הנושא: **שיטת הסימפלקס ומשמעותה הגרפית**

הוכן ע"י: עמוס ארליך, ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת ת"א.

תקציר: במאמר מובאת שיטת הסימפלקס לפתרון בעיות בתכנון לינארי. יתרונה בכך שהיא מאפשרת פתרון בעיות מתחום התכנון הלינארי שבהן מופיעים יותר משני משתנים. במאמר מובא פתרון בשיטת הסימפלקס של בעיה בשני משתנים ושל בעיה בשלושה משתנים.

מילות מפתח: תכנון לינארי, משוואות לינאריות, פתרון בעיות, שיטת הסימפלקס, פתרון אפשרי, משתני עודף, פתרון בסיסי, משתנה בסיסי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993, עמודים 51-56.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

שיטת הסימפלקס ומשמעותה הגרפית

מבוא

בחלקו הראשון של מאמר זה נפתור בעיה בתכנון לינארי, מסוג הבעיות המיועדות לתלמידי 3 יחידות לימוד בתכנית הלימודים החדשה [1]. שיטת הפתרון תהיה מסובכת מן השיטה הגרפית המוצעת שם ותשתמש בכלים מתמטיים הנלמדים בפרק "משוואות לינאריות" המוצע לתלמידי 4 ו- 5 י"ל [2] (שניהם לכיתה י). יתרונה של השיטה שתודגם כאן הוא בזה שניתן להשתמש בה גם לבעיות תכנון לינארי ביותר משני משתנים. ואומנם, בחלקו השני של המאמר נפתור באותה שיטה בעייה בשלושה משתנים.

שיטה זאת, הנקראת "שיטת הסימפלקס", מתוארת בהרבה ספרי לימוד על תיכוניים [3], בספרות-העשרה תיכונית [4], ולאחרונה גם ב-על"ה במאמרם של יהודית גל־עזר וגדעון צבס [5]. המיוחד בהצעה המוצגת כאן הוא **הבהרת המשמעות הגרפית של הצעדים השונים.** פתרונותינו ילוו אפוא בשרטוטים רבים, אך אלה לא יהיו "כלי עבודה" (כפי שמוצע בתוכנית הלימודים) אלא מכשיר המבהיר את תפקידיהם של הצעדים האלגבריים שבשיטת הסימפלקס ואת משמעויותיהם.

כדי לאפשר קריאת מאמר זה כמאמר העומד בפני עצמו, כללתי בו דברים שאינם אלא חזרה על דברי קודמיי. חלק מהמונחים והסימונים שאשתמש בהם הותאמו לאלה שב- [5]. במקומות שבהם העדפתי סימון שונה אין מדובר בשוני עקרוני אלא רק בשוני סגנוני הקשור במטרתו המיוחדת של המאמר.

למי מיועד המאמר? לכאורה אין תכנו מתאים לשום תלמיד, הרי הלומדים את הפרק "תכנון לינארי" (תלמידי 3 י"ל) אינם לומדים "משוואות לינאריות" ולומדי "משוואות לינאריות" (4 ו- 5 י"ל) אינם לומדים תכנון לינארי. התשובה מתחלקת, כמקובל, לשלושה חלקים: ראשית, המבנה הנוכחי של התכנית החדשה אינו צריך להתפס כמשהו סופי אלא כבסיס להתפתחויות. שנית, גם כיום יכול תלמיד של 4 או של 5 יחידות לימוד לקרוא את החומר המיועד לחבריו הלומדים מתמטיקה בהיקף יותר מצומצם, ומשם לעבור לשיטה המוצגת כאן. שלישית, המאמר מציע הרחבת-מבט למורים שהכשרתם המתמטית לא כללה קורס נרחב בתכנון לינארי.

