הנושא: **אינדוקציה מתמטית - אתגרי חשיבה לחידוד ההבנה**

הוכן ע״י: נצה מובשוביץ-הדר, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון, חיפה.

תקציר: במאמר מוצגות עשר משימות המתמקדות בהיבטים השונים של האינדוקציה המתמטית. רבות מהמשימות הן משימות של פיענוח שגיאות. הרעיון העומד מאחורי בחירת המשימות הוא, ששילובן של משימות אלה בשלבים שונים של לימוד הנושא, עשוי להביא את התלמידים להבנה עמוקה יותר של תהליך ההוכחה באמצעות אינדוקציה מתמטית ולטיפול פחות מכני בהוכחות בשיטת האינדוקציה. כמו כן מובא במאמר רקע מתמטי ומוצג דיון בחשיבותו של עיקרון האינדוקציה המתמטית. בסוף מובאת התייחסותו של עופר ליבה למאמר זה, שהופיעה בעל״ה 15, עמוד 89.

מילות מפתח: אלגברה, אינדוקציה, היסטוריה של המתמטיקה, פיאנו, הוראת המתמטיקה, שגיאות, תפיסות מוטעות, חידות, חידת המטבע המזוייפת.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 13, אלול תשנ״ג, ספטמבר 1993, עמודים 66-57.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 14 עמודים.

אינדוקציה מתמטית - אתגרי חשיבה לחידוד ההבנה[1]

מבוא[2]

במאמר זה מוצגות עשר משימות המתמקדות בהיבטים המושגיים של אינדוקציה מתמטית. רבות מהמשימות הן משימות של פענוח שגיאות. חלק מהשגיאות נובעות מהדימוי שיש לתלמידים על האינדוקציה המתמטית. שגיאות אחרות נובעות פשוט מיישום מוטעה של עיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה. שילובן של משימות אלו בשלבים שונים של הלימוד עשוי להביא את התלמידים להבנה עמוקה יותר של תהליך ההוכחה באמצעות אינדוקציה מתמטית ולטיפול פחות מכני בהוכחות בשיטה זאת. המשימות יכולות לעורר דיון בשאלות רחבות יותר, שהתלמידים עשויים למצוא בהן עניין, כגון:

1. האם ניתן לקבוע באופן יחיד את האיבר הכללי של סדרה, כאשר נתון מספר סופי של איברים ראשונים של הסדרה?
2. האם כל השערה אינדוקטיבית שנראית סבירה היא אכן תקפה?
3. איך ניתן להוכיח בעזרת אינדוקציה שלמה כי טענה מסוימת אינה נכונה?
4. מהו התפקיד שממלא המשתנה הטבעי בהוכחות בעזרת אינדוקציה שלמה? כיצד מאתרים בבעיה משתנה n שעליו ניתן לבצע את תהליך הוכחה באינדוקציה?
5. האם הבדיקה עבור $n = 1$ היא חלק הכרחי של ההוכחה באינדוקציה?
6. האם הבדיקה עבור $n = 1$ היא תמיד קלה ופשוטה?
7. מה קורה כאשר המעבר מ- $n = 1$ ל- $n = 2$ אינו אפשרי?
8. האם יותר בטוח לבדוק את ההשערה גם עבור $n = 2$ בנוסף לבדיקתה עבור ל- $n = 1$?
9. האם איננו מניחים, בעצם, את מה שאנחנו רוצים להוכיח?
10. האם אפשר להשתמש באינדוקציה מתמטית שלמה להוכחת טענות כדי להוכיח טענות יותר מסובכות הנוגעות למספרים הטבעיים?

רקע מתמטי

בסוף המאה ה-19 ניסו המתמטיקאים לתת לאלגברה בסיס מוצק מבחינה מתמטית. המספרים המרוכבים הוגדרו במונחים של מספרים ממשיים, והממשיים התבססו על ההגדרה של המספרים הרציונליים. המספרים הרציונליים הוגדרו כזוגות סדורים של מספרים שלמים והמספרים השלמים הוגדרו על ידי קבוצת מספרים יסודית יותר – קבוצת המספרים הטבעיים N, אותם המספרים שכל ילד לומד כחלק טבעי של שפת אמו. היה אם כן צורך לבסס מבחינה מתמטית את המספרים הטבעיים. המתמטיקאי האיטלקי ג׳וספה פיאנו (Giuseppe Peano, 1858-1932) נחשב, בדרך-כלל, לראשון אשר נתן ביסוס אקסיומטי למערכת המספרים הטבעיים, N, ותרם בכך להישג הנזכר של המאה ה-19, הישג שנתן למתמטיקאים תחושה רבה של בטחון בנוגע לעקביות

