המרכז להוראת המדעים ע"ש עמוס דה שליט אוניברסיטת ירושלים

הנושא: **שרטוט תלת-מימדי**

הוכן ע"י: גיורא מן, האוניברסיטה העברית.

תקציר: המאמר עוסק בגופים התלת-מימדיים הבאים: תיבה, מנסרה ישרה, פירמידה ישרה, חרוט ישר, וגליל ישר. לגבי כל גוף מובא תאור במילים שלו, ציור הגוף, פריסה דו-מימדית של הגוף והדרכה כיצד לצייר דגם של הגרף. כמו-כן מובא אוסף בעיות המדגים כיצד ניתן להשתמש בשרטוטים שהוצגו. בסוף המאמר מובאות הערותיו של מיכאל קרייזמן למאמר זה (שפורסמו בעל"ה 14, עמ' 86-84) ותגובתו של גיורא מן.

מילות מפתח: גיאומטרית המרחב, הנדסת המרחב, מושגים, תיבה, קוביה, מנסרה ישרה, פירמידה, פירמידה ישרה, פירמידה משוכללת, חרוט ישר, גליל, גוף משוכלל, חתך צירי, זווית בין מישורים, זווית בין ישר ומישור.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993, עמודים 48-42.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 16 עמודים.

שרטוט תלת-מימדי

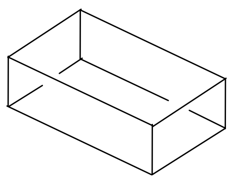
מבוא

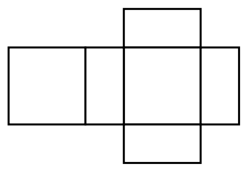
רשימה זו באה לשמש כעזר למורה המעונין ללמד את תכונות הגופים התלת ממדיים. ברור לכולנו שברוב המקרים עדיף הגוף התלת-ממדי על תמונתו הדו-ממדית. אבל, מטעמים מובנים מאליהם, עלינו להסתפק באחרונה.

המידע העדכני על קליטה חושית מלמד אותנו שהמוח משתמש ב״ספריה״ של תמונות דו-ממדיות אותן הוא משווה לתמונה הדו-ממדית הנקלטת ברשתית העין. אם הוא מזהה אחת מתמונות ה״ספריה״ כדומה למדי לתמונה שהתקבלה ברשתית, הוא קובע שמה שרואה העין הוא העצם שתמונתו שמורה ב״ספריה״. במקרה של גופים תלת-ממדיים המנגנון, כנראה, מורכב יותר. העין קולטת מספר תמונות דו-ממדיות של העצם מנקודת מבט שונות במעט ומשווה אותן עם קבצים של תמונות השמורים ב״ספריה״. חשוב לכן, שללומד את הגופים התלת-ממדיים יהיו על נייר תמונות דו-ממדיות של הגופים האלה. התמונות יוכלו לשמש בסיס לניתוח תכונות שונות של הצורות המרחביות כמו הזווית בין שתי פאות סמוכות, הזווית בין אלכסון לפאה ועוד. כל גוף המופיע בחוברת יתואר במילים ובציור בשלב ״הסבר״. בשלב זה תיכלל גם הפריסה הדו-ממדית של הגוף. בשלב ״הדרכה״ תינתן הדרכה כיצד לצייר דגם של הגוף. בשלב ״דגמים״ יופיע קובץ של שרטוטים דו-ממדיים של גופים שונים מאותו סוג, שהלומד יוכל לנצל לצורך פתרון בעיות. בסוף הרשימה הוספנו מספר דוגמאות לפתרון בעיות בגופים תוך שימוש בחומר שפותח כאן.
חשוב לדעת שרוב הצורות הגיאומטריות בציורים המופיעים בהמשך צוירו באמצעות ״שבלונות״ או תבניות מחומר פלסטי שניתן להשיג בכל חנות לצרכי כתיבה. יש ״שבלונות״ למעגלים, אליפסות, משולשים, מקביליות וכו׳. השימוש בתבניות מקל כמובן מאוד על ביצוע השרטוטים.

התיבה

פני התיבה מורכבים משש פאות מלבניות שכל שתיים נגדיות מביניהן חופפות זו לזו. בציור ניתן לראות את פריסת התיבה וכן את תמונתה.
ראוי להעיר שלמרות שבציור אף אחת מן הזוויות אינה נראית ישרה, כולן בעצם ישרות. לכן, בפרט, כל מקצוע מאונך לשתי הפאות אותן הוא מחבר.
דרך פשוטה לצייר קווים מקבילים היא לצייר קווים ישרים משני צידיו של סרגל בלי להזיזו. חסרונה של השיטה היא בחוסר שליטה במרחק בין הקווים.
דרך אחרת היא לשרטט קו ישר בעזרת בסרגל ואז לסמן שתי נקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישר ואז להעביר דרכן ישר שני שיהיה כמובן מקביל לראשון.

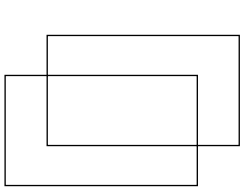




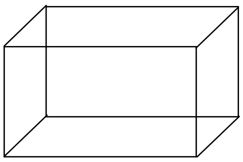
שרטוט התיבה

שלב א׳: נצייר מלבן המייצג את הפאה הקרובה לעין שלנו.

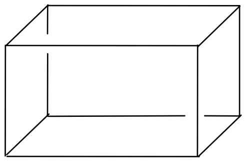
שלב ב׳: נצייר מלבן החופף למלבן הראשון ומוזז ימינה ולמעלה (זאת הפאה הנגדית לפאה הראשונה שציירנו).



