الوان
45	36	8	1								جدول الشراريب التي من ثمانية الوان ثمانية الوان
120	84	28	7	1							جدول الشراريب التي من سبعة الوان سبعة الوان
210	126	56	21	6	1						جدول الشراريب التي من ستة الوان ستة الوان
252	126	70	35	15	5	1					من خمسة الوان خمسة الوان
210	84	56	35	20	10	4	1				من اربعة الوان اربعة الوان
120	36	28	21	15	10	6	3	1			من ثلاثة الوان ثلاثة الوان
45	9	8	7	6	5	4	3	2	1		من لونين لونين
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	من لون لون
جميع الألوان	لون عاشر	لون تاسع	لون ثامن	لون سابع	لون سادس	لون خامس	لون رابع	لون ثالث	لون ثان	لون اول	

למרות שאבן מונעים התרכז במספר $n = 10$, הוא תאר כמה מתכונותיו המרכזיות של המספר C_k^n בתהליך בנייה זה. בכתב-היד הוא המשיך לדון בתמורות בדרך השונה במעט מזו של שבתי דונולו.

הבעיה היא: אנו רוצים לקבוע תהליך קנוני להחליט מהו מספר התמורות של האותיות במילה שמספר אותיותיה ידוע ואף אות אינה מופיעה בה יותר מפעם אחת. אם המילה מורכבת משתי אותיות, ברור שקיימות שתי תמורות, היות שניתן להפוך את האות הראשונה להיות השנייה, ואת האות השנייה להיות הראשונה. אם נוסיף עוד אות ונסתכל במילה בת שלוש אותיות, ברור שבכל אחת מהתמורות עם שתי אותיות של מילה בת שתי אותיות, האות השלישית יכולה להיות לפני שתי האותיות, בין שתי האותיות, או במקום האחרון. על כן לשלוש האותיות של מילה בת שלוש אותיות – שש תמורות. עתה, אם נוסיף למילה אות נוספת ונקבל מילה בת ארבע אותיות, האות הרביעית תהיה בכל אחת משש התמורות (באחת מארבעת המקומות האפשריים). לכן למילה בת ארבע אותיות יש עשרים וארבע תמורות ... [12].

אבו מונעים סיכם בכך שאין חשיבות לאורך המילה - תמיד אפשר למצוא את מספר התמורות של אותיותיה על-ידי הכפלת אחד בשתיים, בשלוש, בארבע, בחמש וכו׳. עד למספר האותיות שבמילה. ״התוצאה שווה למספר התמורות של אותיותיה של המילה, וזה מה שרצינו להראות״.

אבן מונעים הציע כמה בעיות נוספות, כולל תמורות עם חזרות, ואז דן בעניינים העוסקים בהיגוי סימני תנועה. מטרתו הסופית היתה לקבוע את המספר האפשרי של מילים בערבית, ולאחר דיון במשמעות העניין הוא חישב את המספר תוך שימוש בכמה מהרעיונות שהוזכרו. מסתבר שלמספר זה יש שש-עשרה ספרות עשרוניות.

מאוחר יותר במאה השלוש-עשרה, אבו-אל-עבאס, אחמד אל-מארקושי אבן אל-בנא (1256-1321), שחי אף הוא במרקש, המשיך את עבודתו של אבן מונעים. [13] בעבודתו שלו הציג אבן אל-בנא בצורה יעילה את אותה הוכחה הדנה במספר התמורות של קבוצה בת n איברים, אבל גם דן בערכים C_k^n, אשר איפשרו לו לפתח את הנוסחה ההודית לחשב אותם. הוא הראה תחילה כי $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$ על ידי טיעון ספירה פשוט: a_1 מצורף אל כל אחד מ- n-1 האיברים, a_2 מצורף אל כל n-2 האיברים וכן הלאה, כך ש- C_2^n שווה לסכום המספרים n-1, n-2, n-3, ...,2, 1. אבל אז הראה אבן אל בנא גם כי $C_k^n = \frac{n-(k-1)}{k} C_{k-1}^n$. נסתכל תחילה ב- C_3^n. לכל קבוצה של שני איברים מתוך n האיברים, נצרף אחד מ- n-2 האיברים הנותרים. נקבל C_2^n (n-2) קבוצות שונות. אבל היות ש- $C_2^3 = 3$, כל אחת מקבוצות אלה מופיעה שלוש פעמים. למשל, הקבוצה {a,b,c} תופיע כ: { {a,b },c} , { {a,c },b} , { {b,c },a} }. לכן, כפי שנטען לפני-כן: $C_3^n = \frac{n-2}{3} C_2^n$.