[1] מאמר זה הוכן על פי מאמר באנגלית שהופיע בשם:
N. Movshovitz-Hadar (1993): Mathematical Induction - a Focus on the Conceptual Framework, *School Science and Mathematics*. *Vol. 93*, no. 8, pp. 408-417.

[2] תודתי נתונה לד״ר אורית זסלבסקי, לגב׳ מרים עמית, למר אלכס קופרמן, לגב׳ בת-שבע שכטר ולד״ר אלה שמוקלר על הערותיהם המאירות.

של המתמטיקה, (Eves, 1983, p. 140). המערכת של חמש האקסיומות של פיאנו בניסוחן המודרני היא זאת:

1. 1 שייך ל- N.
2. אם n שייך ל- N , אזי $S(n)$ גם הוא שייך ל- N, (כאשר S היא פונקצית העוקב: $(S(x) = x+1)$.
3. לא קיים n השייך ל- N כך ש- $S(n) = 1$ [3].
4. לכל n ו- m השייכים ל- N השוויון $S(n) = S(m)$ גורר בהכרח ש- $n = m$.
5. אם A היא קבוצה חלקית של N המכילה את 1, ולכל n השייך ל- A גם $S(n)$ שייך ל- A, אזי A מתלכדת עם N.

האקסיומה החמישית ידועה כעיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה. ראוי לשים לב לכך שהיא עוסקת בתת-קבוצות של קבוצת המספרים הטבעיים. בספרי לימוד רבים מוצג עיקרון האינדוקציה השלמה (עא״מ) המתמטית (עא״מ) בדרך שונה, תוך שימוש בלשון של פסוקי אמת וטענות הנוגעות למספרים הטבעיים, למשל כך:

הטענה ״לכל n טבעי $P(n)$״ (כאשר $P(n)$ היא תבנית פסוק במשתנה יחיד n) היא משפט, אם מתקיימים שני התנאים:

א. הטענה נכונה עבור $n = 1$.

ב. מההנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$, (k מסוים כלשהו), נובע כי הטענה נכונה גם עבור $n = k + 1$.

הלוגיקן האמריקאי בן זמננו ליאון הנקין (Leon Henkin) גורס כי לניסוח הקבוצתי של עיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה, במונחים של תורת הקבוצות, יש יתרונות רבים מבחינה פדגוגית (Henkin,1961). למרות זאת, רבים משתמשים בניסוח הפסוקי של עיקרון האינדוקציה, שמטבעו הינו יותר פרוצדוראלי ולכן נראה, כביכול, נוח יותר ליישום עיקרון האינדוקציה למטרות של הוכחת טענות. בהתאם לכך, כדי להוכיח את המשפט: לכל n טבעי נכונה הטענה $P(n)$, צריך:

א. להראות כי $P(1)$ הוא פסוק אמת. (כלומר, 1 שייך לקבוצת האמת של $P(n)$).

ב. להוכיח כי לכל מספר טבעי מסוים k, אם $P(k)$ הוא פסוק אמת אז בהכרח גם $P(k + 1)$ הוא פסוק אמת. (כלומר, אם k שייך לקבוצת האמת של $P(n)$ אז גם $k + 1$ שייך אליה).

השלב הראשון ידוע כשלב הבדיקה והשני – כ שלב המעבר. לאחר השלמת שני השלבים האלה בהצלחה ניתן להסיק, בהסתמך על עא״ש, כי הטענה $P(n)$ נכונה לכל n טבעי. הסקה זאת היא, לאמיתו של דבר, יישום שרשרתי אינסופי של עיקרון ההיסק היסודי הידוע בשם: Modus Ponens (אורח החשיבה, בלטינית). כלל היסק זה מאפשר להסיק את B מתוך משפט התנאי ״אם A אז B״, כאשר נתון A. בצורה זו מסיקים את נכונותה של הטענה $P(2)$ מתוך ״אם $P(1)$

[3] לפי הגדרות אחרות של קבוצת הטבעיים – למשל זו של Cantor, גם 0 נחשב למספר טבעי.

