המרכז להוראת המדעים ע״ש עמוס דה שליט אוניברסיטת ירושלים

הנושא: **שימוש בוקטורים להתרת בעיות**

<u>הוכן ע״י</u>: מיכאל קרייזמן, רמת-גן.

<u>תקציר</u>: במאמר מציג המחבר כיצד ניתן להשתמש בפעולות הבסיסיות המוגדרות על וקטורים להוכחת אי-שויונים, מציאת הערך המקסימלי/מינימלי של פונקציה, פתרון משוואות והתרת מערכת משוואות. הדוגמאות המובאות במאמר מדגימות את היעילות של שימוש בוקטורים בבעיות הקשורות לנושאים הנ״ל, למרות שבמבט ראשון נראה שהן אינן קשורות לנושא הוקטורים. בעל״ה 16 (עמ׳ 88-87) מתייחסת צפורה מימון למאמר זה.

<u>מילות מפתח</u>: וקטורים, אלגברה - טכניקה אלגברית, משוואה אלגברית, אי-שוויון אלגברי, אי-שוויון קושי, אנליזה - חשבון דיפרנציאלי, חקירת פונקציה, מינימום/מקסימום של פונקציה, טריגונומטריה, משוואה טריגונומטרית, אי-שוויון טריגונומטרי, משוואות, אי-שוויונים, מערכת משוואות.

<u>החומר פורסם במסגרת</u>: על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993, עמודים 84-79 ועל״ה 14, עמודים 68-64.

<u>החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה</u>: 19 עמודים.

שימוש בוקטורים להתרת בעיות

חלק א: אי-שוויונים

מבוא

פתרון התרגילים המובאים במאמר זה מתבסס על היסודות התאורטיים שלהלן:

1. אם $\underline{a} = (a_1,b_1,c_1)$, $\underline{b} = (a_2,b_2,c_2)$
הרי $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

2. אם $\underline{a} = (a,b,c)$, אורך הוקטור $\underline{a}$ $\quad |\underline{a}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

3. מהעובדה ש- $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\gamma$, כאשר γ היא הזווית בין הוקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ נובע כי $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \le |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$ מכיוון ש- $|\cos\gamma| \le 1$.
על פי 1 ו- 2 מתקבל האי שוויון $|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| \le \sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}$
אם $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - מספרים אי שליליים, אפשר לרשום אי שוויון זה בצורה
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \le \sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}$$
או $\left(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right)^2 \le \left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)$
אי-שוויון זה נקרא **אי-שוויון של קושי.**

4. אם $|\underline{a} \cdot \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$ אזי הוקטורים $|\underline{a}|$ ו- $|\underline{b}|$ תלויים לינארית.
מזה נובע ששיעורי הוקטורים פרופורציוניים בהתאמה. כלומר, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

5. מהמערכת הוקטורית: $\begin{cases} \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{c} = 0 \end{cases}$
נובע ש- $\underline{a} = \underline{0}$, או אם $\underline{a} \ne \underline{0}$, אז: $\underline{b} = \underline{c} = \underline{0}$ או הוקטורים $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ תלויים לינארית.

בעזרת עובדות אלה אפשר לפתור משוואות ומערכות משוואות, ולהוכיח אי שיוויונים.

הוכחת אי-שוויונים

1. הוכח כי אם a, b, c, d - מספרים אי שליליים אזי $\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

הוכחה

נגדיר שני וקטורים: $\underline{u} = \left(\sqrt{a}, \sqrt{c}\right), \underline{v} = \left(\sqrt{b}, \sqrt{d}\right)$
$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

"שימוש בוקטורים להתרת בעיות", מיכאל קרייזמן
עלי"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993
עלי"ה 14, אדר תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

$$|\underline{u}|\cdot|\underline{v}| = \sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+d} = \sqrt{(a+c)\ (b+d)}$$

על פי האי-שוויון של קושי מקבלים $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)\,(b+d)}$

כנדרש.

2. הוכח את האי-שוויון $\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)} \le 2\sqrt{ab}$

כאשר $a, b, c > 0$.

הוכחה

יהי

$$\underline{m} = \left(\sqrt{a+c}, \sqrt{a-c}\right)$$
$$\underline{n} = \left(\sqrt{b+c}, \sqrt{b-c}\right)$$

מכאן

$$\underline{n}\cdot\underline{m} = \sqrt{(a+c)\,(b+c)}\ +\ \sqrt{(a-c)\ (b-c)}$$
$$|\underline{n}|\cdot|\underline{m}| = \sqrt{2a\cdot 2b} = 2\sqrt{ab}$$

על סמך אי שוויון קושי נקבל $\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)} \le 2\sqrt{ab}$

שוויון מתקיים אם הוקטורים $\underline{m}$ ו- $\underline{n}$ תלויים לינארית.

כלומר, $\sqrt{\dfrac{a+c}{b+c}} = \sqrt{\dfrac{a-c}{b-c}}$

מזה נובע ש- $a = b$.

3. הוכח כי

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$$

כאשר a, b, c, d - מספרים אי שליליים.

הוכחה

נגדיר את הוקטורים: $\underline{m_1} = \left(\sqrt{a}, \sqrt{c}\right)$, $\underline{n_1} = \left(\sqrt{d}, \sqrt{b}\right)$, $\underline{m_2} = \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$, $\underline{n_2} = \left(\sqrt{c}, \sqrt{d}\right)$,

$\underline{m_3} = \left(\sqrt{a}, \sqrt{d}\right)$, $\underline{n_3} = \left(\sqrt{b}, \sqrt{c}\right)$

נפעיל על כל זוג וקטורים m_I, n_I את אי-שוויון קושי ונקבל

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ad}+\sqrt{bc}$$
$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \ge \sqrt{ac}+\sqrt{bd}$$
$$\sqrt{(a+b)(b+c)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

כאשר מחברים את האגפים המתאימים של האי שוויונים מקבלים את המבוקש.

4. האם קיימים מספרים a, b, c גדולים או שווים ל- 1 שעבורם מתקיים האי שוויון

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}$$

פתרון

נשתמש באי שוויון קושי לוקטורים $\underline{m} = \left(\sqrt{a-1}, 1\right)$ ו- $\underline{n} = \left(1, \sqrt{b-1}\right)$.

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1} \le \sqrt{a-1+1}\cdot\sqrt{b-1+1}$$
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1} \le \sqrt{ab}$$

נחבר לכל אחד מאגפי האי שוויון $\sqrt{c-1}$ ונקבל:

(1) $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{ab}+\sqrt{c-1}$

עתה נוכיח את האי-שוויון $\sqrt{ab}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$

נשתמש באי-שוויון קושי לוקטורים $\underline{p}=\left(\sqrt{ab},1\right)$, $\underline{q}=\left(1,\sqrt{c-1}\right)$

(2) $\sqrt{ab}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{(ab+1)c}$

מ- (1) ו- (2) נובע כי: $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$

לכן לא קיימים מספרים a, b, c כמתואר בבעיה.