בצעד הבא, אנו יודעים ש- $C_3^4 = 4$. נובע מכך שאם אנו מצרפים לכל קבוצה עם שלושה איברים אחד מ- n-3 האיברים הנותרים, סך הכל C_3^n $(n-3)$ גדול פי ארבעה מ- C_4^n. במילים אחרות: $C_4^n = \frac{n-3}{4} C_3^n$ כנדרש. טיעון דומה תופס עבור כל ערך של k. אם נחבר תוצאות אלה, ברור כי $C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... k}$. זו הנוסחה לחישוב מספר הדרכים שבהן אפשר לבחור k איברים מתוך קבוצה של n איברים. על-ידי שימוש בתוצאה זו ובתוצאה על תמורות, אבן אל-בנא הראה בקלות על-ידי כפל שהמספר P_k^n, המציין תמורות של k איברים מתוך קבוצה בת n איברים, הוא $P_k^n = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$. אפשר לראות בהוכחת התוצאות הקומבינטוריות של אבן אל-בנא את הבסיס לרעיון של הוכחה באינדוקציה. בכל אחד מהמקרים הוא התחיל עם תוצאה ידועה עבור ערך קטן ואז הוא השתמש בו ובנה צעד אחר צעד את התוצאה עבור ערכים גדולים יותר. אבל אבן אל-בנא לא הכריז על העיקרון האינדוקטיבי כעל שיטת הוכחה. דבר זה עשה בן דורו הצעיר ממנו במקצת, לוי בן גרשום (1288-1344), שחי בסביבות אורנז׳, בדרום צרפת. למרות שללא ספק לוי קרא חלק מהמתמטיקה האסלאמית שתורגמה לא מכבר לעברית, לא ידוע אם הוא היה מודע לעבודותיהם של אבן אל-בנא ושל אבן מונעים. בכל מקרה, לוי הציג אותן תוצאות בסיסיות שהציג אבן אל-בנא, אבל בספרו ״מעשה חושב״ משנת 1321 הוא כתב מחדש את ההוכחות במבנה של הוכחות באינדוקציה. כלומר, בכל אחת מהתוצאות הבסיסיות הוא ניסח את צעד האינדוקציה (המעבר מ- n ל- n+1) ואת העובדה שהתוצאה נכונה עבור מספר קטן מסוים. הוא שם לב אז שעובדה זו גוררת את נכונות התוצאה באופן כללי. נתייחס עתה לרעיונותיו של לוי בן גרשום בנושא הקומבינטוריקה. חשוב לשים לב לעובדה שלוי, כמו אבן אל-בנא, ניסח את תוצאותיו בצורה מופשטת, ולא במונחים של איברים מסוימים, כמו כוכבי לכת או אותיות האלף-בית. במילים אחרות, בתקופתו כבר הפכו תוצאות אלה לחלק מהמתמטיקה ולא נחשבו עוד כשייכים לתחומים אחרים.

לוי בן גרשום התחיל את סדרת תוצאותיו עם התוצאה שמספר התמורות של מספר נתון n של איברים הוא n!. נציג את הצורה אשר בה ניסח לוי את צעד האינדוקציה בהוכחה במילים - ככלות הכל, לוי בן גרשום, כמו קודמיו, לא השתמש בסמלים.

כאשר היו מחברות מספר מונה מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד מספר מה הנה מחברות המספר הנמשך אחר המונח מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד הם כמו שטח מספר המחברות הקודמות במספר הנמשך אחר המספר המונח.

ובלשוננו: אם מספר התמורות של מספר נתון [n] של איברים שונים שווה למספר נתון [p_n], אזי מספר התמורות של קבוצת איברים שונים המכילה מספר אחד נוסף שווה למכפלת המספר הקודם של התמורות והמספר הנתון הבא [$P_{n+1} = (n+1) P_n$]. [14]

לוי בן גרשום דן בנושא זה בצורה דומה לזו של שבתי דונולו. בהינתן תמורה, נניח abcde, של n איברים מקוריים ואיבר חדש f, הוא שם לב ש- fabcde היא תמורה של הקבוצה החדשה. מכיוון שקיימות P_n תמורות של הקבוצה המקורית, מספר התמורות של הקבוצה החדשה המתחילות ב- f שווה למספר זה. נוסף על כך, אם אחד מהאיברים המקוריים, למשל e, מוחלף באיבר החדש f, גם אז קיימות P_n תמורות של הקבוצה a, b, c, d, f ולכן מספר זה שווה למספר התמורות של הקבוצה החדשה כאשר e נמצא במקום הראשון. מכיוון שאפשר לשים כל אחד מ-n איברי הקבוצה המקורית, כמו גם את האיבר החדש, במקום הראשון, הרי מספר התמורות של הקבוצה החדשה הוא P_n (n+1). לוי בן גרשום סיכם הוכחה זו בכך שהראה כי כל התמורות האלה הן באמת שונות. ואז סיכם:

