

הנושא: הרכבה של פונקציות ליניאריות

הוכן ע"י: עמוס גואטה, יהוד.

תקציר: בחומר מוצג משפט העוסק בהרכבה של פונקציות ליניאריות. המשפט מלווה בהוכחה בדרך האינדוקציה. כן מובאים תרגילים אחדים בנושא עם תשובות חלקיות.

מילות מפתח: אלגברה, פונקציה, פונקציות, פונקציות ליניאריות, הרכבת פונקציות, שיפוע פונקציה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 14, ניסן תשנ"ד, מרץ 1994, עמוד 51.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

הרכבה של פונקציות ליניאריות

הרכבה של פונקציות היא אחת הפעולות החשובות בפונקציות. על אף חשיבותה היא איננה מקבלת את המקום הראוי לה בתכנית הלימודים בחטיבה העליונה. ברצוני להציג כאן משפט פשוט העוסק בהרכבה של פונקציות ליניאריות ובהרחבתו (תוך שימוש באינדוקציה) לכל מספר סופי של פונקציות ליניאריות.

משפט 1

תהיינה $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$ שתי פונקציות ליניאריות. אזי ההרכבה שלהן $f_1(f_2(x))$ או $f_2(f_1(x))$ אף היא פונקציה ליניארית והשיפוע שלה שווה למכפלת השיפועים של הפונקציות, כלומר ל- $a_1 \cdot a_2$.

$$\text{הוכחה: } f_1(f_2(x)) = f_1(a_2x + b_2) = a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1 = a_1 \cdot a_2x + c$$

הערה: סדר ההרכבה אינו משנה את השיפוע אבל יכול לשנות את ערכו של c .

משפט 2

תהיינה $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$, ..., $f_n(x) = a_nx + b_n$ פונקציות ליניאריות. אזי ההרכבה $f_1(f_2(f_3(\dots f_n(x))))$ אף היא פונקציה ליניארית והשיפוע שלה שווה למכפלת השיפועים: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.
הערה: כמו במשפט 1.

הוכחה: (באינדוקציה)

את הטענה בעבור ההרכבה של שתי פונקציות הוכחנו במשפט 1. נניח שהטענה נכונה בעבור ההרכבה של n פונקציות ונכיח את נכונותה בעבור ההרכבה של $n+1$ פונקציות. על-פי הנחת האינדוקציה, ההרכבה של n פונקציות היא הפונקציה

$$f_1(f_2(\dots f_n(x))) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n x + c$$

נוסיף עוד ההרכבה של הפונקציה $f_{n+1}(x) = a_{n+1}x + b_{n+1}$

$$f_1(f_2(\dots f_n(f_{n+1}(x)))) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n (a_{n+1}x + b_{n+1}) + c =$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}x + k$$

ההרכבה זו אף היא פונקציה ליניארית, שיפועה שווה למכפלת השיפועים, לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

תרגילים

(1) נתונות 3 פונקציות

$$f_1(x) = 3x + 2$$

$$f_2(x) = -3x + 1$$

$$f_3(x) = -x + 3$$

מצא את ההרכבות: $f_1(f_2(f_3))$, $f_2(f_1(f_3))$, $f_2(f_2(f_3))$, $f_1(f_1(f_1))$, $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_3$.

(2) נתונה פונקציה $f(x) = 5x + 6$. בכל אחד מהסעיפים מצא פונקציה $g(x) = ax + b$ כך שיתקיים:

א. $f(g) = 10x + 11$

ב. $g(f) = 5x + 6$

ג. $g(f) = 2\frac{1}{2}x + 7$

3) נתונות 2 פונקציות $f_2(x) = 2x + 4$, $f_1(x) = 6x + 3$
מצא פונקציה $f_3(x) = ax + b$ כך שיתקיים:

א. $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 4x + 21$

ב. $f_2 \cdot f_1 \cdot f_3 = x$

ג. $f_3 \cdot f_1 \cdot f_3 = 6x - 8$

4) בחר 3 פונקציות ליניאריות ובנה בעזרתן 4 תרגילי הרכבה.

תשובות חלקיות:

1) $f_2 \cdot f_1 \cdot f_3 = 9x - 32$, $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 9x - 22$

2) א. $g(x) = 2x + 1$

ב. $g(x) = x$

3) א. $f_3(x) = \frac{2}{3}x + 3$

ב. $f_3(x) = \frac{1}{12}x - \frac{5}{6}$

ג. $f_3(x) = -x + 1$ או $f_3(x) = x - \frac{11}{7}$