דוגמה בשני משתנים

הבעיה

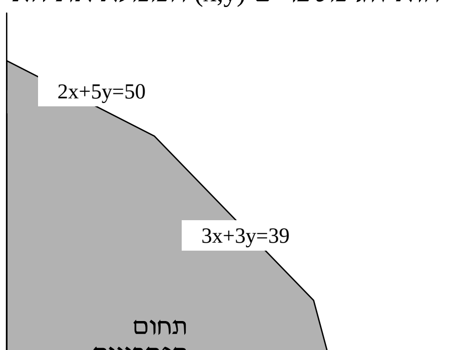
לאורג יש 50 סלילי חוט אדום, 39 סלילי חוט ירוק ו- 66 סלילי חוט סגול. מטר בד ממין א צורך 2 סלילי חוט אדום, 3 סלילי חוט ירוק ו- 6 סלילי חוט סגול. מטר בד ממין ב צורך 5 סלילי חוט אדום, 3 סלילי חוט ירוק ו- 2 סלילי חוט סגול. בעד מטר בד ממין א מקבל האורג 20 ש"ח ובעד מטר ממין ב הוא מקבל 30 ש"ח. כמה מטר מכל מין עליו ליצר אם רצונו בתמורה מקסימלית?

נסמן ב- x את מספר המטרים מסוג א, ב- y את מספר המטרים מסוג ב וב- P את התמורה:

$P = 20x + 30y$.

פתרון אפשרי הוא זוג מספרים (x,y) הממלא את **האילוצים**:

$$\begin{cases} 2x + 5y \le 50 \\ 3x + 3y \le 39 \\ 6x + 2y \le 66 \\ x \ge 0 \text{ ו- } y \ge 0 \end{cases}$$

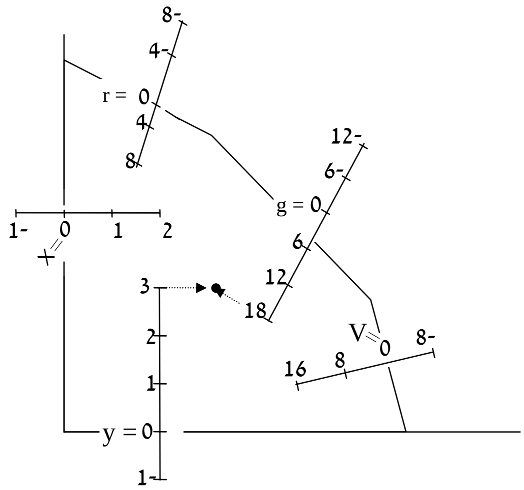


איור 1: תחום הפתרונות האפשריים

משתני עודף

הצעד הראשון המאפיין את שיטת הסימפלקס הוא הכנסת **משתני עודף** כדלקמן :
$r = 50 - (2x + 5y)$ - מספר סלילי חוט אדום הנותרים אם מיצרים בדים בכמויות (x,y).
$g = 39 - (3x + 3y)$ - מספר סלילי חוט ירוק הנותרים אם מיצרים בדים בכמויות (x,y).
$v = 66 - (6x + 2y)$ - מספר סלילי חוט סגול הנותרים אם מיצרים בדים בכמויות (x,y).

באופן זה יש לכל נקודה במישור חמש קוארדינטות, כאשר כל שתיים מהן קובעות את שלוש האחרות. לדוגמה, באיור 2 מודגשת נקודה שלידה שני חיצים נקודים המראים כי בנקודה זאת $y = 3$, $g = 18$. לא קשה לפתור את המשוואות ולקבל ש- $x = 4$, $r = 27$, $v = 36$.



איור 2 : משתני העודף כקואורדינטות

האילוצים מקבלים כעת את הצורה : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $r \geq 0$, $g \geq 0$, $v \geq 0$

את מערכת הקשרים שבין המשתנים, בתוספת השוויון $P = 20x + 30y$, נכתוב בכתיב מטריציאלי בטבלה באיור 3 (ראה [2]).