אז $P(2)$", שנכונותה מובטחת משלב המעבר עבור $k = 1$, מכיוון ששלב הבדיקה מבטיח את נכונותה של $P(1)$.

בהמשך מסיקים את $P(3)$ מתוך $P(2)$, שהוסקה קודם, ומתוך "אם $P(2)$ אז $P(3)$", שנכונותה מובטחת על ידי שלב המעבר עבור $k = 2$. באופן דומה מסיקים את $P(4)$ מ- $P(3)$ ומ- "אם $P(3)$ אז $P(4)$" וכו'. תהליך זה ניתן לדמות לטור של אבני דומינו העומדות זו לאחר זו. אם האבן הראשונה תיפול ואם המרווחים בין כל שתי אבנים סמוכות יהיו קטנים יותר מאורך האבן, אז מובטח שכל אבן תפיל את האבן הבאה אחריה. ההבדל הוא, כמובן, ששרשרת ההיסקים, שלא כמו שורת אבני הדומינו, היא שרשרת אינסופית. התהליך מתואר באופן סכמאטי בשרטוט 1.

$$
\begin{array}{l}
P(1) \\
\underline{P(1) \rightarrow P(2)} \\
\qquad P(2) \\
\qquad \underline{P(2) \rightarrow P(3)} \\
\qquad\qquad P(3) \\
\qquad\qquad \underline{P(3) \rightarrow P(4)} \\
\qquad\qquad\qquad P(4) \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad P(k) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{P(k) \rightarrow P(k+1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

לכל n, $P(n)$

שרטוט מס' 1: אינדוקציה מתמטית - שרשרת אינסופית של מודוס פוננס (Modus Ponens)

כל עוד אנו עוסקים בהוכחת טענות הקשורות לסדרות וטורים פשוטים, לא מתגלים קשיים מיוחדים בתהליך הביצוע של שני שלבי ההוכחה ההכרחיים לשם יישום עיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה. תהליך הביצוע נעשה יותר קשה ומסובך ככל שהטענה שייכת לתחום מתקדם יותר או כאשר היא פחות סטנדרטית. הדבר נובע מכך, שמבחינה מושגית, אינדוקציה מתמטית היא נושא מורכב, אשר רק לעיתים רחוקות משקיעים בו מחשבה ומקדישים זמן להרהר בו לאחר ההוצאה לפועל של שני השלבים ההכרחיים.

חוקרים רבים דנו בהרחבה בקשיים הכרוכים בשיטת הוכחה זאת:

Dubinsky (1986, 1990), Ernest (1984), Henkin (1960), Fischbein and Angel (1989), Lowenthal and Eisenberg (1992).

נסתפק כאן באזכור של שלוש עובדות שתורמות לקשיים:

1. הטענה $P(n)$ היא בדרך כלל בעצמה משפט תנאי, ולכן השלב השני של האינדוקציה המתמטית (שלב המעבר) מורכב מבחינה לוגית מטיפול במשפטי-תנאי בשתי רמות, המקננות זו בזו.

2. קיים דמיון רב בין ההנחה הכלולה במשפט התנאי שבשלב השני של האינדוקציה (($P(k)$ הוא פסוק אמת), לבין הטענה הכללית (($P(n)$ נכונה לכל n). כתוצאה מכך אצל תלמידים רבים מתקבל הרושם של מעגליות בהוכחה.
3. טענה ניתנת להוכחה באינדוקציה רק אם היא בעלת הצורה: "לכל n, $P(n)$", כלומר רק אם היא מכילה בגוף הטענה את המשתנה n. לעיתים קרובות די קשה לזהות את המשתנה שעליו יש ליישם את האינדוקציה, מפני שהטענה מנוסחת בצורה שאיננה מוליכה לכך ישירות. (ר' למשל משימה 4).

עשר המשימות

שלוש המשימות הראשונות נועדו להביא את התלמידים להתעמקות באופי הדדוקטיבי של עיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה, ולהבחנה בינו לבין השיטה האינדוקטיבית שעליה מבוססים מדעי הטבע.