5. הוכח כי אם a, b, c > 0 אזי $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{m}=\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)$, $\underline{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$

נפעיל עליהם את אי-שוויון קושי ונקבל $1+1+1 \le \sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

כלומר $\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \ge 3$

כאשר מעלים את שני האגפים בריבוע מקבלים את האי שוויון הנדרש.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$$

שוויון מתקיים אם הוקטורים $\underline{m}$ ו- $\underline{n}$ תלויים לינארית. כלומר, $\frac{\sqrt{c}}{\frac{1}{\sqrt{c}}}=\frac{\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$

משוויונים אלה נובע כי $a=b=c$.

6. הוכח את האי-שוויון $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}} \ge \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$

כאשר a, b, c > 0.

הוכחה

נבחר שני וקטורים שמכפלתם הסקלרית שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$

ומכפלת אורכיהם היא $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$.

קל לראות שהוקטורים $\underline{m}=\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$, $\underline{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ מקיימים תנאים אלה.

מאי שוויון קושי מקבלים $\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}} \ge \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$

ומכאן $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a} \ge \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$

שוויון מתקיים אם $\underline{m}$ ו- $\underline{n}$ תלויים לינארית. במקרה זה $\frac{1}{\sqrt{b}}:\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}:\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{1}{\sqrt{b}}$

לכן $\begin{cases} c^2=ab \\ a^2=bc \end{cases}$ ואז $a=b=c$.

7. אם $a, b, c > 0$ הוכח כי $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$.

הוכחה

נתבונן בשני הוקטורים $\underline{m}=\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\ ,\ \sqrt{\frac{bc}{a}}\ ,\ \sqrt{\frac{ac}{b}}\right)$, $\underline{n}=\left(\sqrt{\frac{ac}{b}},\sqrt{\frac{ab}{c}},\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$

נפעיל את אי-שוויון קושי $a+b+c\leq\sqrt{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}}\cdot\sqrt{\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}}$

מכאן $a+b+c\leq\sqrt{\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)^2}$ או $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$

8. הוכח כי $\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5>\frac{1}{3}$

הוכחה

נתבונן בשני הוקטורים $\underline{m}=(\log_{30}2\ ,\ \log_{30}3\ ,\ \log_{30}5)$, $\underline{n}=(1,1,1)$ מאי-שוויון קושי מקבלים

$$\log_{30}2+\log_{30}3+\log_{30}5<\sqrt{\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5}\cdot\sqrt{1+1+1}$$

$$\log_{30}(2\cdot3\cdot5)<\sqrt{3}\cdot\sqrt{\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5}$$

ולכן $\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5>\frac{1}{3}$

9. הוכח כי $3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{m}=(1\ ,\ a\ ,\ a^2)$ $\underline{n}=(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$

על פי אי-שוויון קושי $1+a+a^2\leq\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+a^2+a^4}$

נעלה בריבוע את שני אגפי האי-שוויון ונקבל $3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$

קל לראות כי שוויון יתקבל כאשר $a=1$.

10. הוכח את האי-שוויון $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geq abc(a+b+c)$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{m}=(ab\ ,\ bc\ ,\ ac)$, $\underline{n}=(ac\ ,\ ab\ ,\ bc)$ בעזרת אי-שוויון קושי נקבל $a^2bc+ab^2c+abc^2\leq\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\cdot\sqrt{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}$.

לכן $a^2bc + ab^2c + abc^2 \le a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$
או $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge abc\,(a + b + c)$.
שוויון יתקיים כאשר $a = b = c$.

11. הוכח את האי-שוויון $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \le 12$ עבור $1.5 \le a \le 16\frac{2}{3}$

הוכחה

נבחר $\underline{m} = \left(\sqrt{a+1}\ ,\ \sqrt{2a-3}\ ,\ \sqrt{50-3a}\right)$ $\quad \underline{n} = (1\ ,1\ ,1)$

על סמך אי-שוויון קושי נקבל $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{a+1+2a-3+50-3a}$

לכן $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \le 12$

שוויון מתקיים כאשר הוקטורים $\underline{m}$ ו- $\underline{n}$ תלויים לינארית.

כלומר, $\dfrac{\sqrt{a+1}}{1} = \dfrac{\sqrt{2a-3}}{1} = \dfrac{\sqrt{50-3a}}{1}$

משוויונים אלה מקבלים את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}\sqrt{a+1} = \sqrt{2a-3}\\ \sqrt{a+1} = \sqrt{50-3a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 4\\ a = 13\frac{1}{4}\end{cases}$$

זו סתירה ולכן מתקיים רק האי שוויון $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12$ עבור $1.5 \le a \le 16\frac{2}{3}$

12. הוכח כי לכל שלושה מספרים חיוביים a, b, c מתקיים האי-שוויון
$a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

הוכחה

נכפיל את שני אגפי האי-שוויון הנתון ב- $a + b + c$, $(a + b + c > 0)$,
$(a^3b + b^3c + c^3a)(a + b + c) \le abc\,(a + b + c)^2$

נתבונן בוקטורים $\underline{p} = \left(a\sqrt{ab}\ ,\ b\sqrt{bc}\ ,\ c\sqrt{ca}\right)$, $\underline{q} = \left(\sqrt{c}\ ,\ \sqrt{a}\ ,\ \sqrt{b}\right)$

על סמך אי שוויון קושי,

$$a\sqrt{abc} + b\sqrt{abc} + c\sqrt{abc} \le \sqrt{a^3b + b^3c + c^3a}\cdot\sqrt{a+b+c}$$

נעלה בריבוע את שני אגפי אי-השוויון $(a^3b + b^3c + c^3a)\,(a + b + c) \ge abc\,(a + b + c)^2$

כלומר, $a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2bc + ab^2c + abc^2$

שוויון יתכן רק כאשר הוקטורים $\underline{p}$ ו- $\underline{q}$ תלויים לינארית. כלומר, $\dfrac{c\sqrt{ca}}{\sqrt{b}} = \dfrac{b\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$ לכן

$$\frac{a^3b}{c} = \frac{b^3c}{a} = \frac{c^3a}{b}$$

ומכאן $\begin{cases}a^4b = b^3c^2\\ b^4c = c^3a^2\end{cases} \Rightarrow a = b = c$

13. הוכח כי לכל $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3$ חיוביים מתקיים האי-שוויון $a_1 + a_2 + a_3 \le \dfrac{a_1^2}{a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_3} + \dfrac{a_3^2}{a_1}$

הוכחה

נרשום אי-שוויון זה בצורה $\frac{a_1}{\sqrt{a_2}}\sqrt{a_2}+\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}\sqrt{a_3}+\frac{a_3}{\sqrt{a_1}}\sqrt{a_1}\le\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_1}$

