הנושא : **משפט פרמה האחרון**

הוכן ע״י : אנה ספרד, האוניברסיטה העברית.

תקציר : במאמר סוקרת המחברת בקצרה את אחד המאורעות הדרמטיים בתולדות המתמטיקה : הצגה של הוכחת משפט פרמה ע״י אנדרו ויילס ב- 1993, כהמשך לניסיונות קודמים להוכחת משפט פרמה - ניסיונות אשר תרמו רבות לפיתוח תחומים שונים במתמטיקה. משפט פרמה טוען כי כאשר n טבעי גדול מ- 2, אין למשוואה $x^n + y^n = z^n$ פתרונות שלמים שונים מאפס.

מילות מפתח : משפט פרמה, פרמה, היסטוריה של המתמטיקה, לאמה, קומר, מורדל, וייל, דלין, פלטינגס, הית-בראון, טניאמה, ריבט, ויילס, תורת המספרים, אלגברה, מספרים אלגבריים, משוואות אלגבריות, משוואות דיופנטיות, שלשות פיתגוריות, מספרים אידיאליים, מספרים ראשוניים רגולריים, גיאומטריה אלגברית, עקומות אליפטיות, השערת טניאמה.

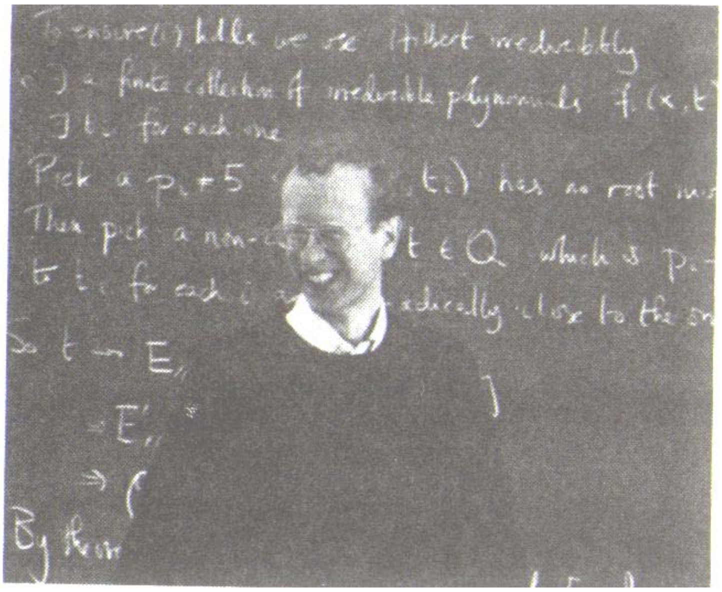
החומר פורסם במסגרת : על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993, עמודים 32-29.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 5 עמודים.

משפט פרמה האחרון - דו"ח מסכם (בערבון מוגבל)

בסוף חודש יוני השנה ארע אחד הארועים הדרמטיים והמרגשים ביותר בתולדות המתמטיקה. שבועון TIME האמריקאי, בגליונו מיום 5 ליולי 1993, מתאר זאת כך:

למתמטיקאים שנאספו באולם ההרצאות של אוניברסיטת קמבריג' ביום שני האחרון לא היה כל מושג על כך, שהם עומדים להיות עדים לארוע היסטורי. הם באו לשמוע את אנדרו ויילס (Andrew Wiles), עמיתם ממוצא אנגלי המכהן כפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת פרינסטון. ויילס היה אמור לתת שלוש הרצאות בנות שעה אחת בנושא "תבניות מודולריות, עקומות אליפטיות והצגות של גלואה" - נושא מופשט ומתקדם במיוחד גם לפי הקריטריונים המועדנים של המתמטיקה הגבוהה. בסיומה של השעה הראשונה חש הקהל שמשהו יוצא דופן עומד להתרחש. נזכר ניגל בוסטון, מתמטיקאי המבקר במכון ניוטון בקמבריג': "פתאום תפסנו לאן הוא חותר; אנשים הסתכלו אחד על השני בעיניים גדולות". לקראת סיומה של השעה השלישית החדר היה מלא עד אפס מקום במומחים לתורת המספרים שלא ניסו להסתיר את התלהבותם. ויילס סיים את הרצאתו בכתיבת משוואה פשוטה שתכונותיה הן בבחינת "תוצאות לווי" של הדברים שנאמרו קודם. הקהל פרץ במחיות כפיים סוערות.