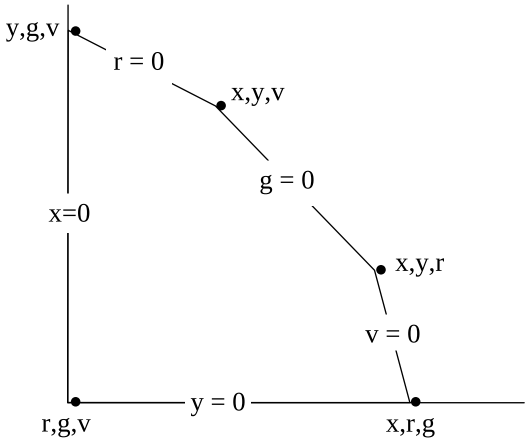
P	x	y	r	g	v	
0	2	5	1	0	0	50
0	3	3	0	1	0	39
0	6	2	0	0	1	66
1	20-	30-	0	0	0	0

איור 3: טבלת קשרים התחלתית

פתרונות בסיסיים

ניתן להוכיח שכל פתרון אופטימלי נמצא על השפה של תחום הפתרונות האפשריים, ולפחות פתרון אופטימלי אחד נמצא על קדקוד. (ראה "מודל הבקתה" ב- [5]).

כל פתרון אפשרי הנמצא על קדקוד, לאו דוקא פתרון אופטימלי, נקרא **פתרון בסיסי**. במילים אחרות, פתרון בסיסי הוא פתרון אפשרי אשר שניים מהמשתנים (הקואורדינטות) מקבלים בו את הערך 0. שאר המשתנים נקראים **משתנים בסיסים** בשביל פתרון בסיסי זה.



איור 4 : פתרונות בסיסיים ומשתניהם הבסיסיים

באיור 4 מודגשים הפתרונות הבסיסיים, וליד כל אחד רשומים המשתנים הבסיסיים שלו. שיטת הסימפלקס בנויה על סדרת מעברים מפתרון בסיסי אחד אל פתרון בסיסי עם P יותר גדול, עד שמגיעים לפתרון אופטימלי.

מעבר ראשון

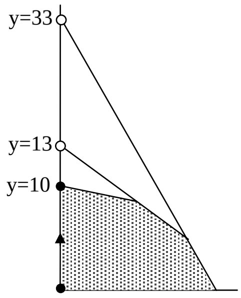
נקודת המוצא היא הפתרון הבסיסי הטריויאלי שבו $x = y = 0$. נציין זאת על-ידי כתיבת אפסים מעל x ומעל y בטבלה שבאיור 3. (ראה איור 5, שאינו אלא איור 3 עם תוספות).

	0	0					
P	x	y	r	g	v		
0	2	5	1	0	0	50	10
0	3	3	0	1	0	39	13
0	6	2	0	0	1	66	33
1	20-	30-	0	0	0	0	

איור 5: לקראת המעבר הראשון

עיון בשורה התחתונה של הטבלה מראה דבר שידענוהו מראש: בשביל הפתרון הבסיסי $x = y = 0$ גם $P = 0$, שהרי $P = 20x + 30y = 0$. לענייננו חשובה העובדה שהגדלת y ביחידה אחת תגדיל את P ב- 30 ואילו הגדלת x ביחידה אחת תגדיל את P רק ב- 20. עדיפות התחלתית זאת של הגדלת y על פני הגדלת x מצויינת באיור 5 על-ידי קו עבה קצר בתחתית עמודת מקדמי y, מתחת ל- -30. (ב- [5] מופיע במקומו חץ קטן המצביע על העמודה).

לאור האמור עד כאן נחפש פתרון אפשרי חדש שבו x נשאר שווה ל- 0 ואילו y גדול ככל האפשר. איור 6 מראה שפתרון זה הוא $x = r = 0$ (ושם $y = 10$). מכיוון שמטרתנו היא למצוא פתרון חדש ללא שימוש בציורים (שהרי אנו מעוניינים בשיטה שתהיה טובה גם לבעיות שאינן מאפשרות ציור במישור) נראה כיצד אפשר לקבל פתרון זה מן הטבלאות.