נגדיר וקטורים $\underline{m}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_3}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1}}\right)$, $\underline{n}=\left(\sqrt{a_2},\sqrt{a_3},\sqrt{a_1}\right)$

ונפעיל עליהם את אי-שוויון קושי $a_1+a_2+a_3\le\sqrt{(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_1}\right)}$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל $(a_1+a_2+a_3)^2\le(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_1}\right)$

כלומר, $a_1+a_2+a_3\le\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_1}$

14. הוכח את האי-שוויון $abc^2+bca^2+cab^2\le a^4+b^4+c^4$

נתבונן בוקטורים $\underline{x}=(ac,ba,cb)$, $\underline{y}=(bc,ca,ab)$ ונפעיל עליהם את אי-שוויון קושי

$$abc^2+bca^2+cab^2\le\sqrt{a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2}\cdot\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

נקבל: $abc^2+bca^2+cab^2\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (1)

נתבונן בוקטורים $\underline{u}=(a^2,b^2,c^2)$, $\underline{v}=(c^2,a^2,b^2)$ וגם עליהם נפעיל את אי-שוויון קושי

$$a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2\le\sqrt{a^4+b^4+c^4}\cdot\sqrt{c^4+a^4+b^4}$$

מקבלים: (2) $a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2\le a^4+b^4+c^4$

מ- (1) ו- (2) נובע כי $abc^2+bca^2+cab^2\le a^4+b^4+c^4$

הוכחת אי-שוויונים מותנים

15. הוכח כי אם $a+4b=1$, אז $a^2+4b^2\ge0.2$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{m}=(a,2b)$, $\underline{n}=(1,2)$ ונפעיל עליהם את אי-שוויון קושי,

$a+4b\le\sqrt{a^2+4b^2}\cdot\sqrt{5}$ לכן $\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+4b^2}\ge1$

נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל כי $a^2+4b^2\ge0.2$.

16. הוכח כי $a+b\le c\sqrt{2}$ כאשר a ו- b - הם ניצבים במשולש ישר זווית ו- c - היתר.

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{u}=(a,b)$, $\underline{v}=(1,1)$

על סמך אי שוויון קושי, נקבל $a+b\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}$

במשולש ישר זווית מתקיים משפט פיתגורס $a^2+b^2=c^2$, לכן $a+b\le c\sqrt{2}$.

שוויון יתכן רק כאשר הוקטורים תלויים לינארית. כלומר, $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}$ דהיינו $a=b$.

לכן במשולש ישר זווית ושווה שוקיים יתקיים $a+b=c\sqrt{2}$.

17. הוכח שאם $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$, אז $a+b+c \ge \frac{1}{3}$ לכל $a,b,c>0$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{x}=\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)$, $\underline{y}=(1,1,1)$.

על פי אי-שוויון קושי $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$, לכן $1 \le \sqrt{(a+b+c)}\cdot\sqrt{3}$ כלומר $a+b+c \ge \frac{1}{3}$

18. הוכח את האי-שוויון $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{21}$

בתנאים $a \ge -\frac{1}{4}$, $b \ge -\frac{1}{4}$, $c \ge -\frac{1}{4}$, $a+b+c=1$

הוכחה

נשתמש באי-שוויון קושי לוקטורים $\underline{m}=\left(\sqrt{4a+1}\ ,\ \sqrt{4b+1}\ ,\ \sqrt{4c+1}\right)$, $\underline{n}=(1,1,1)$

נקבל $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{4a+4b+4c+3}$

לכן $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$

כלומר $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le 21$

19. הוכח שאם $m^2+n^2=a^2+b^2+c^2=1$ הרי $|ma+nb+c| \le \sqrt{2}$

הוכחה

אורכי הוקטורים $\underline{p}=(m,n,1)$ ו- $\underline{q}=(a,b,c)$ הם :

$|\underline{p}|=\sqrt{m^2+n^2+1}=\sqrt{2}$, $|\underline{q}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$ כלומר $|\underline{p}|\cdot|\underline{q}|=\sqrt{2}$

המכפלה הסקלרית של וקטורים אלה היא $\underline{p}\cdot\underline{q}=ma+nb+c$ לכן על סמך אי-שוויון קושי

$|ma+nb+c| \le \sqrt{2}$

20. נסמן על ידי α, β ו- γ את הזוויות שיוצר אלכסון התיבה עם המקצועות שלהן קודקוד משותף.

הוכח כי $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \sqrt{3}$

הוכחה

ריבוע אלכסון התיבה שווה לסכום הריבועים של שלושת מימדיו $a^2+b^2+c^2=\ell^2$

נחלק את שני אגפי השוויון ב- ℓ^2 $\left(\frac{a}{\ell}\right)^2+\left(\frac{b}{\ell}\right)^2+\left(\frac{c}{\ell}\right)^2=1$

$\cos\alpha=\frac{a}{\ell}$, $\cos\beta=\frac{b}{\ell}$, $\cos\gamma=\frac{c}{\ell}$ לכן $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (1)

נתבונן בוקטורים $\underline{m}=(\cos\alpha\ ,\ \cos\beta\ ,\ \cos\gamma)$, $\underline{n}=(1,1,)$ ונפעיל עליהם את אי-שוויון קושי

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\cdot\sqrt{3}$ **על פי 1 נקבל** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \sqrt{3}$

שוויון מתקיים כאשר הוקטורים תלויים לינארית.

כלומר $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ מזה נובע ש- $\alpha=\beta=\gamma$, ואז $a=b=c$, במילים אחרות השוויון מתקיים כאשר התיבה היא קוביה.

21. הוכח שאם $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ הרי

$$\sqrt{5+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha}\le 4\sqrt{3}$$

הוכחה

נתבונן בוקטורים $\underline{q}=(1,1,1)$ $\underline{p}=\left(\sqrt{5+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}\ ,\ \sqrt{5+\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}\ ,\ \sqrt{5+\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\alpha}\right)$

מאי שוויון קושי נקבל

$$\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\beta\mathrm{tg}\,\gamma}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\alpha}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{15+(\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\alpha)}\qquad(1)$$

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ לכן $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$

ולכן $\tan(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

מכאן $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\mathrm{ctg}\,\gamma=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\gamma}$

משוויון זה מקבלים $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma=1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$

כלומר: $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha=1$ (2)

בעזרת שוויון (2) מקבל אי שוויון (1) את הצורה

$$\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\beta\mathrm{tg}\,\gamma}+\sqrt{5+\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}\le 4\sqrt{3}$$

22. הוכח שאם γ, β, α זוויות חדות ו $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ הרי

$$\sqrt{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}+\sqrt{\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}+\sqrt{\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha}\le\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$$

הוכחה

נפעיל על הוקטורים $\underline{p}=\left(\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}\ ,\ \sqrt{\mathrm{tg}\beta}\ ,\ \sqrt{\mathrm{tg}\,\gamma}\right)$, $\underline{q}=\left(\sqrt{\mathrm{tg}\,\beta}\ ,\ \sqrt{\mathrm{tg}\gamma}\ ,\ \sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$

את אי-שוויון קושי ונקבל $\sqrt{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}+\sqrt{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}+\sqrt{\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}\le\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma$ (1)

כיוון ש $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, הרי $\alpha+\beta=\pi-\gamma$

ולכן $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}\,(\pi-\gamma)$

מכאן $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}=-\mathrm{tg}\gamma$

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=-\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma\qquad(2)$$

נציב תוצאה (2) באי שוויון (1) ונקבל $\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}+\sqrt{\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}+\sqrt{\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}\le\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$

שוויון מתקיים אם $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ כלומר, במשולש שווה צלעות.