נכון לעכשיו, זהו סיום פרשיה מרתקת בת מאוד רבות של שנים. למעשה, הכל התחיל באלכסנדריה באמצע המאה השלישית לספירה, כאשר המתמטיקאי היווני דיופנט כתב את ספרו המפורסם **אריתמטיקה**. הספר דן בפתרונות שלמים (או, באופן שקול, בפתרונות רציונליים) של משוואות שונות. ההגבלה על סוג הפתרונות לא היתה עניין שרירותי: בתקופה הזאת מספרים רציונליים היו הסוג היחיד של המספרים המוכר על-ידי המתמטיקאים (משפט פיתגורס והשלכותיו בדבר האי-רציונליות של אורכי קטעים מסוימים היו אומנם כבר ידועים, אך הרעיון של **מספר** אי-רציונלי נדחה עדיין מכל וכל). השם **משוואות דיופנטיות** ניתן במתמטיקה המודרנית לבעיות שבהן מחפשים למשוואות פתרונות שלמים בלבד.


Arithmeticorum Liber II. 61

internallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adiectis unitatibus 10. aequatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quaestioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositae eadem ratio est quae & appositae praecedenti quaestioni, nil enim aliud requirit quam ut quadratum interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit ut 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. aequales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. haec aequabuntur unitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur utrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. aequales 16 N. & fit 1 N. 16/5. Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter vero 144/25 & utriusque summa est 400/25 seu 16. & uterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot unitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. — 16 N. Caeterum volo utrumque simul aequari unitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. aequatur unitatibus 16. & fit 1 N. 16/5 erit

עמ׳ 61 מתוך הספר **אריתמטיקה** של דיופנט בהוצאה משנת 1670.
העמוד מכיל את הבעיה II-8 וכן את הערתו המפורסמת של פרמה.

אחת הבעיות שעניינו את דיופנט היתה בעית הפירוק של "מספר ריבועי" (מספר שלם שהינו ריבוע של מספר שלם אחר) לסכום של שני מספרים ריבועיים. ובמילים אחרות, דיופנט חיפש פתרונות שלמים למשוואה $x^2 + y^2 = z^2$. כידוע, קיימות שלישיות רבות של מספרים שלמים המקיימות משוואה זאת (למשל 5 ,5 ,3 ; 13 ,12 ,5), והן נקראות - מסיבות מובנות - שלישיות של **מספרים פיתגוריים**. בעית השלישיות הפיתגוריות, המופיעה בספרו של דיופנט כבעיה מספר II-8, היא זו שכעבור 1400 שנים הולידה אחת הקושיות המתמטיות העקשניות ביותר בכל הזמנים.

האחריות הישירה על המבוכה שנמשכה לאחר מכן 365 שנים היא זו של פייר דה-פרמה

(1655-1601, Pierre de Fermat) - משפטן, משורר ומתמטיקאי צרפתי, הידוע בתרומתו הרבה לתורת המספרים, לגיאומטריה אנליטית, להסתברות ואפילו ליסודות האנליסה המתמטית (למעשה, נמנה פרמה על מייסדי כל התחומים האלה). בקוראו את הבעיה II-8 בספרו של דיופנט חשב פרמה על הכללת התוצאה והגיע למסקנה, כי **כאשר n גדול מ-2, אין למשוואה** $x^n + y^n = z^n$ פתרונות שלמים שונים מאפס. בשולי הספר רשם אז את המילים האלה:

> "אין זה אפשרי לפרק מעוקב לסכום של שני מעוקבים, חזקה רביעית לסכום של שתי חזקות רביעיות או, באופן כללי, חזקה כללית כלשהי הגבוהה מהחזקה השניה לסכום שתי חזקות מאותו סוג. מצאתי הוכחה מדהימה של עובדה זו, אך השוליים צרים מלהכילה".