ובכאן התבאר שמספר מחברות נושאים מה המתחלפות בסדר לבד הוא כמספר המורכב ממספרים נמשכים מתחילים מן האחד מספרם כמספר הנושאים ההם וזה שמחברות שנים הם שנים וזה שווה למספר המורכב מאחד ושנים ומחברות השלשה הם כמו השטח ההוה משלושה בשנים וזה שווה למורכב אבו, ובזה התבאר לאין תכלית.

ובלשוננו: כך הוכח שמספר התמורות על קבוצה נתונה של איברים שווה למספר הנוצר ממכפלת כל המספרים הטבעיים מ- 1 עד למספר הנתון של האיברים. מכיוון שמספר התמורות על שני איברים הוא 2, ומספר זה שווה ל- 2×1, מספר התמורות על שלושה איברים שווה למכפלה 3×2, ששווה ל- 3×2×1, וכך מראים תוצאה זו הלאה בלי סוף. [15]

ראים, כי לוי בן גרשום הזכיר את הצעד הראשון, ההתחלתי, ואז שם לב שכאשר מוכח צעד האינדוקציה, הוכחה הטענה בשלמותה.
בהוכחה הבאה השתמש לו בטיעון ספירה, והוכיח שהמספר P_2^n , מספר התמורות של שני איברים בקבוצה בת n איברים, הוא n (n-1). לאחר הוכחה זו, לוי הוכיח באינדוקציה על k שהמספר P_k^n , מספר התמורות של k איברים בקבוצה בת n איברים, שווה ל- ((n (n-1) (n-2)...(n-(k-1. כמו קודם, גם כאן ניסח לוי את צעד האינדוקציה כמשפט:

כאשר היה מספר מונח מנושאים מתחלפים והיו מספר מחברות מספר מונח שני מאותם הנושאים מתחלף למספר המונח הראשון וקטן ממנו המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם מספר מונח שלישי הנה מספר מחברות המספר הנמשך אחר המונח השני מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר השטח ההוה מהמספר המונה השלישי ביתרון המספר המונח הראשון על המספר השני.

ובלשוננו: אם נתון מספר מסוים [n] ומספר תמורות מסדר קטן מהמספר הזה $\left[k < n \; , P_k^n\right]$, אז מספר התמורות מסדר גבוה ב- 1 [k+1] בקבוצה זו של איברים [P_{k+1}^n] שווה למכפלת המספר השלישי [P_k^n] וההפרש בין המספר הראשון והשני [כלומר $P_{k+1}^n = P_k^n \; (n-k)$]. [16]

ובכאן התבאר שמחברות מספר מונח ראשון ממספר מונח שני מנושאים מתחלפים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הוא שווה למספר המורכב ממספרים . מספרם כמו המספר המונח הראשון ויהיה האחרון המספר השני.

את הניסוח המילולי המפותל של לוי בן גרשום אפשר להחליף בניסוח מקוצר על-ידי שימוש בסימבוליזם המודרני $P_{j+1}^{n} = (n-j)\, P_{j}^{n}$. הוכחתו של לוי דומה לזו שבהצגה הקודמת. אחריה הוא ניסח את התוצאה הרצויה:

> ובלשוננו: זה עתה הוכח שמספר התמורות מסדר נתון של איברים שווה למספר הנוצר ממכפלת כל המספרים השלמים בסדרם הטבעי השווה למספר הנתון ומסתיים במספר האיברים בקבוצה.

כדי להבהיר טענה זו, הציג לוי בן גרשום תחילה את צעד האינדוקציה בצטטו את התוצאה הקודמת עבור n=7: $P_2^7 = 6 \times 7$. כמו כן, מספר התמורות מסדר 3 בקבוצה זו שווה ל- $5\times6\times7$ (היות ש- $5 = 7 - 2$. בצורה דומה, מספר התמורות מסדר 4 שווה ל- $4\times5\times6\times7$ "וכך הוכחנו זאת עבור כל מספר".