איור 6: מעבר ראשון

ובכן, מהשורה הראשונה של הטבלה רואים שכאשר $x = y = 0$ מתמלא השוויון $1 \cdot r = 50$. כן רואים משם שהגדלת y, תוך השארת $x = 0$, מקטינה את r, וכאשר $y = 50/5 = 10$ יהיה $r = 0$. הגדלה נוספת של y אינה אפשרית, כי אז יהיה r קטן מ- 0. משום כך נכתוב בימין השורה הראשונה את המספר 10. זה יציין שמהשורה הראשונה נובעת ההגבלה $y \le 10$.

באופן דומה נקבל מהשורה השניה את ההגבלה $y \le 39/3 = 13$ (אחרת יהיה $g < 0$) ונרשום בימין השורה את המספר 13.

כך נקבל מהשורה השלישית את ההגבלה $y \le 66/2 = 33$ (אחרת יהיה $v < 0$) ונרשום בימין השורה, 33.

החמורה שבהגבלות ($y \le 10$) הודגשה בקו עבה. נגדיל את y עד שיהיה שווה ל- 10, ואז יהיה $r = 0$. עברנו, אם כן, פתרון בסיסי $x = r = 0$.

מעבר שני

המשתנים הבסיסיים של הפתרון הבסיסי החדש הם y, g ו- v. המשתנה r יצא מהבסיס ואילו y נכנס במקומו. כדי לקבל תמונה של המצב החדש נבצע פעולות-גאוס אלמנטריות על שורות הטבלה, כמתואר ב"משוואות לינאריות" [2]: נחלק את השורה הראשונה ב- 5 כדי שהמקדם של y בשורה זאת יהיה 1 (לפני-כן היה המקדם של r בשורה זאת שווה ל- 1), ואחר כך נחבר לשורות האחרות כפולות מתאימות של השורה הראשונה כדי שמקדמי y שבשורות האחרות יהיו 0. לא קשה לראות שבתהליך זה לא ישתנו עמודי המקדמים של שאר המשתנים הבסיסיים ולא של P. (שלשת המספרים שמימין לטבלה יחושבו בהמשך. הקדמנו וכתבנו אותם כאן רק כדי לחסוך מקום).

	0		0				
P	x	y	r	g	v		
0	2/5	1	1/5	0	0	10	25
0	9/5	0	3/5-	1	0	9	5
0	26/5	0	2/5-	0	1	46	8.846
1	8-	0	6	0	0	300	

איור 7: גירסה שניה של הקשרים ומבוא למעבר השני

הטבלה באיור 7 מתארת מערכת משוואות שקולה למערכת הראשונה. מערכת זאת מראה בעליל שבשביל הנקודה הבסיסית $x = r = 0$ יהיו $y = 10$, $g = 9$, $v = 46$ ו- P עלה וקבל את הערך 300. ענין נוסף: משמעות השורה התחתונה של הטבלה היא ש- $P = 300 + 8x - 6r$ (השווה זאת עם הגדרותיהם של P ו- r), לכן כדאי להגדיל את x ולא כדאי להגדיל את r. ננוע אפוא על הישר $r = 0$ תוך כדי הגדלת x.

בדרך דומה לזאת שבה חישבנו את המעבר הראשון נקבל מהשורה הראשונה של הטבלה (ומהאילוץ $y \geq 0$) את ההגבלה $x \leq 10/(2/5) = 25$. השורה השניה (והאילוץ $g \geq 0$) יתנו את ההגבלה $x \leq 9/(9/5) = 5$ והשורה השלישית (עם האילוץ $v \geq 0$) תתן את ההגבלה $x < 46/(26/5) = 8.846...$.

החמורה שבהגבלות אלה היא ההגבלה השניה, כלומר יש לעצור את הגדלת x כאשר $x = 5$ ו- $g = 0$.

האם צריך מעבר נוסף?

במעבר האחרון נכנס x לבסיס במקום g. נבצע על הטבלה פעולות-גאוס אלמנטריות באופן שמקדם x בשורה השניה יהיה 1 והיתר אפסים.