זוהי ההערה המפורסמת והמרגיזה ביותר בתולדות המתמטיקה. עד היום מתלבטים המתמטיקאים בין שלוש פרשנויות שונות לעניין. ראשית, משערים כי פרמה **חשב** שההוכחה אכן בידיו, והוא טעה מבלי משים (יתכן למשל, כי לאחר שהוכיח את טענתנו למקרה של n = 4 הניח, ששאר המקרים יעבדו באותה צורה ; אגב, שיטת 'הירידה האין-סופית' שיישם במקרה של n = 4 היא גירסתו המקורית של פרמה למה שנקרא היום שיטת האינדוקציה המתמטית). זאת האפשרות הסבירה ביותר, שכן המנגנון שפותח בחיפוש אחר ההוכחה הוא מורכב ועשיר מדי כדי שאדם אחד ימציאו בכוחות עצמו. עם זאת, יש כאלה המציעים אפשרות אחרת: לדעתם אין לפסול אפשרות, כי היתה לפרמה הוכחה אלמנטרית, ועם זאת כה מתוחכמת עד כי רק גאון מסוגו יכול היה להמציאה. ואולם, אין זה סביר שהוכחה אלמנטרית כלשהי - ויהיה הרעיון שעליו היא בנויה מתוחכם ככול שיהיה - תעלם מעיניהם של מפצחי הקושיות המיומנים היטב, שבמשך מאות של שנים לא חסכו כל מאמץ בחיפושים אחריה. לבסוף יש האומרים, כמ פרמה חמד לו לצון, ותו לא. אף אם היתה זו רק התבדחות, הרי שאם לשפוט לפי השלכותיה, היתה זו ההתבדחות הרצינית ביותר בהיסטוריה.

ארועים רבים מדי ארעו במהלך ההתמודדות עם משפט פרמה בכדי לסקור את כולם ברשימה זאת ; מה גם, שככול שמתקדמים בסיפור, ההתפתחויות המתמטיות הולכות ונעשות סבוכות יותר, והסיכויים להבין את מהותן ללא לימוד ממושך הולכים ופוחתים. די אם נאמר, כי חשיבותה המיוחדת של בעית פרמה אינה טמונה דווקא בבעיה עצמה, אלא בהתפתחויות שבאו תוך כדי חיפוש אחר פתרונה. תורות מתמטיות שלמות נבנו כתוצאה מהרצון להתקרב אל ההוכחה החמקמקה. נערוך רשימה קצרה של התחומים המתמטיים שיצאו נשכרים ממאמציהם של מחפשי הפתרון, ותוך כדי כך נסקור כמה מציוני דרך החשובים ביותר בתהליך החיפוש.

אין זה קשה להווכח, שכדי להוכיח את משפט פרמה די להראות את נכונותו עבור n = 4 ועבור כל המספרים הראשוניים האי-זוגיים. ההוכחה עבור n = 4 ניתנה על-ידי פרמה עצמו. אוילר (Euler) הוכיח את המקרה של n = 3 ובסביבת 1830 הושלמה ההוכחה עבור n = 5. דיריכלה (Dirichlet) בחר לטפל ב- n = 14 שבאורח מפתיע התברר כפשוט יותר מהמקרה של n = 7. למרות כל ההישגים האלה, ההוכחה הכללית לא נראתה באופק.

כוחה של בעית פרמה כמחוללת רעיונות מתמטיים חדשים הופגן לראשונה כאשר נוסדה **תורת המספרים האלגבריים**. מספרים אלגבריים הם מספרים המקיימים משוואות פולינומיאליות עם מקדמים רציונליים. בהקשר של משוואות דיופנטיות ישנה חשיבות מיוחדת ל**שלמים אלגבריים** (שרשים של משוואות פולינומיאליות עם מקדמים שלמים, כשהמקדם של החזקה הגבוהה ביות הוא 1). בהסתמך על הנחות מסויות בדבר פריקות של שלמים אלגבריים ניסה גבריאל לאמה (Gabriel Lamé) להוכיח את משפט פרמה, ובשנת 1847 היה משוכנע שהדבר עלה בידו. עד מהרה התברר, כי היתה זו אשליה, ותורת המספרים האלגבריים המשיכה לפרוח הן כבסיס לספקולציות חדשות על דרכי הוכחה של משפט פרמה, והן כנושא מחקר בזכות עצמו.