משימה 1

שאלה לדיון: האם ניתן לקבוע באופן יחיד את האיבר הכללי של סדרה, כאשר נתון מספר סופי של איברים ראשונים של הסדרה?

בעיה לפתרון:

א. חמשת האיברים הראשונים של סדרה a_n נתונים כדלקמן:

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_3 = 8 \quad , \quad a_4 = 16 \quad , \quad a_5 = 32$$

עליך למצוא ביטוי עבור האיבר הכללי a_n.

ב. עליך למצוא ביטוי נוסף עבור האיבר הכללי a_n, שונה מזה שמצאת בסעיף א'.

הערות:

הנה שלושה כללים שונים לבניית הסדרה הנתונה:

$$a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + 2^n$$

$$a_n = (n2-1)(n2-4)(n2-9)(n2-16)(n2-25) + 2^n$$

$$a_n = \sin(n\pi) + 2^n$$

למעשה, בכל מקרה ניתן למצוא יותר מתבנית אחת לאיבר הכללי של סדרה סופית, כאשר נתונים רק איברים ראשונים אחדים. מומלץ, לכן, שכאשר נותנים לתלמידים לפתור בעיה בנוסח של "יש להמשיך את הסדרה..." , כל פתרון ייבדק בקפידה ותשומת ליבם של התלמידים תופנה לכך שקיים יותר מפתרון אחד. כל השערה לגבי האיבר הכללי היא נכונה, כמובן, אם האיברים הנתונים כראשונים מספקים אותה כמקרים פרטיים.

משימה 2

שאלה לדיון: האם כל השערה אינדוקטיבית שנראית סבירה היא אכן תקפה?

בעיה לפתרון:

א. מהו הערך של הביטוי $3n^2 + 3n + 23$ עבור $n = 1,2,3,...,7$? מהו המשותף לתוצאות שקיבלת?

ב. איזו השערה עולה מהתוצאות של חלק א׳ ?

ג. האם השערתך נכונה גם עבור שבעה המקרים הבאים : $n = 8,9,10,...,14$?

ד. האם קיימת דוגמה נגדית להשערתך בין המקרים הבאים : $n = 15,...,20$?

ה. מה הרגשתך ? האם ההשערה שניסחת נכונה **לכל** n טבעי ?

ו. למען הביטחון, לפני שניגש להוכחת ההשערה, כדאי לבדוק גם עבור $n = 21$ ו- $n = 22$.

ז. מה דעתך על התוצאות שהתקבלו ל**ששת** הסעיפים הקודמים ?

הערות:

נכונות מתמטית מבוססת על פתרון לוגי **ולא** על בדיקה אמפירית של מספר סופי של מקרים פרטיים. הביטוי האלגברי המופיע במשימה זאת נותן מספרים ראשוניים עבור הצבה של ערכי n מ-1 ועד 21, אבל הוא לא מייצר מספרים ראשוניים בלבד, כפי שאולי מתפתים לשער. עבור $n =$ 22 מתקבל מספר פריק:

$$3 \cdot 22^2 + 3 \cdot 22 + 23 = 23 \cdot (66+1)$$

לבנטל ואייזנברג (1992) מצטטים מתוך הספרות דוגמה מפתיעה עוד יותר האומרת כך:

הטענה: ״המספר $\sqrt{1141n^2+1}$ אינו שלם עבור כל n טבעי״, אינה נכונה, על-אף העובדה שהיא נכונה לכל n טבעי מ-1 עד 10^{25}, כולל. המספר הטבעי הראשון שעבורו השורש הריבועי הנתון הוא מספר שלם, הוא (על פי Davis, 1981):

30 693 385 322 765 657 197 397 208

אף כי קשה להפוך דוגמה זו למשימת גילוי, הדוגמה מעניינת וכדאי להציגה בפני התלמידים לאחר העבודה על משימה מס׳ 2.

משימה 3

שאלה לדיון: איך ניתן להוכיח בעזרת אינדוקציה מתמטית שלמה כי טענה מסוימת <u>אינה</u> נכונה?

בעיה לפתרון: להלן שני פתרונות הסותרים זה את זה לשאלה הבאה:

האם לכל n טבעי נכון האי-שוויון הבא:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

עליך לקרוא בעיון את שני הפתרונות ולהחליט האם אחד מהפתרונות נכון, ואם כן – איזה ?