P	x	y	r	g	v	
			0	0		
0	0	1	1/3	2/9-	0	8
0	1	0	1/3-	5/9	0	5
0	0	0	4/3	26/9-	1	20
1	0	0	10/3	40/9	0	340

איור 9: מערכת המשוואות המותאמת לנקודות הבסיס $r = g = 0$

מהשורה האחרונה עולה שכל הגדלה של r או של g תקטין את P ומכאן נובע שהפתרון שקיבלנו הוא אופטימלי. נשאר אפוא עם $r = g = 0$, $P = 340$, $x = 5$, $y = 8$ ו- $v = 20$.
הפתרון במילים: האורג יקבל בשביל בדיו תמורה מקסימלית בסכום של 340 ש״ח, אם יארוג 5 מטר בד ממין א ו- 8 מטר ממין ב. באופן זה ישתמש בכל סלילי החוטים האדומים והירוקים וישארו לו 20 סלילי חוט סגול.

דוגמה תלת ממדית

הבעיה: מצא מקסימום בשביל $P = 80x + 60y + 100z$ באילוצים:

$$4x + 5y + 12z \leq 120$$
$$8x - y + 2z \leq 64$$
$$10x + 45y + 8z \leq 450$$
$$10x + 7y + 8z \leq 146$$
$$x \geq 0 \,,\ y \geq 0 \,,\ z \geq 0$$

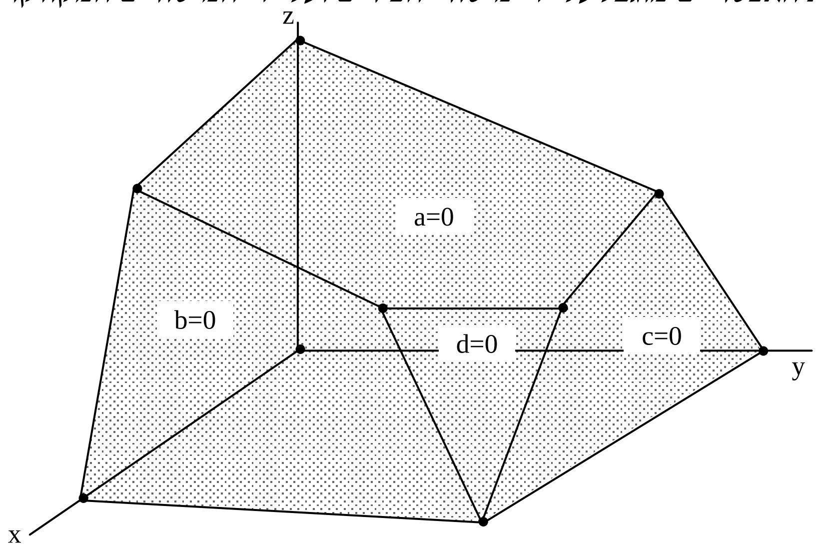
כצעד ראשון בתהליך הפתרון נגדיר משתני עודף

$$a = 120 - (4x + 5y + 12z)$$
$$b = 64 - (8x - y + 2z)$$
$$c = 450 - (10x + 45y + 8z)$$
$$d = 146 - (10x + 7y + 8z)$$