״שרטוט תלת-מימדי״, גיורא מן
על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993
האוניברסיטה העברית ירושלים



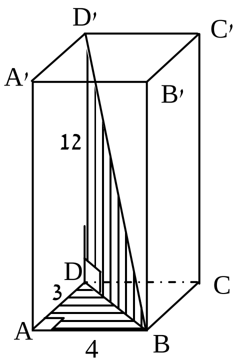
שלב ג׳: נצייר את ארבעת המקצועות המחברים את שתי הפאות שכבר ציירנו (באופן זה קיבלנו ארבע פאות מלבניות נוספות הנראות בציור כמקביליות).



שלב ד׳: כעת נדאג שמקצועות מצטלבים המופיעים כנחתכים בציור יופרדו זה מזה על ידי קטיעת המקצועות הנמצאים מאחור. פעולה זאת חיונית כדי למנוע את התסמונת של היפוך. אם תתבונן בציור של שלב ג׳, מספיק זמן, יתברר שחלק מן הזמן תראה את הפאה השמאלית הנמוכה כקדמית ואז ללא אזהרה מוקדמת יחול מהפך והפאה הימנית העליונה תראה כקדמית.

דוגמה

מהו אורך אלכסון התיבה שממדיה 3, 4 ו- 12?

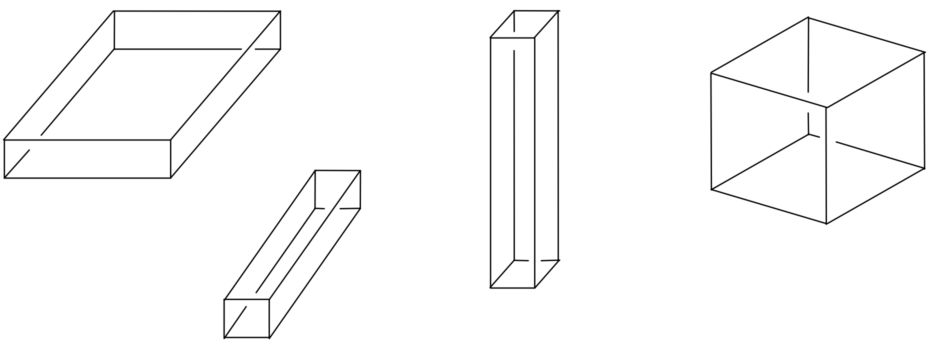


האלכסון BD מחלק את הבסיס ABCD לשני משולשים ישרי זווית חופפים. נתבונן באחד מהם, ABD. לפי משפט פיתגורס $BD = 5$. המקצוע DD' מאונך לבסיס ABCD ולכן גם משולש BDD' ישר זווית (ב- D). שימוש נוסף במשפט פיתגורס מגלה ש- $BD' = 13$. מצאנו איפה שאורך אלכסון התיבה הוא 13.

הערה: מדוגמה זו ניתן ללמוד שריבוע אלכסון התיבה שווה לסכום ריבועי שלושת ממדיה.

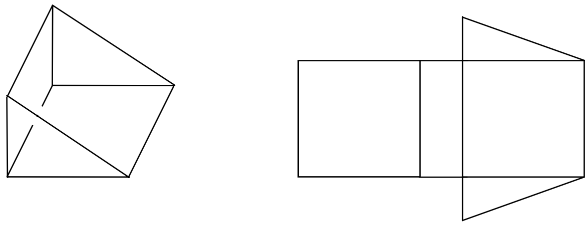
דגמים של תיבות

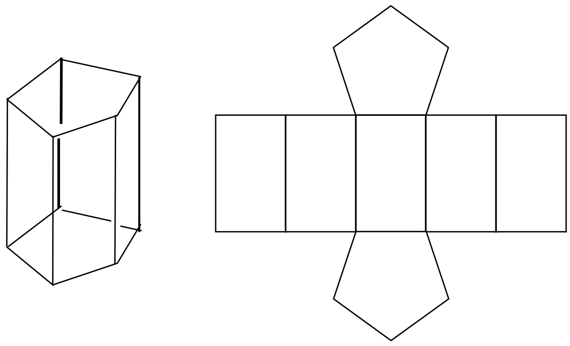
השימוש בדף משבצות עשוי להקל עליך לצייר קווים מקבילים ומאונכים זה לזה. מצד שני, השימוש בדף משובץ עלול להעמיס על הציור פרטים מיותרים.



מנסרה ישרה

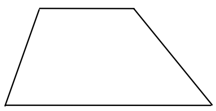
מנסרה ישרה היא פאון ששתים מפאותיו הן מצולעים חופפים ומקבילים זה לזה, הנקראים **בסיסים**. שאר פאותיו הן מלבנים הנקראים **פאות צדדיות**. המקצועות הצדדיים המאונכים לבסיסים הם גם גבהים של המנסרה. סוג המנסרה הישרה נקבע על ידי בסיסיה - אם הבסיסים מחומשים, זאת **מנסרה מחומשת.** התיבה היא, כמובן, מנסרה מלבנית.



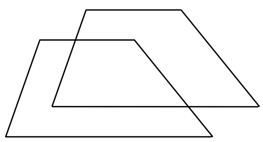


שרטוט המנסרה

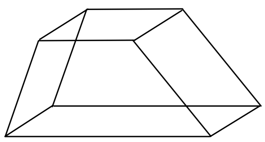
שלב א׳: נצייר את בסיס המנסרה (סוג של מצולע: מרובע, מחומש, ...) הקרוב אלינו.



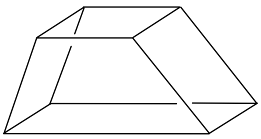
שלב ב׳: נצייר את הבסיס השני (מצולע חופף לראשון) הרחוק מאיתנו, מוזז ימינה ולמעלה.



שלב ג׳: נצייר את הפאות הצדדיות על ידי העברת הקטעים המחברים זוגות של קדקודים מתאימים בשני הבסיסים.

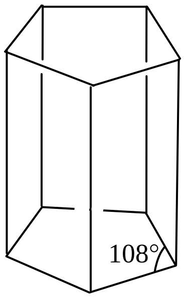


שלב ד׳: בכל מקרה בו רואים בציור חיתוך של שני מקצועות שאינם נחתכים, נקטע את המקצוע האחורי יותר.