מהתרגילים והפתרונות שהצגנו במאמר זה אפשר להסיק כי כדי להוכיח אי שוויון $A < B$ צריך למצוא שיעורים של שני וקטורים כך שמכפלתם הסקלרית תהיה שווה ל- A ומכפלת אורכיהם תהיה שווה ל- B. בתהליך פתרון השאלות לומדים כיצד למצוא את הוקטורים המתאימים ומתנסים בתהליך זה.

חלק ב: בעיות ערך קיצון ופתרון משוואות

"שימוש בוקטורים להתרת בעיות", מיכאל קרייזמן
על"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993
על"ה 14, אדר תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

מציאת הערך המקסימלי (המינימלי) של פונקציה:

1. מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה: $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$

פתרון: הפונקציה הנתונה מוגדרת בשביל $-7\le x\le 11$.
נתבונן בשני וקטורים: $\underline{v}=(1,1), \underline{u}=\left(\sqrt{x+7};\sqrt{11-x}\right)$
אז $\underline{u}\cdot\underline{v}=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$, $|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|=\sqrt{x+7+11-x}\cdot\sqrt{2}$
אם נפעיל את אי שוויון קושי, נקבל: $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\le 6$
כלומר $y\le 6$, ומכאן $\max\{y \mid -7\le x\le 11\}=6$
השוויון מתקיים אם הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תלויים לינארית, כלומר כאשר $\frac{\sqrt{x+7}}{1}=\frac{\sqrt{11-x}}{1}$
מכאן $x=2$.

2. מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה: $y=\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}$

פתרון: הפונקציה מוגדרת לכל x.
נתבונן ב- $\underline{m}=\left(\sqrt{4\cos^2 x+1};\sqrt{4\sin^2 x+3}\right)$, $\underline{n}=(1;1)$
על סמך אי שוויון קושי נקבל: $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\cos^2 x+4\sin^2 x+4}$;
$\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}\le 4$
כלומר $y\le 4$, ומכאן הערך המקסימלי של y הוא 4.
השוויון מתקיים אם הוקטורים $\underline{n}$ ו- $\underline{m}$ תלויים לינארית, כלומר כאשר $\frac{\sqrt{4\sin^2 x+3}}{1}=\frac{\sqrt{4\cos^2 x+1}}{1}$
$4\cos^2 x-4\sin^2 x=2 ; \cos 2x=\frac{1}{2} ; 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n \quad ; \quad 2x=\frac{\pi}{3}(6n\pm 1)$,
כלומר, $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, $n\in Z$.

3. מצא את הערך המקסימלי של הפונקציה: $y=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{3x-2}+5\sqrt{5-4x}$

פתרון: הפונקציה מוגדרת בשביל $1\le x\le 1\frac{1}{4}$.
ניקח שני וקטורים $\underline{v}=(3;4;5), \underline{u}=\left(\sqrt{x-1};\sqrt{3x-2};\sqrt{5-4x}\right)$
נשתמש באי שוויון קושי לווקטורים האלה, נקבל:
$$3\sqrt{x-1}+4\sqrt{3x-2}+5\sqrt{5-4x}\le\sqrt{x-1+3x-2+5-4x}\cdot\sqrt{9+16+25}$$
$$3\sqrt{x-1}+4\sqrt{3x-2}+5\sqrt{5-4x}\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$$
$$3\sqrt{x-1}+4\sqrt{3x-2}+5\sqrt{5-4x}\le 10$$
כלומר $y\le 10$, ומכאן הערך המקסימלי של y הוא 10.
השוויון מתקיים אם הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תלויים לינארית, כלומר כאשר $\frac{\sqrt{5-4x}}{5}=\frac{\sqrt{3x-2}}{4}=\frac{\sqrt{x-1}}{3}$

מזה נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{3}=\dfrac{\sqrt{3x-2}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{3}=\dfrac{\sqrt{5-4x}}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\sqrt{x-1}=3\sqrt{3x-2}\\ 5\sqrt{x-1}=3\sqrt{5-4x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16(x-1)=9(3x-2)\\ 25(x-1)=9(5-4x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{11}\\ x=\dfrac{70}{61}\end{cases}$$

המשוואות סותרות ולכן מתקיים האי שוויון בלבד: $3\sqrt{x-1}+4\sqrt{3x-2}+5\sqrt{5-4x}<10$
ולכן אין לפונקציה ערך מקסימלי.

פתרון משוואות

1. פתור את המשוואה: $a\sqrt{x^2-b^2-c^2}+b\sqrt{x^2-a^2-c^2}+c\sqrt{x^2-a^2-b^2}=a^2+b^2+c^2$
כאשר a , b ו- c חיוביים.

פתרון: נתבונן בוקטורים $\underline{m}=\left(\sqrt{x^2-b^2-c^2};\sqrt{x^2-a^2-c^2};\sqrt{x^2-a^2-b^2}\right)$, $\underline{n}=(a;b;c)$
היות ש- $\underline{m}\cdot\underline{n}\le|\underline{m}|\cdot|\underline{n}|$ לכן

$$a\sqrt{x^2-b^2-c^2}+b\sqrt{x^2-a^2-c^2}+c\sqrt{x^2-a^2-b^2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3x^2-2a^2-2b^2-2c^2}$$

$$a\sqrt{x^2-b^2-c^2}+b\sqrt{x^2-a^2-c^2}+c\sqrt{x^2-a^2-b^2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2-3\left(x^2-a^2-b^2-c^2\right)}$$

השוויון יתקיים אם $x^2-a^2-b^2-c^2=0$ כלומר כאשר $x=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2. פתור את המשוואה $(\sin^4x-\cos^4x)(tg^4x+ctg^4x)=1$