והאילוצים יקבלו את הצורה

$$x \geq 0 ,y \geq 0 ,z \geq 0 ,a \geq 0 ,b \geq 0 ,c \geq 0 ,d \geq 0$$

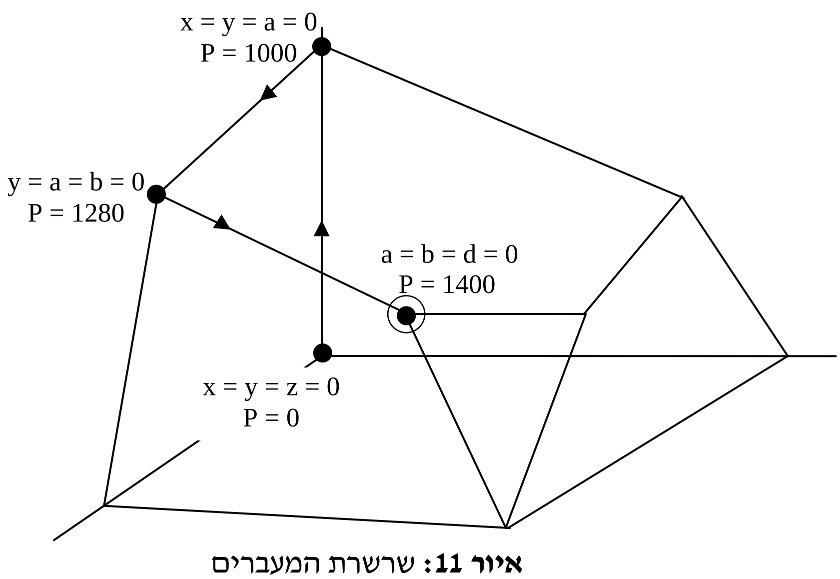
תחום הפתרונות האפשריים מוגבל על-ידי מישורי הצירים ועל-ידי המישורים המקווקוים שבאיור 10.



איור 10: תחום הפתרונות האפשריים

לדוגמה, האילוץ $4x + 5y + 12z \le 120$, שצורתו החדשה היא $a \ge 0$, קובע שכל הפתרונות האפשריים ימצאו על המישור $a = 0$ (שמשוואתו במשתנים המקוריים היא $4x + 5y + 12z = 120$) או בצידו המכיל את ראשית הצירים, אך לא בצד השני. בדומה לזאת, האילוץ $x \ge 0$ קובע שהמישור $x = 0$ (המישור המכיל את ציר y ואת ציר z) מגביל גם הוא את תחום הפתרונות האפשריים. בסך הכל מוגבל תחום זה על-ידי שבעה המישורים.

שפתו של התחום מורכבת משבעה מצולעים מישוריים, מצולע אחד על כל אחד מהמישורים המגבילים את תחום הפתרונות האפשריים. כל מצולע כזה הוא **פאה** של התחום ולכן התחום נקרא בשם **פאון**. כל צלע של פאה היא **מקצוע** של התחום, והיא החיתוך של שתי פאות. הנקודות הנמצאות על כל מקצוע מקיימות זוג שוויונים כגון $x = 0$, $a = 0$ ובקצרה $a = x = 0$ (מקצוע זה הוא המקצוע הימני העליון שבאיורים 10 ו- 11). בכל **קדקוד** של התחום נפגשות לפחות שלוש פאות, לכן כל קדקוד מאופיין על-ידי שלושה שוויונים. לדוגמה, בקדקוד העליון שבאיור 11 $x = y = a = 0$.
כמו בבעיות תכנון לינארי מישוריות, גם כאן חייב פתרון אופטימלי להמצא על שפת התחום, ולפחות פתרון אופטימלי אחד נמצא בקדקוד. לכן נקרא לקדקודים פתרונות בסיסיים. הפתרון הבסיסי ההתחלתי יהיה $x = y = z = 0$ (בשבילו $P = 0$). מהלך הפתרון יהיה בנוי משרשרת של מעברים לאורך מקצועות הפאון, מפתרון בסיסי אחד אל פתרון בסיסי עדיף, כבאיור 11.



איור 11: שרשרת המעברים

להלן נסביר את השיקולים האלגבריים המצביעים על המקצוע שלאורכו מתבצע כל מעבר, ועל הנקודה שאליה מגיעים בכל שלב.

המהלכים האלגבריים

נצא מהפתרון הבסיסי ההתחלתי $x = y = z = 0$. ונכתוב את מערכת הקשרים שבין המשתנים במטריצה.