דוגמה

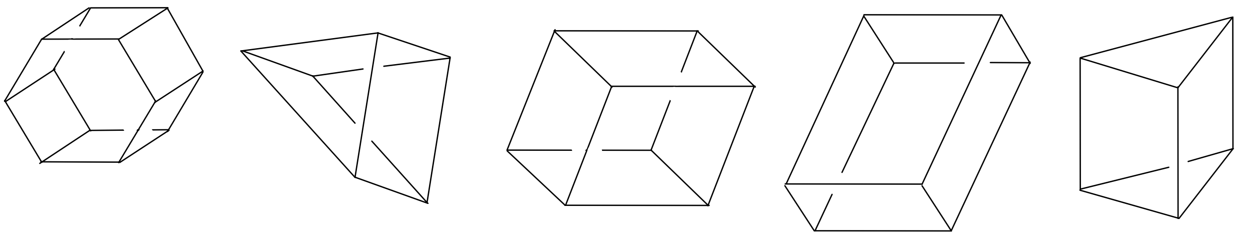
מהי הזווית בין שתי פאות צדדיות במנסרה ישרה מחומשת ומשוכללת?



הזווית בין שתי פאות צדדיות במנסרה ישרה כלשהי היא הזווית בין שני מקצועות בבסיס השייכים לשתי הפאות הצדדיות (מדוע?). מכאן שהזווית המבוקשת היא זווית של מחומש משוכלל, כלומר: 108 מעלות (מדוע?)

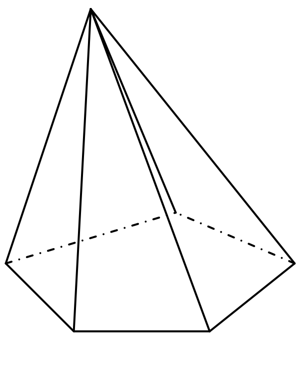
דגמים של מנסרות

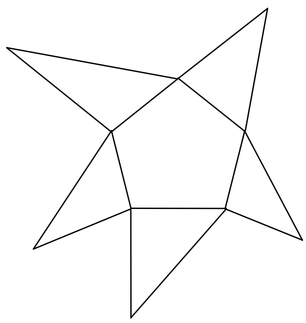
השימוש בקווים מרוסקים עשוי להקל עליך להבחין בין קווים הנמצאים מאחור (קווים מרוסקים) לבין אלה הנמצאים מלפנים (קווים רציפים).



פירמידה

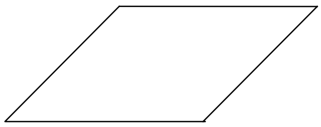
פירמידה היא פאון שכל פאותיו, פרט לאחת, הן משולשים בעלי קדקוד משותף, הנקרא **ראש הפירמידה**. הפאה היחידה שראש הפירמידה אינו קדקוד שלה היא מצולע הנקרא **בסיס הפירמידה**. כל פאה משולשת הנוגעת בראש הפירמידה נקראת **פאה צדדית**. כל מקצוע המחבר את ראש הפירמידה עם קדקוד של הבסיס נקרא **מקצוע צדדי**. הקטע המחבר את ראש הפירמידה עם מישור הבסיס ומאונך לו נקרא **גובה הפירמידה**.



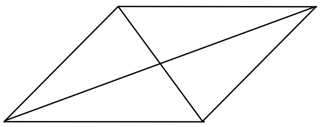


פירמידה ישרה היא פירמידה שכל מקצועותיה הצדדיים שווים. בפירמידה ישרה פוגש הגובה את הבסיס במרכז המעגל החוסם את הבסיס. פירמידה שאינה ישרה נקראת **פירמידה משופעת**.
פירמידה משוכללת היא פירמידה ישרה שבסיסה הוא מצולע משוכלל. כך למשל פירמידה ישרה שבסיסה הוא ריבוע היא פירמידה משוכללת. חשוב להבחין בין פירמידה משוכללת ל**גוף משוכלל**. הפירמידה המשוכללת היחידה, שהיא גם גוף משוכלל, זוהי פירמידה משולשת שכל מקצועותיה שווים ולכן כל ארבע פאותיה הן משולשים משוכללים (שווי צלעות).

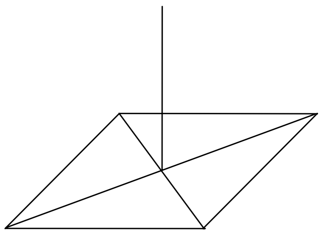
שרטוט פירמידה ישרה



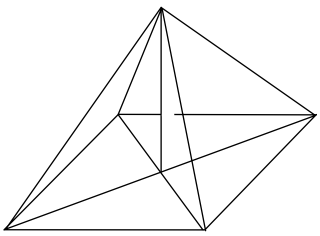
שלב א': נשרטט את הבסיס בפרספקטיבה. למשל, בסיס מלבני נשרטט כמקבילית.



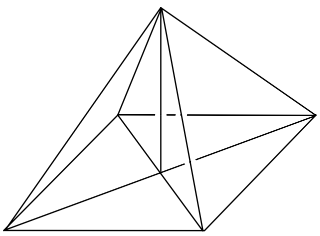
שלב ב': נסמן את מרכז המעגל החוסם את הבסיס - נקודת מפגש הבסיס עם גובה הפירמידה, במקרה של פירמידה ישרה. למשל, במקרה של בסיס מלבני נחתוך את האלכסונים.



שלב ג': נשרטט את גובה הפירמידה.



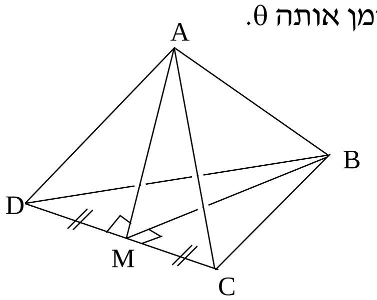
שלב ד': נשרטט את המקצועות הצדדיים של הפירמידה.