פתרון: ניקח שני וקטורים: $\underline{m}=(\sin^2x;\cos^2x)$, $\underline{n}=(ctg^2x;tg^2x)$
המכפלה הסקלרית שלהם שווה: $\underline{m}\cdot\underline{n}=\cos^2x+\sin^2x=1$
ומכפלת אורכיהם שווה: $|\underline{m}|\cdot|\underline{n}|=\sqrt{\sin^4x+\cos^4x}\sqrt{ctg^4x+tg^4x}$
לפי הנתון $\underline{m}\cdot\underline{n}=|\underline{m}|\cdot|\underline{n}|$, לכן הוקטורים האלה תלויים לינארית.
מהתלות נובע ש-

$$\frac{\sin^2x}{ctg^2x}=\frac{\cos^2x}{tg^2x}\Rightarrow\frac{\sin^4x}{\cos^2x}=\frac{\cos^4x}{\sin^2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin^6x=\cos^6x\Rightarrow tg^6x=1\Rightarrow tgx=\pm1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,n\in Z\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}(4n\pm1)\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}(2k+1),k\in Z$$

3. פתור את המשוואה $0.5|\sin2x|+\cos^2x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}|\sin x|\sqrt{1.5(\cos^2x+1)}$

התרה:

$$\sqrt{2}|\sin x|\,|\cos x|+\sqrt{2}|\cos x|^2+|\sin x|=\sqrt{3\left(\cos^2x+1\right)}$$

כיוון ש $\cos x\neq0$, (אם $\cos x=0$ הרי $\sin x=\sqrt{3}$ והדבר אינו אפשרי), נחלק את שני אגפי המשוואה
ב- $|\cos x|$ ונקבל:

$$\sqrt{2}|\sin x|+\sqrt{2}|\cos x|+|tgx|=\sqrt{3\left(2+tg^2x\right)}\quad(1)$$

נתבונן בוקטורים $\underline{a}=\left(\sqrt{2}|\sin x|;\sqrt{2}|\cos x|;|tg\,x|\right)$, $\underline{b}=(1;1;1)$

נשתמש באי שוויון קושי ונקבל: $\sqrt{2}\,|\sin x| + \sqrt{2}\,|\cos x| + |\operatorname{tg} x| \le \sqrt{3\left(2+\operatorname{tg}^2 x\right)}$

מהמשוואה (1) נובע ש- $\sqrt{2}\,|\sin x| + \sqrt{2}\,|\cos x| + |\operatorname{tg} x| = \sqrt{3\left(2+\operatorname{tg}^2 x\right)}$

לכן הוקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ תלויים לינארית ולכן שיעורי הוקטורים האלה פרופורציוניים:

$$\sqrt{2}\,|\sin x| = \sqrt{2}\,|\cos x| = |\operatorname{tg} x|$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,|\sin x| = \sqrt{2}\,|\cos x| & (2) \\ \sqrt{2}\,|\sin x| = |\operatorname{tg} x| & (3) \end{cases}$$

מ- (2) נקבל $|\operatorname{tg} x| = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}(4k \pm 1)$

ומכאן נובע ש- $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$.

זהו פתרונה של המשוואה הנתונה.

מ- (3) נקבל ש- $|\sin x| = 0$ או $|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

פתרון המשוואה $|\sin x| = 0$ $(x = \pi m)$ אינו הפתרון של המשוואה המקורית;

פתרון המשוואה $|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ הוא שוב $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$.

לכן, קבוצת האמת של המשוואה המקורית היא $\left\{ x \,\middle|\, x = \frac{\pi}{4}(2n+1)\ ,\ n \in Z \right\}$

4. פתור את המשוואה $\sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} + \sqrt{2x^2+2} = 2(x+1)$

התרה: נתבונן בוקטורים $\underline{n} = \left(\sqrt{x+2y}\,;\sqrt{x-2y}\,;\sqrt{x^2+1}\right)$, $\underline{m} = \left(1;1;\sqrt{2}\right)$

אורכי הוקטורים האלה הם: $|\underline{m}| = \sqrt{1+1+2} = 2$,

$$|\underline{n}| = \sqrt{x+2y+x-2y+x^2+1} = \sqrt{x^2+2x+1} = |x+1|$$

מכפלתם הסקלרית שווה: $\underline{m}\cdot\underline{n} = \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} + \sqrt{2x^2+2}$

מכפלת האורכים שווה: $|\underline{m}|\cdot|\underline{n}| = 2|x+1|$

לפי השוויון $\sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} + \sqrt{2x^2+2} = 2(x+1)$

מתקיים: $\underline{m}\cdot\underline{n} = |\underline{m}|\cdot|\underline{n}|$, זאת אומרת הווקטורים $\underline{m}$ ו- $\underline{n}$ תלויים לינארית,

לכן $\frac{\sqrt{x+2y}}{1} = \frac{\sqrt{x-2y}}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}$

ומכאן: $\begin{cases} \sqrt{x+2y} = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+2y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x} = \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

5. פתור את המשוואה: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

התרה: נתבונן בוקטורים: $\underline{a} = (x;1)$, $\underline{b} = \left(\sqrt{1+x}\,;\sqrt{3-x}\right)$

$$|\underline{a}|\cdot|\underline{b}| = \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x+3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$

הואיל ו- $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$

מתקיים: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$

כלומר הוקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ תלויים לינארית. מזה נובע ש:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}} \Rightarrow x\sqrt{3-x} = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \left(x^3 - x^2\right) - \left(x^2 - x\right) - -\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\,(x^2 - 2x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\;\; x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$$

על ידי הצבת הפתרונות ניווכח כי $x_1 = 1$,, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ מקיימים את המשוואה.

6. פתור את המשוואה: $\sqrt{5\left(x^2 + 2yz\right)} + \sqrt{6\left(y^2 + 2zx\right)} + \sqrt{5\left(z^2 + 2xy\right)} = 4\left(x + y + z\right)$

פתרון: האגף השמאלי של המשוואה הוא המכפלה הסקלרית של הוקטורים $\underline{a} = \left(\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{6}\ ;\ \sqrt{5}\right)$

ו- $\underline{b} = \left(\sqrt{x^2 + 2yz}\ ;\ \sqrt{y^2 + 2zx}\ ;\ \sqrt{z^2 + 2xy}\right)$

ואילו החלק הימני הוא מכפלת אורכי הוקטורים האלה: $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| = 4|x + y + z|$

$$|a| \cdot |b| = \sqrt{5+6+5}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{5\left(x^2 + 2yz\right)} + \sqrt{6\left(y^2 + 2zx\right)} + \sqrt{5\left(z^2 + 2xy\right)}$$

כלומר הוקטורים האלה תלויים לינארית, ולכן שיעוריהם פרופורציוניים:

$$\frac{x^2 + 2yz}{5} = \frac{y^2 + 2zx}{6} = \frac{z^2 + 2xy}{5}$$

ומכאן: $\begin{cases} x^2 + 2yz = z^2 + 2xy \\ 5\left(y^2 + 2zx\right) = 6\left(z^2 + 2xy\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+z)(x-z) = 2y(x-z) \\ 5\left(y^2 + 2zx\right) = 6\left(z^2 + 2xy\right) \end{cases}$

אם $x = z$ אז $4x^2 - 12xy + 5y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 5(y^2 + 2x^2) = 6(x^2 + 2xy)$

לכן $y = \frac{2}{5}x$ או $y = 2x$. מקבלים פתרונות מהצורה $(m\ ;\ 2m\ ;\ m)$ ו- $(m; \frac{2}{5}m\ ; m)$, m מספר ממשי.