		0	0	0						
	P	x	y	z	a	b	c	d		
	0	4	5	12	1	0	0	0	120	10
	0	8	1-	2	0	1	0	0	64	32
	0	10	45	8	0	0	1	0	450	56.25
	0	10	7	8	0	0	0	1	146	18.25
	1	80-	60-	$\underline{-}$ 100	0	0	0	0	0	

איור 12 : המערכת ההתחלתית. נקודת הבסיס $x = y = z = 0$

האפסים שבראש הטבלה מציינים שנקודת המוצא היא ראשית הצירים $x = y = z = 0$.
מהשורה התחתונה של הטבלה (ומהמספר המודגש שם) רואים כי רצוי להגדיל תחילה את z תוך השארת y ו- z שווים ל- 0. כדי למצוא עד כמה מאפשרים האילוצים להגדיל את z נחלק את המספרים שבעמודת המספרים החפשיים (העמודה האחרונה) במקדמי z, ונקבל את ההגבלות הכתובות מימין לטבלה. מהשוואת ההגבלות עולה שהגדלת z תיעצר כשנגיע אל $a = 0$, כלומר, אל הפתרון שבו $x = y = a = 0$.

בעזרת פעולות אלמנטריות נתאים את מערכת המשוואות למצב בו a שוב אינו משתנה בסיסי ובמקומו נכנס z, כלומר, באותה שורה שבה היתה ההגבלה החמורה ביותר, ובה היה מקדמו של a שווה
ל- 1, יהיה כעת מקדמו של z שוה ל- 1, ושאר מקדמיו של z יאופסו.

	0	0		0					
P	x	y	z	a	b	c	d		
0	1/3	5/12	1	1/12	0	0	0	10	30
0	22/3	11/6-	0	1/6-	1	0	0	44	$\underline{6}$
0	22/3	125/3	0	2/3-	0	1	0	370	50.45
0	22/3	11/3	0	2/3-	0	0	1	66	9
1	$\underline{140/3-}$	55/3-	0	25/3	0	0	0	1000	

איור 13 : המערכת המותאמת למשתני הבסיס z, b, c ו- d

משמעות השורה התחתונה של הטבלה באיור 13 היא שבשביל הפתרון הבסיסי $x = y = a = 0$ יהיה $P = 1000$. כן נובע משורה זאת שכדאי להגדיל את x (הגדלת y תגדיל את P בקצב יותר קטן. הגדלת a תקטין את P). נשאיר אפוא את y ואת a שווים ל- 0 ונגדיל את x. הגדלת x נעשית, אם כן, על-ידי תנועה על המקצוע $y = a = 0$.

חילוק המספרים הנמצאים בעמודה האחרונה בטבלה שבאיור 13 במקדמי x נותן את ההגבלות שנכתבו מימין לטבלה. נמצא שהחמורה שבהגבלות היא $x \le 6$ והיא נובעת מהאילוץ $b \ge 0$. בפתרון הבסיסי החדש יהי אפוא $x = 6$ ו- $b = 0$.

b יצא מרשימת משתני הבסיס ו- x נכנס. נטפל אפוא בעמודת מקדמי x.

		0		0	0				
P	x	y	z	a	b	c	d		
0	0	½	1	1/11	1/222-	0	0	8	16
0	1	1/4-	0	1/44-	3/22	0	0	6	
0	0	87/2	0	1/2-	1-	1	0	326	7.49...
0	0	11/2	0	1/2-	1-	0	1	22	4
1	0	30-	0	80/11	70/11	0	0	1280	

איור 15: המערכת מותאמת למשתני הבסיס x, z, c ו- d

מהטבלה רואים כי ערך P עלה והוא כעת 1280. כמו כן, המשתנה היחיד שכדאי להגדילו הוא y. הגדלתו תעשה תוך תנועה על המקצוע $a = b = 0$. מכיוון שהמקדם של y בשורה השניה הוא שלילי תביא הגדלת y (תוך שמירה על $a = b = 0$) להגדלת x. לכן, אין האילוץ $x \ge 0$ מגביל את הגדלת y.

ההגבלות הנובעות מהאילוצים האחרים כתובות מימין לטבלה באיור 15. החמורה שבהם היא $y \le 4$ הנובעת מ- $d \le 0$. נגדיל אפוא את y עד שנגיע אל $d = 0$.

d יצא אפוא מקבוצת משתני הבסיס ואילו y נכנס במקומו. נבצע את פעולות-גאוס המתאימות.