שלב ה': במקרה של קטעים נחתכים בציור שאינם נחתכים במרחב, נמחק קטעים קצרים מן הקטעים הרחוקים יותר.

דוגמה

מהי הזווית בין שתי פאות בארבעון משוכלל?
הגובה ושני התיכונים האחרים בבסיס לא צוירו כדי לא לסבך את פתרון הבעיה. הנקודה A נמצאת מעל נקודה המחלקת את התיכון MB ביחס $1:2$, כלומר מעל מפגש התיכונים. נחבר את הקדקודים A ו- B של הפירמידה עם M - אמצע המקצוע CD, המחבר את שני הקדקודים האחרים. AMB היא הזווית בין הפאות ACD ו- BCD. נסמן אותה θ.

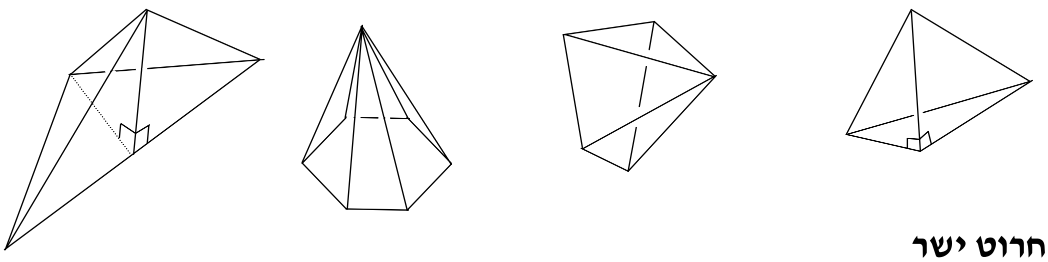


אם $AB = 2$ אז $MA = MB = \sqrt{3}$ (מדוע?)

יוצא $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

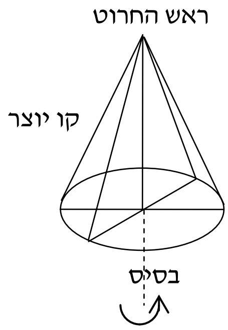
ולכן $\theta = 70.528779°$

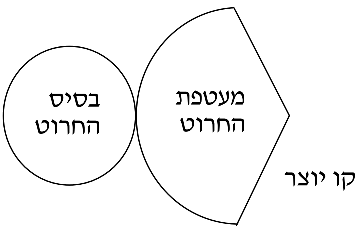
דגמים של פירמידה



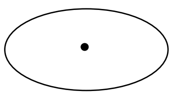
חרוט ישר

חרוט ישר הוא הגוף המתקבל מסיבוב משולש שווה שוקיים סביב ציר הסימטריה שלו (התיכון לבסיס). סיבוב בסיס המשולש יוצר עיגול שהוא **בסיס החרוט**. סיבוב שוק המשולש יוצר את **מעטפת החרוט**. לכן, שוק המשולש נקראת **קו יוצר**. כל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר בסיס החרוט וראשו הוא ראש החרוט נקרא **חתך צירי** של החרוט.

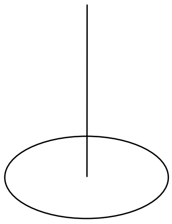




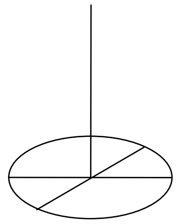
שרטוט החרוט



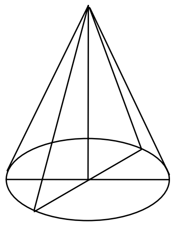
שלב א': נצייר את בסיס החרוט כאליפסה ונסמן את מרכזו.



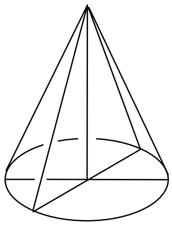
שלב ב': נצייר את גובה החרוט.



שלב ג׳: נצייר שני קטרים בבסיס.



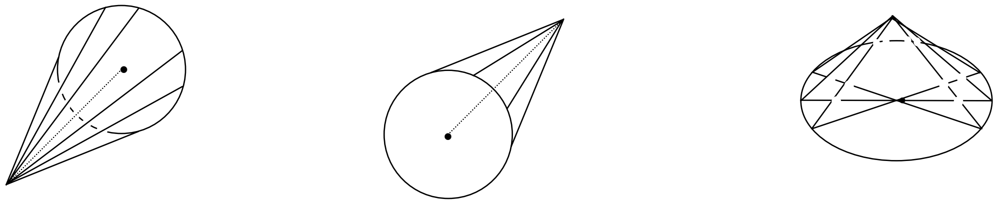
שלב ד׳: נעביר ארבעה קווים יוצרים אל קצות שני הקטרים.



שלב ה׳: נמחק קטעים קצרים של קווים הנמצאים מאחורי קווים אחרים.

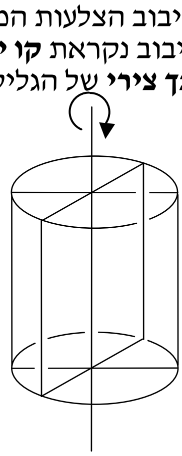
דגמים של חרוטים

הגבהים שורטטו בקווים מרוסקים בחלקם.



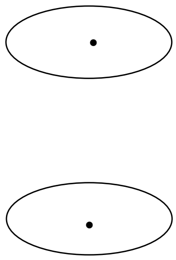
גליל ישר

גליל ישר הוא הגוף המתקבל מסיבוב מלבן סביב ציר הסימטריה שלו (קטע המחבר אמצעי שתי צלעות נגדיות שלו). סיבוב הצלעות הנחצות על ידי ציר הסימטריה יוצר עיגולים שהינם **בסיסי הגליל**. סיבוב הצלעות המקבילות לציר הסיבוב יוצר את **מעטפת הגליל**. כל צלע המלבן המקבילה לציר הסיבוב נקראת **קו יוצר**. כל מלבן ששתי צלעות נגדיות שלו הן קטרים של שני הבסיסים נקרא **חתך צירי** של הגליל.