יש לזכור, כי $x^2 + 2yz \geq 0$, $y^2 + 2zx \geq 0$, $z^2 + 2xy \geq 0$ אם $x + z = 2y$ אז $z = 2y - x$

והרי $\frac{x^2 + 2y\left(2y - x\right)}{5} = \frac{y^2 + 2x\left(2y - x\right)}{6}$

$$16x^2 - 32xy + 19y^2 = 0$$

למשוואה הזאת יש פתרון יחיד: $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ כיוון ש- $\Delta < 0$.

קבוצת האמת: $\left\{(m; 2m; m), \left(m; \frac{2}{5}m; m\right), (0;0;0)\ \middle|\ m \in R\right\}$

התרת מערכת המשוואות

1. $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 17 = 8x + 4y + 16z \\ 3x - 4y - 12z = 12 \end{cases}$

התרה: את המשוואה הראשונה אפשר לרשום בצורה: $(2x-2)^2 + (2y-1)^2 + (2z-4)^2 = 4$

נתבונן בוקטורים $\underline{m} = (2x-2\ ;\ 2y-1\ ;\ 2z-4)$ $\qquad \underline{n} = \left(\frac{3}{2}; -2; 6\right)$

נשים לב ש- $\underline{m} \cdot \underline{n} = 3x - 3 - 4y + 2 + 12z - 24 = 3x - 4y + 12z - 25$

$$\underline{m} \cdot \underline{n} = (3x - 4y + 12z - 12) - 13 = -13$$

מכפלת אורכי הוקטורים האלה שווה :

$$|\underline{m}|\cdot|\underline{n}| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2-8x-4y-16z+21}\cdot\frac{13}{2} =$$

$$= \sqrt{\left(4x^2+4y^2+4z^2-8x-4y-16z+17\right)+4}\cdot\frac{13}{2} = \sqrt{4}\cdot\frac{13}{2} = 13$$

כלומר $|\underline{m}\cdot\underline{n}| = |\underline{m}|\cdot|\underline{n}|$, לכן הוקטורים תלויים לינארית.

מזה נובע ש : $\frac{2x-2}{\frac{3}{2}} = \frac{2y-1}{-2} = \frac{2z-4}{6} = k$

לכן נקבל :
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}k+1 \\ y = \frac{1}{2}-k \\ z = 3k = 2 \end{cases}$$

אם נציב ערכים אלה במשוואה השניה נקבל $k = -\frac{4}{13}$ ומכאן : $z = \frac{14}{13}$, $y = \frac{21}{26}$, $x = \frac{10}{13}$

.2
$$\begin{cases} z^4+y^4+z^4 = 1 \\ x^2+y^2+2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$$

התרה : נתבונן בוקטורים $\underline{a} = (x^2 ; y^2 ; z^2)$ ו- $\underline{b} = (1 ; 1 ; 2)$. קיים : $|\underline{b}| = \sqrt{6}$, $|\underline{a}| = \sqrt{x^4+y^4+z^4}$;

אולם $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, לכן $|\underline{a}|=1$. כמו כן $\underline{a}\cdot\underline{b} = x^2+y^2+2z^2 = \sqrt{7}$.

ומכאן $\underline{a}\cdot\underline{b} > |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|$. זאת סתירה, לכן למערכת המשוואות אין פתרון.

.3
$$\begin{cases} x^2+y^2 = y(x+z) \\ x^2-2x = y(1-z) \\ 2y^2-2xy-2yz+4x+2z = 5 \end{cases}$$

התרה : נציב את המערכת בצורה :

$$\begin{cases} x(x-y)+y(y-z) = 0 \\ x(x-2)+y(z-1) = 0 \\ (x-y)^2+(y-z)^2 = (x-2)^2+(z-1)^2 \end{cases}$$

נתבונן בוקטורים $\underline{c} = (x-2 ; z-1)$, $\underline{b} = (x-y ; y-z)$, $\underline{a} = (x;y)$

בשיטה זו המערכת תקבל את הצורה הבאה :
$$\begin{cases} \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \\ \underline{a}\cdot\underline{c} = 0 \\ \underline{b}^2 = \underline{c}^2 \end{cases}$$

אם $\underline{a} = \underline{0}$, הרי $x = y = 0$ והמשוואה השלישית במערכת תקבל צורה : $z^2 = 4 + (z-1)^2$. לכן $z = \frac{5}{2}$.

על כן $\left(0;0;\frac{5}{2}\right)$ הוא פתרון המערכת במקרה זה.

אם $a \neq 0$ הרי ייתכנו המקרים שלהלן.

(1 $\underline{b} = \underline{c} = \underline{0}$ במקרה זה נקבל:

$$\begin{cases} x-y = 0 \\ y-z = 0 \\ x-2 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

מכאן

$$\begin{cases} x = y = z \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

והדבר בלתי אפשרי.

2) הוקטורים $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ תלויים לינארית ולכן $\underline{b} = \pm \underline{c}$. אם $\underline{b} = \underline{c}$, נקבל:

$$\begin{cases} x - y = x - 2 \\ y - z = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

אזי $x^2 - 2x = 2\left(1 - \dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$\left(1;2;\dfrac{3}{2}\right)$ - פתרון שני של המערכת.

אם $\underline{b} = -\underline{c}$ נקבל מערכת

$$\begin{cases} x - y = -x + 2 \\ y - z = -z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

לכן $z = \dfrac{7}{4}$

$\left(\dfrac{3}{2};1;\dfrac{7}{4}\right)$ - פתרון שלישי של המערכת.

.4

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x + z) & (1) \\ x^2 + x + y = -2yz & (2) \\ 3x^2 + 8y^2 + 8yx + 8yz = 2x + 4z + 2 & (3) \end{cases}$$

התרה: נציג את המערכת בצורה:

$$\begin{cases} x(2x + 2y) + y(2z + 2y) = 0 \\ x(x + 1) + y(1 + 2z) = 0 \\ (2x + 2y)^2 + (2z + 2y)^2 = (x + 1)^2 + (1 + 2z)^2 \end{cases}$$

נתבונן בוקטורים: $\underline{a} = (x;y)$, $\underline{b} = (2x+2y\ ;\ 2z+2y)$, $\underline{c} = (x+1\ ;\ 1+2z)$

בצורה וקטורית תתועד המערכת כך:

$$\begin{cases} \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \\ \underline{a} \cdot \underline{c} = 0 \\ \underline{b}^2 = \underline{c}^2 \end{cases}$$

אם $\underline{a} = 0$, הרי $x = y = 0$ והמשוואה (3) מקבל צורה: $4z + 2 = 0$. מכאן $z = -\dfrac{1}{2}$.