היה זה קומר (Kummer) שבשנת 1844 הוכיח משפט אשר הפריך אחת מהנחות היסוד של לאמה. המשך החיפושים אחר פתרון הבעיה הוביל אל המצאה חדשה וחשובה: אל **תורת המספרים האידיאליים** שהתפתחה עם הזמן ל**תורת האידיאלים**. שמו של קומר ידוע היום בעיקר בזכות תרומתו זו לאלגברה המודרנית, אך מעטים מהסטודנטים הלומדים את התורה יודעים על הקשר ההיסטורי בינה לבין משפט פרמה. ובאשר למשפט עצמו, תרומתו של קומר התבטאה בהוכחת מספר רב של מקרים נוספים. הוא הראה, כי המשפט מתקיים עבור קבוצה גדולה של מספרים ראשוניים הנקאאים **רגולריים** (regular primes). היום ידוע, כי זוהי קבוצה רחבה למדי. למשל בין המספרים הראשוניים הקטנים מ100-, רק 37 ,59 ו67- אינם רגולריים. עם זאת, טרם נמצא אישור לסברה, כי קבוצת הראשוניים הרגולריים היא אין-סופית.

רעיון נוסף שמיקד את תשומת ליבם של מחפשי ההוכחה האבודה היה מושג **העקומות האליפטיות**. בעיקבות משפט מסויים בדבר פתרונות של משוואות אליפטיות, שנוסח והוכח על-ידי J. L. Mordell, עלה הרעיון למיין משוואות פולינומיאליות לפי מספר הפתרונות הרציונליים

שלהן (ברור הקשר למשפט פרמה האחרון!). חקר מעמיק, שבמהלכו נתגלה קשר בין פתרונות המשוואות הפולינומיאליות לתכונות טופולוגיות של המשטחים המיוצגים על-ידן (מדובר בעיקר במשתנה מרוכב), הביא את מורדל בשנת 1922 לניסוח השערתו המפורסמת, המכילה כמקרה פרטי את הטענה: אם $n > 3$, כי אז מספר הפתרונות של המשוואה $x^n + y^n = z^n$ הוא סופי (בפרט, הוא יכול להיות שווה לאפס, כמובן). עבודתו של מורדל האיצה באופן משמעותי ביותר את התפתחותו של תחום הנקרא **גיאומטריה אלגברית**.

61 שנה חלפו עד אשר זכתה השערת מורדל לאישורה הסופי. ובינתיים, האמונה בנכונותה הלכה, והתגברה בהדרגה בזכות המאמץ המרוכז של הקהילה המתמטית. בשנת 1947 ניסח אנדרה וייל (Andre Weil) שלוש השערות נוספות, שכמו רוב ההמצאות הקשורות למשפט פרמה, נתגלו כבעלות חשיבות מכריעה בתחומים אחרים של המתמטיקה. הן עזרו, בין השאר, בהתרת בעיות רבות בגיאומטריה אלגברית. השערות וייל הוכחו על-ידי פייר דלין (Pierre Deligne) בשנת 1975. טענות רבות נוספות נוסחו בדרך אל אישורה של השערת מורדל, והיא הוכחה סופית בשנת 1983 על-ידי פלטינגס (Gerd Faltings). כמו ברוב המקרים, הוכח למעשה משפט רחב יותר, וההשערה המבוקשת נבעה כמסקנה ממנו.

פתרונה הסופי של בעית פרמה נראה לאחרונה ממש בהישג יד כאשר הוכיח הית-בראון (D. R. Heath-Brown) שהחלק היחסי של מספרים ראשוניים המקיימים את המשפט שואף ל-100% כאשר n שואף לאין סוף. השערה נוספת, הידועה על שם מנסחה "השערת טניאמה" (Taniyama) היא זאת שהובילה אל השלמת המשימה. לפני שאנדרו ויילס הביא את הוכחתה, הראה מתמטיקאי אמריקאי קנט ריבט (Kenneth Ribet), כי המשפט המפורסם הוא מקרה פרטי שלה.