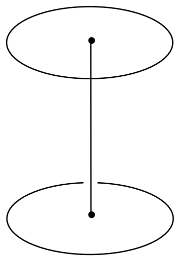


שרטוט הגליל

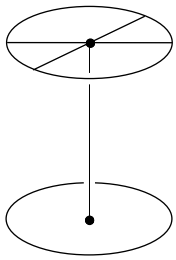
שלב א׳: נצייר שתי אליפסות חופפות זו מעל זו המייצגות את בסיס הגליל.



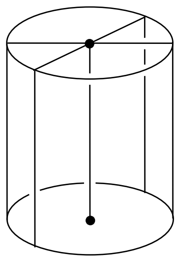
שלב ב׳: נחבר את מרכזי שתי האליפסות ונקבל את ציר הסימטריה של הגליל שהוא גם גובה הגליל.



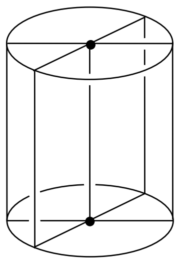
שלב ג׳: נצייר שני קטרים בבסיס העליון.



שלב ד׳: נצייר את הקווים היוצרים היורדים מקצות קטרים אלה.

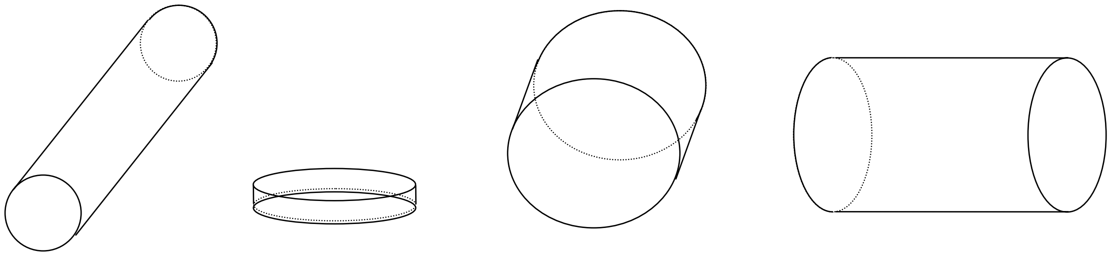


שלב ה׳: נצייר את שני הקטרים בבסיס התחתון המשלימים שני חתכים ציריים.



דגמים של גלילים

הקווים המרוסקים בציורים אלה הם קווים הנמצאים מאחורי פני הגליל בעוד שהקווים השלמים נמצאים בחזית. ניתן לדמות שפני הגלילים עשויים חומר שקוף למחצה דרכו נראים קווים בצורה פחות ברורה.



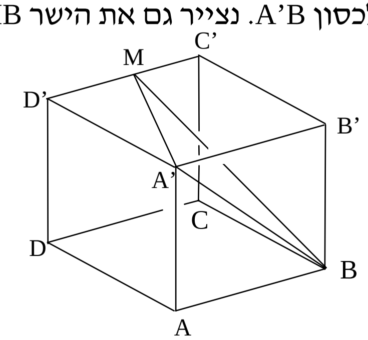
בעיות

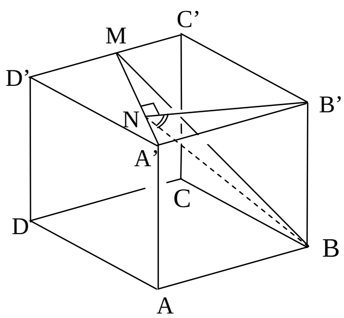
בעיה 1

נתונה קוביה ABCDA’B’C’D’. חשב את הזווית בין המישורים A’B’C’ ו- A’MB אם נתון ש- M היא אמצע C’D’.

פתרון:

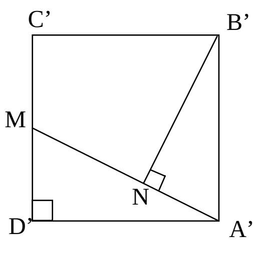
שלב א': נצייר את המישור A’MB. ישר החיתוך שלו עם A’B’C’ הוא הישר A’M. ישר החיתוך שלו עם הפיאה ABB’A’ הוא האלכסון A’B. נצייר גם את הישר MB כדי לקבל משולש A’BM המוכל במישור A’MB.





שלב ב': נצייר קטע B’N המאונך ל- A’M. הזווית BNB’ היא הזווית המבוקשת בין שני המישורים (הזווית B’ במשולש BNB’ ישרה!).

שלב ג': נחשב את זווית BNB’ על ידי ביטוי B’N באמצעות מקצוע הקוביה n. לצורך זה נתבונן מלמעלה על מישור הריבוע A’B’C’D’.



בגלל דמיון המשולשים A’D’M ו- B’NA’ יוצא ש- $\measuredangle A'B'N = \arctan(0.5)$ ולכן
B’N = n cos (arctan (0.5))

נפנה כעת למשולש ישר הזווית BB’N ונמצא כי $\tan(BNB') = \dfrac{1}{\cos(\arctan(0.5))}$

לכן $\measuredangle BNB' = \arctan\dfrac{1}{\cos(\arctan(0.5))}$

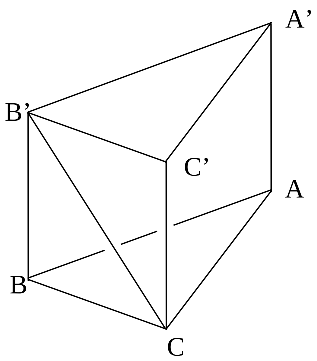
כלומר: $\measuredangle BNB' = 48.19°$

בעיה 2

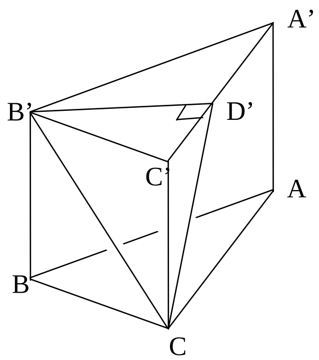
במנסרה ישרה ABCA’B’C’ (מקצועות צדדיים: AA’, BB’, CC’) הבסיס ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = AC) בעל שוק שאורכה 6 ס״מ וזווית ראש בת 40°. אלכסון הפאה הצדדית BCC’B’ יוצר עם כל אחת משתי הפאות הצדדיות האחרות זווית בת 20°. יש לחשב את נפח המנסרה.