בשלושת המשפטים שלאחר מכן, השלים לוי את פיתוח הנוסחאות שלו עבור תמורות וצירופים. תחילה, הוא התייחס למספר התמורות של כל קבוצה בת k איברים, והראה ש- $P_k^n = k!\,C_k^n$ או ש- $C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$, אבל היות שבמשפט הקודם הוא כבר הציג נוסחה עבור C_k^n, תוצאה זו לא נזכרת אצל אבן אל-בנא.

למרות ששיטות ההוכחה של לוי בן גרשום ושל אבן אל-בנא היו שונות במעט, ברור ששניהם היו מסוגלים בדרכים הגיוניות לבסס אותן תוצאות חשובות, תוצאות שלא הופיעו במתמטיקה המערב-אירופית עד אמצע המאה השבע-עשרה. בין אם לוי בן גרשום הושפע ישירות מאבן אל-בנא או מאחרים מבני דורו, הרי לאור הקירבה של היהדות והאסלאם באיזור הים התיכון בין המאות האחת-עשרה והארבע-עשרה, ברור כי כל אחת מהתרבויות השפיעה זו על זו בדרך זו או אחרת. כדי להחליט במדויק מה היה כיוון ההשפעה בכל הקשור למציאת הכללים הבסיסיים של ספירת תמורות וצירופים דרוש מחקר נוסף בחומר ארכיוני.

רשימת מקורות

1. Gurugovinda Charkavarti, “Growth and Development of Permutations and Combinations in India”, *Bulletin of Calcutta Mathematical* Society 24 (1932), 79-88.
   חומר נוסף אפשר למצוא במאמר:
   N. L. Biggs, “The Roots of Combinatorics, “*Historia Mathematica 6* (1979), 109-136.

2. כנ"ל
   הציטוט לקוח מ: *Brhat Samhita*, פרק 77, כלל 20 כפי שתורגם במאמר:
   K. H., Kern, “The Brhatsamhita of Varahamihira”, “*Journal of Royal Asiatic Society* (1875), 81-134.

3. איסדור קליש, ערך ותרגם ספר היצירה, הוצאת, Gillette N. J.: Heptangle Books, 1987.

4. כנ"ל, עמוד 23.

5. העברית היא תרגום של התרגום האנגלי הלקוח מתוך:
   Solomon Gandz, “Saadia Gaon as a Mathematician. “*Saadia Anniversary Volume* (New York: American Academy for Jewish Research, 1943);
   התרגום האנגלי מופיע פעם נוספת בתוך:
   Solomon Gandz, *Studies in Hebrew Astronomy and Mathematics*
   בעריכת שלמה שטרנברג (ניו יורק, כתב, 1970).

6. העברית היא תרגום של התרגום האנגלי הלקוח מהספר:
   L. Rabinovitch, *Proboblity and Statistical Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature,* (Toronto: University of Toronto Press, 1973), p. 144.

7. העברית היא תרגום של התרגום האנגלי הלקוח מהספר: Mahaviracarya, *Ganita-sara-sangraha*, tr. M. Rangacarya
   הספר יצא בהוצאות Madras: Goverment Press בשנת 1912 והציטוט לקוח מעמוד 150.

8. העברית היא תרגום של התרגום האנגלי מתוך:
H. T. Colebrooke, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmegupta and Bhascara* (London: John Murray, 1817), p. 49.

9. כנ"ל, עמוד 124. גם העברית כנ"ל.

10. העברית היא תרגום של התרגום האנגלי מתוך:
Jekuthiel Ginsburg, "Rabbi Ben Ezra on Permutations and Combinations, "*The Mathematics Teacher* 15 (1922), 347-356.

11. העברית היא תרגום של התרגום הצרפתי מתוך:
Ahmed Djebbar, *L'Analyse Combinatoire au Maghreb: L'Example d'Ibm Mum'im* (XII-XIII s.), (Orsay: Universite' de Paris-Sud, Publications Mathematiques D'Orsay, 1985), pp. 51-52.

12. כנ"ל, עמודים 55-56. גם העברית כנ"ל.

13. פרטים נוספים על עבודתו של אבן אל-בנא אפשר למצוא בתוך:
Ahmed Djebbar, *Enseignement et Recherche Mathematiques dans le Magreb des XIII-XIV siecles* (Orsay: Universite de Paris-Sud, Publications Mathematiques d'Orsay, 1981).

14. לוי בן גרשום, ספר מעשה חושב, נערך ותורגם לגרמנית על ידי Gerson Lange. (Frankfurt am Main: Louis Golde, 1909).

15. כנ"ל, עמוד 49.

16. כנ"ל, עמוד 50.