לכן $\left(0;0;-\dfrac{1}{2}\right)$ - פתרון ראשון של המערכת.

אם $a \neq 0$, ייתכנו המקרים הבאים:

1) $\underline{b} = \underline{c} = 0$.

במקרה זה נקבל:

$$\begin{cases}2x+2y=0\\2z+2y=0\\x+1=0\\1+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=-y\\x=-1\\z=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

והדבר אינו אפשרי.

2) הוקטורים $\underline{b}$ ו- $\underline{c}$ תלויים לינארית ולכן $\underline{b} = \pm\underline{c}$. אם $\underline{b} = \underline{c}$, נקבל מערכת

$$\begin{cases}2x+2y=x+1\\2z+2y=1+2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{1}{2}\\z=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ - פתרון שני של המערכת.

אם $\underline{b} = -\underline{c}$, נקבל מערכת:

$$\begin{cases}2x+2y=-x-1\\2z+2y=-1-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y=-1\\4z+2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=\frac{4z}{3}$$

מהמשוואה (1) של המערכת נובע: $\frac{16z^2}{9}+y^2=-\frac{7yz}{3}$

$$16z^2 + 21yz + 9y^2 = 0$$

מכיוון ש- $\Delta < 0$ הרי אין למשוואה זו פתרון.

5. פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}9y^2z^2+4x^2z^2+25x^2y^2=16x^2y^2z^2 & (1)\\x^2+4y^2+z^2=9 & (2)\\x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=7.5 & (3)\end{cases}$$

על ידי הצבה ניווכח כי לא ייתכן פתרון שעבורו $x \cdot y \cdot z = 0$.

לכן נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה (1) ב- $x^2y^2z^2$. נקבל מערכת:

$$\begin{cases}\frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{25}{z^2}=16\\x^2+4y^2+z^2=9\\x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=7.5\end{cases}$$

נתבונן בוקטורים $\underline{u}=\left(\frac{3}{x};\frac{2}{y};\frac{5}{z}\right)$, $\underline{v} = (x\ ;\ 2y\ ;\ z)$. מתקיים:

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$|\underline{u}|=\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{25}{z^2}}=\sqrt{16}=4$$

$$|\underline{v}|=\sqrt{x^2+4y^2+z^2}=\sqrt{9}=3$$

רואים, כי $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|$, לכן הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תלויים לינארית. מזה שהשיעורים הם פרופורציוניים נובע: $\frac{3}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{5}{z^2}=\lambda$

מכאן: $x^2=\frac{3}{\lambda}$, $y^2=\frac{1}{\lambda}$, $z^2=\frac{5}{\lambda}$

"שימוש בוקטורים להתרת בעיות", מיכאל קרייזמן
עלי"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993
עלי"ה 14, אדר תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

נציב במשוואה השניה במערכת ונקבל: $\frac{3}{\lambda}+\frac{4}{\lambda}+\frac{5}{\lambda}=9$

נפתור את המשוואה ונקבל $\lambda=\frac{4}{3}$. מכאן $x=\pm\frac{3}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

על-כן, יש שמונה שלשות שמקיימות את שתי המשוואות הראשונות במערכת:

$$\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$

$$\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

אם נציב אותן במשוואה השלישית של המערכת, נמצא שרק שתי שלשות מקיימות אותה:

$$\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

הדוגמאות המובאות במאמר זה מוכיחות בעליל את היעילות הרבה של שיטת הוקטורים בפתרון משוואות ומערכות של משוואות ובהוכחות אי-שוויונים. כל אלה הן בעיות שבמבט ראשון נראות לא קשורות כלל לנושא הוקטורים.

הערות למאמרו של מיכאל קרייזמן
"שימוש בווקטורים להתרת בעיות - חלק ב': בעיות ערך קיצון ופתרון משוואות"
מתוך: על"ה 16, אדר ב' תשנ"ד, מרץ 1995

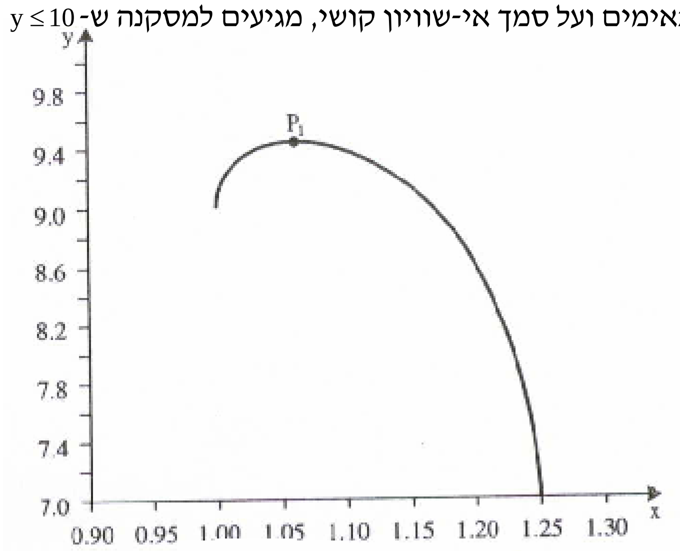
ציפורה מימון, אשדוד

היות שאני מתעניינת גם בנושא הווקטורים, גם בחקירת פונקציות וגם בדרכים לא שגרתיות לפתרון בעיות - נהניתי מסעיף 3 במאמרו של מר קרייזמן: "מציאת הערך המקסימלי (המינימלי) של פונקציה".

בפתרון הבעיה הראשונה הופתעתי מהגישה המעניינת. בפתרון הבעיה השלישית, מצאתי הסקת מסקנה לא נכונה שהובילה אותי לחקור דווקא את הבעיה השנייה.

א. השגיאה בפתרון הבעיה השלישית.

מחפשים את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{3x-2} + 5\sqrt{5-4x}$ על-ידי בחירת וקטורים מתאימים ועל סמך אי-שוויון קושי, מגיעים למסקנה ש- $y \le 10$.



$$y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{3x-2} + 5\sqrt{5-4x}$$

איור 1

בנוסף מוכיחים שלא קיים x שעבורו $y = 10$. הטענה ש-10 אינו ערך מקסימלי של הפונקציה באמת נכונה, אך ייתכן בהחלט שיש מקסימום קטן מ-10.
זה הרגע שהרגשתי צורך לראות את הפונקציה. לא גזרתי את הפונקציה, כי בוודאי הייתי מסתבכת בשגיאות. במקום זה "שרטטתי" את גרף הפונקציה במחשבון הגרפי (איור 1) וכך מצאתי, כי אמנם לפונקציה יש ערך מקסימלי (9.44 בקירוב).