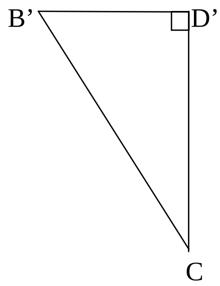
פתרון:

שלב א׳: נצייר מנסרה משולשת ישרה לפי נתוני השאלה ואת האלכסון B’C בפאה הצדדית BCC’B’ (יש כמובן אלכסון נוסף בפאה זו, אך כפי שנראה בהמשך אין זה משנה איזה אלכסון נבחר).



שלב ב׳: נזהה את הזוויות בין B’C לבין הפיאה AA'C'C. לשם כך נצייר B’D’ מאונך A’C’. הזווית B’CD’ היא בת 20°.





שלב ג׳: משולש B’CD’ ישר זווית ב- D’. נחשב את היתר שלו B’C.
במשולש A’B’D’ : $B'D' = 6\sin(40°)$
לכן במשולש B’CD’ : $B'C = \dfrac{6\sin(40°)}{\sin(20°)}$

שלב ד׳: נעבור למשולש B’CC’ כדי לחשב את הגובה שלו בעזרת משפט פיתגורס. לשם כך יש לחשב קודם את B’C’ לפי משולש A’B’C’ : $B'C' = \dfrac{6\sin(40°)}{\sin(70°)}$

שימוש נוסף במשפט פיתגורס, הפעם במשולש B’CC’ נותן $CC'^2 = CB'^2 - C'B'^2$.

$$CC'^2 = \frac{36(\sin 40°)^2}{(\sin 20°)^2} - \frac{36(\sin 40°)^2}{(\cos 20°)^2} =$$

$$= 36(\sin 40°)^2 \cdot \left(\frac{1}{(\sin 20°)^2} - \frac{1}{(\cos 20°)^2} \right) =$$

$$= 36(\sin 40°)^2 \cdot \frac{\cos 40°}{(\sin 20°)^2 \cdot (\cos 20°)^2} =$$

$$= 144(\sin 40°)^2 \cdot \frac{\cos 40°}{(\sin 40°)^2} =$$

$$= 144\cos 40°$$

שלב ה׳: לשם חישוב הנפח עלינו לכפול את שטח המשולש ABC (הבסיס) בגובה CC’.

נפח $= 18\sin 40° \cdot 12\sqrt{(\cos 40°)}$

$$= 216 \sin 40° \cdot \sqrt{(\cos 40°)}$$

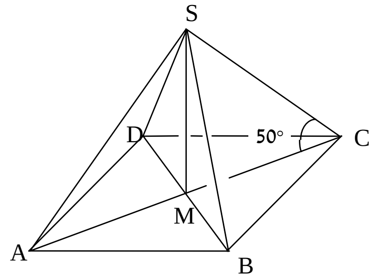
$$= 121.52$$

בעיה 3

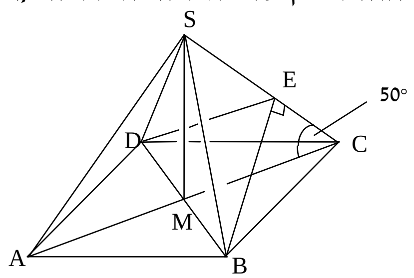
בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע יוצר המקצוע הצדדי זווית בת $50°$ עם בסיס הפירמידה. מהי הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות של הפירמידה?

פתרון

שלב א׳: נצייר פירמידה מרובעת משוכללת SABCD בה M היא נקודת מפגש האלכסונים. נזהה את הזווית בין המקצוע הצדדי SC והבסיס ABCD : הזווית SCM שהיא בת $50°$.



שלב ב׳: נזהה את הזווית בין שתי הפאות הצדדיות SBC ו- SDC על ידי הורדת אנך BE למקצוע הצדדי SC. הזווית BED היא הזווית בין שתי הפאות הצדדיות (ומשולש EBD הוא כמובן שווה שוקיים).



שלב ג׳: נחשב את צלעות המשולש שווה השוקיים EBD. נניח ש- n הוא אורך חצי אלכסון הבסיס (למשל : MC).

לפי משולש SMC : $SC = \frac{n}{\cos 50°}$. כעת, נוכל לחשב את BE לפי הפאה הצדדית SBC שהיא משולש שווה שוקיים בעל שוק $\frac{n}{\cos 50°}$ ובסיס $n\sqrt{2}$.

$\measuredangle C = \arccos\left(\frac{\cos 50°}{\sqrt{2}}\right)$ לכן : $BE = n\sqrt{2}\sin(\arccos(\frac{\cos 50°}{\sqrt{2}}))$

שלב ד׳: נחשב את הזווית בין השני המישורים לפי המשולש שווה השוקיים EBD.