		0		0	0			
P	x	y	z	a	b	c	d	
0	0	0	1	3/22	1/22	0	1/11-	6
0	1	0	0	1/22-	1/11	0	1/22	7
0	0	0	0	38/11	76/11	1	87/11-	152
0	0	1	0	1/11-	2/11-	0	2/11	4
1	0	0	0	50/11	10/11	0	60/11	1400

איור 16: המערכת מותאמת למשתני הבסיס x, y, z ו- c

הטבלה באיור 16 מראה שבשביל $a = b = d = 0$ מקבלים $P = 1400$ וכל הגדלה של a, b או d מקטינה את P. הגענו אם כן לפתרון אופטימלי. רואים מהטבלה שפתרון זה מתקבל כאשר $x = 7$, $y = 4$ ו- $z = 6$.

הוכחה בלבד

האמור להלן אינו קשור בצד הגרפי של שיטת הסימפלקס, אבל הוא מאיר אותה מצד אחר, ולכן נראה לי מתאים לכאן. נפתח בסיפור אפשרי: כדי לתכנן את העבודה במפעלו, היה ראובן זקוק לפתרונה של בעייתנו האחרונה, והוא בקש משמעון לפתור אותה. שמעון פתר את הבעיה בשיטת הסימפלקס ומסר לראובן את הפתרון.

ראובן: התרצה להראות לי איך הגעת אל הפתרון?
שמעון: בשמחה רבה. קרא את דפים אלה.
ראובן: סימפלקס... משתני עודף... פעולות אלמנטריות בשורות...

נראה מעניין, אבל בזמני לא לימדו דברים כאלה בבית הספר התיכון. הידע האלגברי שלי מסתים במה שמלמדים היום בכיתה ט. האם תוכל להוכיח שפתרונך נכון בלי להראות איך קיבלת אותו?
שמעון: הליכה מהסוף אל ההתחלה נראית מלאכותית, אך אם זה מה שאתה מבקש אכבד את בקשתך.

ובכן, אם תציב $x = 7$, $y = 4$ ו- $z = 6$ תקבל:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 12z = 120 \\ 8x - y + 2z = 64 \\ 10x + 45y + 8z < 450 \\ 10x + 7y + 8z = 146 \end{cases}$$

לכן כל ארבעת האילוצים שהצבת בפני מתקיימים. נותר רק להראות שערכי x, y ו- z אלה נותנים P מקסימלי.

$$\begin{aligned} P &= 80x + 60y + 100z = \\ &= 1400 - 50/11 \cdot (120 - 4x - 5y - 12z) - \\ &\quad 10/11 \cdot (64 - 8x + y - 2z) - \\ &\quad 60/11 \cdot (146 - 10x - 7y - 8z) \end{aligned}$$

הצבת ערכי x, y ו- z שקיבלנו מאפסת את שלושת הביטויים שבמסגרות ונותנת $P = 1400$.
אם תציב x, y ו- z כאלה שבשבילם מקבל אחד או יותר מן הביטויים שבמסגרות ערך שלילי, יהיה הדבר מנוגד לאילוץ המתאים. ההצבות הבאות בחשבון הן רק כאלה שבשבילן מקבלים שלושת הביטויים שבמסגרות ערכים גדולים או שווים ל- 0. לכל הצבה כזאת יהיה $P \le 1400$.

רשימת ספרות

1. מתמטיקה לחטיבה העליונה, אלגברה, שתיים ושלוש יחידות לימוד, כרך ראשון. הוצאת המרכז להוראת המדעים בירושלים.

2. מתמטיקה לחטיבה העליונה, אלגברה, ארבע וחמש יחידות לימוד, כרך ראשון. הוצאת המרכז להוראת המדעים בירושלים.

3. אבי, זאבי, מבוא לחקר ביצועים, חלק ראשון, הוצאת דקל, תשל"ח.

4. A.M. Glicksman. *Linear programing: The simplex method.* In Enrichment mathematics for high school, 28-th yearbook NCTM, Washington 1963.

5. יהודית גל־עזר וגדעון צבס. תכנון לינארי - משימה במעבדה המתמטית. חלק א, על"ה 8; חלק ב, על"ה 9.