הרהורים על אי-שוויון הקושי החזירו אותי לבעיה השנייה, כדי לחקור אותה יותר לעומק.

ב. לפונקציה הנתונה $y = \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3}$ נמצא, לפי אי-השוויון קושי, $y \le 4$ ויש נקודות x שעבורן $y = 4$ (נקודות מקסימום במחזוריות).
שאלתי את עצמי איך נבחרו המספרים השונים כדי להגיע לתשובה הזאת. היה ברור לי מדוע נבחרו מקדמים חיוביים שווים ל- $\sin^2 x$ ול- $\cos^2 x$.

"שימוש בווקטורים להתרת בעיות", מיכאל קרייזמן
על"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993
על"ה 14, אדר תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

לכן ניגשתי לפתור את הבעיה עבור משפחת הפונקציות הבאה:

$$y=\sqrt{a\cdot\cos^2 x+b}+\sqrt{a\cdot\sin^2 x+c}\ \ ,\ \ a>0$$

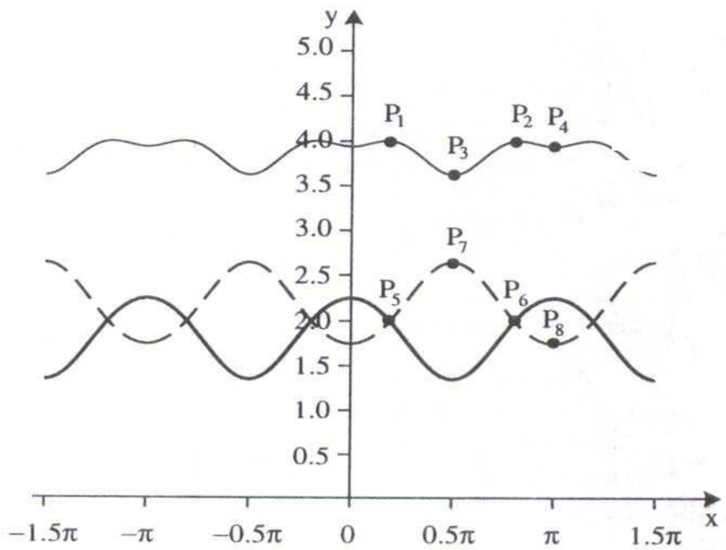
במהלך דומה לזה שמציע מר קרייזמן, הגעתי לנוסחה $y\le\sqrt{2(a+b+c)}$.
השוויון מתקיים כאשר הווקטורים תלויים, כלומר $a\cos 2x=c-d$.
(בגלל גבולות פונקציות הקוסינוס, אפשר להפוך תנאי זה לתנאי שמקשר את הפרמטרים:
$|c-b|\le a$ (מובן שהפרמטרים צריכים להיות כאלה שהפונקציה תהיה קיימת).
בדוגמא במאמר $c-b=3-1=2<4=a$

ג. מר קרייזמן מצא את הנקודות שבהן הפונקציה הנתונה מקבלת את המקסימום $y=4$:

$$x=\frac{\pi}{6}(6n\pm1)\quad ,\quad n\in Z$$

המיקום של נקודות אלה שוב עורר בי סקרנות לראות את גרף הפונקציה. הנקודות האלה הן נקודות שבהן $\sqrt{4\cos^2 x+1}=\sqrt{4\sin^2 x+3}$. לכן "שרטטתי" במחשבון הגרפי (איור 2) את שלוש הפונקציות:

$$y=\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}$$
$$y=\sqrt{4\cos^2 x+1}$$
$$y=\sqrt{4\sin^2 x+3}$$



$f_1(x)=\sqrt{(4\cos^2 x+1)}$

$f_2(x)=\sqrt{(4\sin^2 x+3)}$

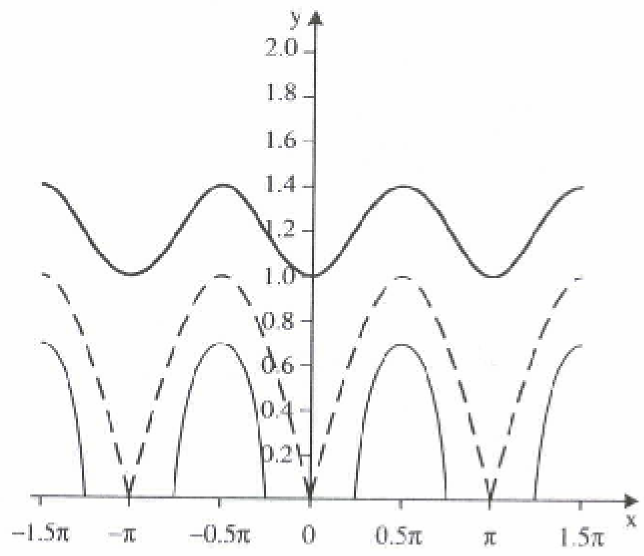
$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

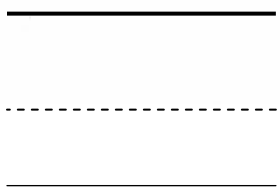
"שימוש בוקטורים להתרת בעיות", מיכאל קרייזמן
עלי"ה 13, אלול תשנ"ג, ספטמבר 1993
עלי"ה 14, אדר תשנ"ד, מרץ 1994
האוניברסיטה העברית ירושלים

איור 2

כאשר משווים את שלושת הגרפים, מקבלים תמונה יפה גם של הקשר בין נקודות המינימום של הפונקציה הראשונה ונקודות הקיצון של שתי הפונקציות האחרות.

ד. לבסוף התחלתי לשחק עם הפרמטרים a, b, c ולשרטט את הגרפים המתאימים, כמובן במחשבון (איור 3). עניין מיוחד מצאתי במשפחת הפונקציות הפשוטות $y = \sqrt{\sin^2 x + c}$
כאשר c עובר מערכים חיוביים לערכים שליליים.
כאשר $c > 0$ הפונקציה רציפה וגזירה בכל התחום.
כאשר $c = 0$ הפונקציה רציפה אך יש לה נקודות שבהן היא איננה גזירה.
כאשר $-1 \le c < 0$ הפונקציה איננה רציפה.
כאשר $c < -1$ הפונקציה איננה מוגדרת.





$y = \sqrt{\sin^2 x + 1}$

$y = \sqrt{\sin^2 x}$

$y = \sqrt{\sin^2 x - 0.5}$

איור 3

לסיכום: כאשר עוסקים בפונקציות, השילוב של חקירה אלגברית ושימוש בכלים (מחשב או מחשבון גרפי), יכול להפוך בעיה של טכניקה חישובית לבעיה של חקר.