לכן $\frac{\measuredangle BDE}{2} = \arcsin\left(\frac{n}{BE}\right)$ ולכן $\measuredangle BED = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\arccos\cdot\left(\frac{\cos 50°}{\sqrt{2}}\right)}\right)$

כלומר $\measuredangle BED = 105.09°$

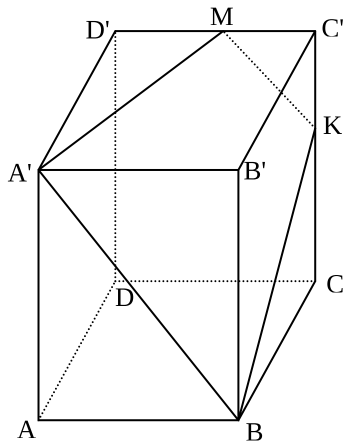
הערות של מיכאל קרייזמן למאמר "שרטוט תלת-ממדי" (פורסם בעל"ה 14, עמודים 86-84)

בסיומו של המאמר המחבר מביא 3 בעיות ופתרונן.

בעיה 1: נתונה קוביה $ABCDA'B'C'D'$. חשב את הזוויות בין המישורים $A'B'C'$ ו- $A'MB$. אם נתון ש-M היא אמצע $C'D'$.

לפתרון שהמחבר מביא אין לי שום הערות. אולם ברצוני לציין שהמאמר היה הרבה יותר מעניין אילו היו מובאות בו שיטות פתרון נוספות.

שיטה I היא שיטה שמבוססת על הקשר הידוע: "שטח ההיטל של מישור נתון על מישור אחר שווה למכפלת שטחו של המישור הנתון בקוסינוס הזווית שבין המישור לבין היטלו".



הדפנות הנגדיות של הקוביה $AA'B'B$ ו- $DD'C'C$ מקבילות זו לזו; המישור הנתון חותך את הפאה $AA'B'B$ בישר $A'B$; לפיכך, הוא יחתוך את הפאה $DD'C'C$ בישר המקביל ל- $A'B$ העובר דרך הנקודה M. נסמן ב- MK את ישר החיתוך של המישור $D'MB$ עם הפאה $DD'C'C$ (ראה שרטוט). למישור החותך יש שתי נקודות משותפות עם הפאה $BB'C'C$ (B ו- K) והוא חותך אותה בישר BK. $A'MKB$ הוא החתך הנדרש.

המשולשים $A'D'M$ ו- BKC חופפים, לכן $BK = A'M$ ולכן החתך $A'MKB$ הוא טרפז שווה-שוקיים. נציין, כי ההיטל של $A'MKB$ על המישור $A'B'C'D'$ הוא $A'MC'B'$.

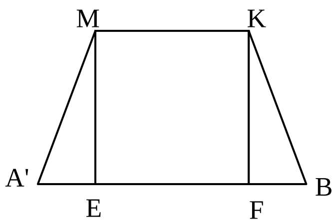
אם φ היא זווית בין המישורים $A'B'C'D'$ ו- $A'MKB$ כי אז $S_{A'MC'B'} = S_{A'MKB} \cdot \cos\varphi$. נסמן את מקצוע הקוביה ב- n, ונחשב את $S_{A'MC'B'}$.

$$S_{A'MC'B'} = S_{A'B'C'D'} - S_{A'D'M} = n^2 - \frac{1}{2} n \cdot \frac{n}{2} = \frac{3n^2}{4}$$

במשולש BKC:
$$BK = \sqrt{n^2 + \frac{n^2}{4}} = \frac{n\sqrt{5}}{2}$$

לכן:
$$A'M = BK = \frac{n\sqrt{5}}{2}$$

לכן:
$$A'B = n\sqrt{2} \quad ; \quad MK = \frac{n\sqrt{2}}{2}$$



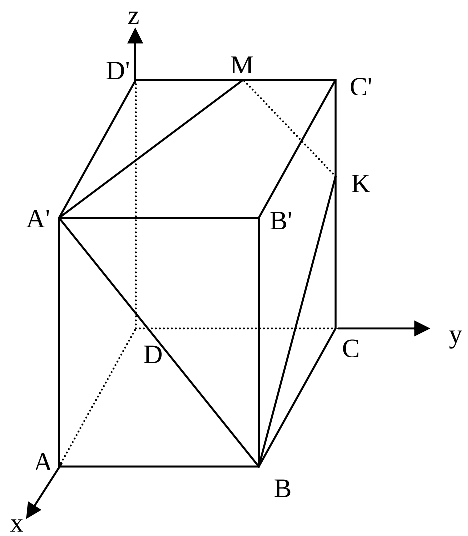
$$A'E=\frac{A'B-MK}{2}=\frac{n\sqrt{2}-\frac{n\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{n\sqrt{2}}{4}$$

במשולש A'ME : $ME=\sqrt{\frac{5n^2}{4}-\frac{2n^2}{16}}=\frac{3n\sqrt{2}}{4}$

לכן:
$$S_{A'MKB}=\frac{1}{2}\left(n\sqrt{2}+\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{3n\sqrt{2}}{4}=\left(\frac{3n\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{9n^2}{8}$$

$$\cos\varphi=\frac{3n^2}{4}:\frac{9n^2}{8}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$
$$\varphi=48.19°$$

בשיטה II נפתור את הבעיה בעזרת וקטורים במערכת צירים. תחילה נחשב את משוואות המישורים A'B'C'D' ו- A'MKB במערכת הצירים המצוינת על השרטוט.



המישור A'B'C'D' מקביל למישור (xy) והמרחק שלו ממנו הוא n, לכן משוואתו היא z = n.