ארמון מפואר ורב קומות נבנה בדרך אל הניצחון הסופי. היכן מקומו של ויילס בתוך גורד השחקים המתמטי הזה? בפנטהאוס, כמובן. ללא הנדבכים הרבים שהונחו בעמל רב על-ידי דורות של מתמטיקאים, לא היה עולה בידיו של הפרופסור מפרינסטון להקרא "המתמטיקאי שהוכיח את משפט פרמה האחרון". ויילס היה כשחקן האחרון במשחק ההרכבה שנמשך מאות של שנים. הוא הצטרף לבניית "הפזל" בשלב המכריע - בשלב שבו כל חלקי התמונה הורכבו כבר ורק חוליה קטנה אחת היתה נחוצה כדי לצרפם לשלמות אחת. אשרי האדם שהיתה לו הזכות לבצע מהלך זה.

מתמטיקאים שאיתם שוחחתי ימים ספורים לאחר הארוע הסבירו, כי תוצאתו של ויילס עוררה אמון מידי דווקא כזכות העובדה, שבניגוד לרבים מקודמיו הוא לא ניסה ללכת בשבילים צדדיים, אלא בחר ב"דרך המלך" - במסלול שנבנה במאמץ משותף של אנשים רבים, במסלול שכל חוליותיו הקודמות נבדקו בקפידה. ויילס עשה את הצפוי - ביצע תוכנית ששלביה תוכננו מראש. חשוב גם לציין, כי מדובר במתמטיקאי ששמו הולך לפניו. בקרב מומחים לתורת המספרים זכה ויילס להוקרה רבה עוד בזכות תוצאותיו הקודמות הקשורות למשפט פרמה האחרון. אף על פי, שעבודתו המכריעה משתרעת על פני 200 עמודים ויותר, יש האומרים כי הם הבינו היטב את עקרונותיה וכי הסיכוי לכך שתמצא בה שגיאה קטלנית היא נמוכה.

ברור כעת, כי הוכחת משפט פרמה אינה יכולה להחשב למעשה ידיו של אדם אחד. נשאלת על כן השאלה למי מגיע פרס וולפסקל האגדי, הממתין מאז 1908 למפצח סודו של פרמה במכון למתמטיקה של אוניברסיטת גטינגן. לאנדרו ויילס, כמובן, אך אולי גם לכמה מתמטיקאים נוספים שסללו לו את הדרך. כאשר הוצע הפרס לראשונה, היה שוויו 100,000 מרק גרמניים. בשל תנודות משונות בשערי המטבע, ערכו הנוכחי נאמד בכ-10,000 מרק. מזלם של אלה עשויים לזכות בו כעת הוא בכך, שהם הספיקו לסיים את המלאכה לפני שעת 2007, כשתוקפו היה פג בכל מקרה.

היה זה הדוכס מוולינגטון (Duke of Wellington), המצביא האנגלי הדגול, שאמר כי "מלבד תבוסה בקרב, ניצחון הוא האסון הגדול ביותר". סיומה של פרשת פרמה הוא, ללא ספק, ניצחון שטומן בחובו הפסד אמיתי - הפסד של תמריץ יחיד במינו לחיפוש אחר רעיונות מתקדמים, הפסד של מניע רב-עוצמה לבניית עולמות מופשטים חדשים.

רשימת ספרות והמלצות לקריאה נוספות

Boyer, Carl B. and Uta C. Mertzbach, (1991), *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons. Devlin, Keith (1988), *Mathematics, the New Golden Age,* pp. 177-200. Penguin Books.

Katz, Victor J. (1993), *A History of Mathematics,* Harper Collins.

Stewart, Ian N. (1987), *The Problems of Mathematics,* pp. 24-34, Oxford Univeraity Press.

Stewart, Ian N., and David O. Tall (1979), *Algebraic Number theory,* Chapman and Hall

בניימין וייס, ״משפט פרמה האחרון -דו״ח התקדמות״, על״ה 2, 3, 4.