נרשום את משוואת המישור A'BKM בצורה $ax+by+cz+d=0 \quad (1)$

את המקדמים a, b, c, d נחשב בעזרת שיעורי הנקודות

$$M\left(0\,;\frac{n}{2}\,;n\right)\;,\;B(n\,;n\,;0)\;,\;A'(n\,;0\,;n)$$

נקבל את המערכת:

$$\begin{cases}an+cn+d=0\\ an+bn+d=0\\ \frac{bn}{2}+cn+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}cn-bn=0\\ \\ an-\frac{bn}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=b\\ \\ a=\frac{b}{2}\end{cases}$$

$$\frac{bn}{2}+bn+d=0\quad\Rightarrow\quad d=-\frac{3bn}{2}$$

נציב ערכים אלה במשוואה (1) ונקבל $\frac{b}{2}x+by+bz-\frac{3bn}{2}=0$

כלומר: $x + 2y + 2z - 3n = 0$

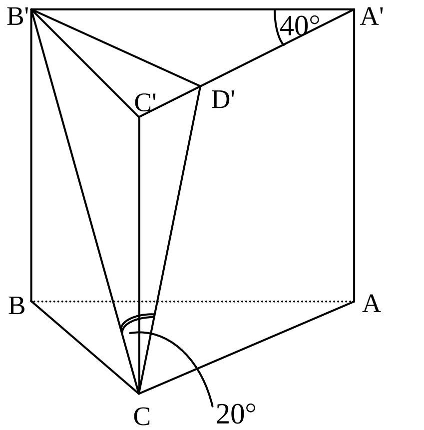
שיעוריו של וקטור הניצב למישור A'B'C'D' הם: $\overline{p} = (0, 0, 1)$.

שיעוריו של וקטור הניצב למישור A'BKM הם: $\overline{q} = (1, 2, 2)$.

נחשב את הזווית שבין וקטורים אלה:
$$\cos\varphi = \frac{0+0+2}{\sqrt{1+4+4\cdot 1}} = \frac{2}{3}$$
$$\varphi = 48.19°$$

בפתרון המוצג במאמר צריך לשרטט את הזווית בין שני המישורים לפני שמחשבים את גודלה של הזווית, דבר המכביד על התלמידים. בפתרונות המוצגים כאן אין כל צורך בשרטוט הזווית ובזה יתרונם.

בעיה 2: במנסרה ישרה ABCA'B'C' (מקצועות צדדיים AA', BB', CC'), הבסיס ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = AC) בעל שוק שאורכה 6 ס"מ וזווית ראש בת $40°$. אלכסון הפאה הצדדית BCC'B' יוצר זווית בת $20°$ עם כל אחת משתי הפאות הצדדיות. יש לחשב את נפח המנסרה.



לדעתי פתרונו של המחבר מסורבל מדי. הפתרון הבא הוא פשוט יותר.

במשולש ישר הזווית B'D'C': $\measuredangle B'C'D' = 70°$. לכן: $B'C' = \frac{B'D'}{\sin 70°} = \frac{B'D'}{\cos 20°}$

במשולש ישר הזווית B'CD': $B'C = \frac{B'D'}{\sin 20°}$

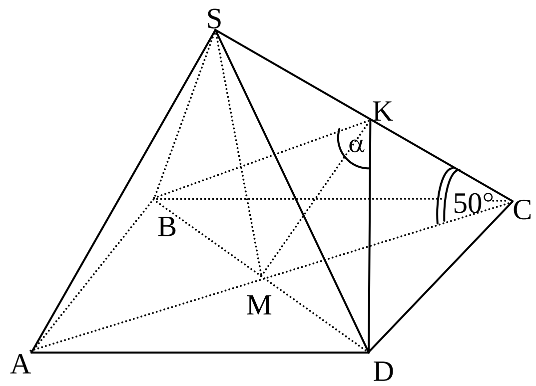
במשולש B'CC':

$$CC' = \sqrt{(B'C)^2 - (B'C')^2} = \sqrt{\frac{(B'D')^2}{\sin^2 20°} - \frac{(B'D')^2}{\cos^2 20°}} =$$
$$= B'D'\sqrt{\frac{\cos^2 20° - \sin^2 20°}{\sin^2 20° \cos^2 20°}} = B'D'\sqrt{\frac{4\cos 40°}{\sin^2 40°}} = \frac{2B'D'}{\sin 40°}\cdot\sqrt{\cos 40°}$$

במשולש A'B'D': $B'D' = A'B'\sin 40° = 6\sin 40°$

$$CC' = \frac{12\sin 40°}{\sin 40°}\sqrt{\cos 40°} = 12\sqrt{\cos 40°}$$
$$\varphi = 18\sin 40° \cdot 12\sqrt{\cos 40°} = 216\sin 40°\sqrt{\cos 40°} = 121.52$$

בעיה 3: בפירמידה ישרה, שבסיסה ריבוע, יוצר המקצוע הצדדי זווית בת $50°$ עם בסיס הפירמידה. מהי הזווית בין הפאות הצדדיות הסמוכות של הפירמידה?



פתרון הבעיה המובא במאמר אינו יעיל במיוחד. את הערך הנדרש רצוי לחשב בצורה:

במשולש MKB:
$$(1) \quad MK = MC\sin 50°$$

$$(2) \quad MK = MB\cot\frac{x}{2}$$

נחלק את (1) ב- (2) ונקבל:

$$1 = \frac{\sin 50°}{\cot\frac{x}{2}}$$

ומכאן:
$$\frac{x}{2} = \operatorname{arccot}(\sin 50°)$$

$$x = 2\operatorname{arccot}(\sin 50°) = 105.09°$$

לדעתי רצוי להציג בפני התלמידים שיטות שונות לפתרון בעיות, כדי לפתח בהם חשיבה יצירתית ולהעלות את רמתם המתמטית.

תגובתו של ד"ר גיורא מן למכתבו של מיכאל קרייזמן (פורסם בעל"ה 14, עמוד 86)

ראשית, אני מברך על הגישה לפתור בעיות בדרכים שונות ולדון במעלותיהן וחסרונותיהן.

שנית, פתרון הבעיות לא היה המטרה העיקרית של המאמר. הכוונה היתה להראות כיצד משתלב השרטוט התלת-מימדי בפתרון בעיות בסטראומטריה.

שלישית, פתרונותיו של מר קייזמן דורשים לעיתים ידע מתקדם למדי, כך שהכנסתם למאמר מסוג זה היתה עלולה להרתיע חלק לא מבוטל מן הקוראים (הכוונה לתלמידים).