הפתרון של תלמיד "א"	הפתרון של תלמיד "ב"
כדי להוכיח את הטענה מספיק להוכיח את האי-שוויון החזק יותר $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ נוכיח אי-שוויון זה באינדוקציה על n א) עבור $n=1$ אגף שמאל שווה ל- $\frac{1}{2}$ ואגף ימין שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{3}}$. נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k *מסוים כלשהו*) כלומר $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)} \le \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ צריך להוכיח שעבור $n=k+1$ מתקיים $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot2(k+1)} \le \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ על פי ההנחה נובע כי: $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot2(k+1)} \le$ $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)} =$ $= \frac{\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2(k+1)})^2} = \sqrt{\frac{2k+1}{4k^2+8k+4}} <$ $< \sqrt{\frac{2k+1}{4k^2+8k+3}} =$ $= \sqrt{\frac{2k+1}{(2k+1)(2k+3)}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ לכן לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n	עבור $n=1$ אגף שמאל שווה ל- $\frac{1}{2}$ ואגף ימין שווה ל - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ לכן האי-שוויון מתקיים $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k *מסוים כלשהו*) כלומר $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)} \le \frac{1}{\sqrt{2k}}$ צריך להוכיח שעבור $n=k+1$ מתקיים $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot2(k+1)} \le \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ על פי ההנחה נובע כי: $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot2(k+1)} \le \frac{1}{\sqrt{2k}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)} =$ $= \frac{(\sqrt{2k+1})^2}{\sqrt{2k(2k+2)}\cdot\sqrt{2(k+1)}} =$ $= \frac{\sqrt{4k^2+4k+1}}{\sqrt{4k^2+4k}\cdot\sqrt{2(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}$ תוצאה זאת עומדת בסתירה לטענה שאותה צריך להוכיח, מכאן שהטענה אינה נכונה.

הערות:

הפתרון של תלמיד "ב" הוא לא רק טיפול לא עקבי באי-שוויונים. הוא מעלה גם שאלה חשובה לגבי ההוכחה בעזרת אינדוקציה מתמטית ומבליט את ההבדל בין הוכחת נכונותה של טענה לבין הפרכתה בעזרת אינדוקציה מתמטית. בעזרת אינדוקציה מתמטית ניתן להוכיח כי טענה מסוימת נכונה לכל n טבעי. כדי להפריך טענה מסוימת, כלומר, כדי להוכיח כי לא לכל n טבעי טענה מסוימת היא נכונה, יש למצוא דוגמה נגדית, או להוכיח זאת בדרך אחרת. אינדוקציה מתמטית

יכולה לסייע לכך רק במקרים נדירים. בעזרת אינדוקציה ניתן להוכיח כי לכל n טבעי טענה מסוימת **אינה** נכונה, אך זו, כמובן, טענה חזקה יותר מאשר "לא לכל n טבעי הטענה נכונה".

מה היה קורה אם תלמיד "ב" היה **מצליח** להוכיח בדרך נכונה שאכן $P(k)$ גורר את **השלילה** של $P(k + 1)$? במקרה כזה נכון היה להסיק שלא לכל n טבעי הטענה $P(n)$ נכונה. יש אולי ערכים של n שעבורם הטענה נכונה, אך הדבר אינו הכרחי כי יש אולי ערכים אחרים שעבורם היא לא נכונה. (לדוגמה, הטענה: כי לכל n טבעי $5^n + 1$ מתחלק ב-3).

(לפרוט נוסף ר' Movshovitz-Hadar (1991)).

כדאי לשים לב גם לכך שבעזרת אינדוקציה מתמטית קשה להוכיח ישירות את הטענה המקורית, אך ניתן להוכיח בקלות טענה חזקה יותר! (הפתרון של תלמיד "א"). קופרמן (1990) מסביר עובדה פרדוקסאלית זו בכך שהאי-שוויון המקורי "נושא פחות אינפורמציה" מאשר האי-השוויון החזק יותר. כאשר מוכיחים את הטענה עבור $n = k + 1$ מסתמכים על ההנחה שהטענה נכונה עבור k. אם טענה זו "חלשה מדי", היא לא מספיקה כדי לאפשר את המעבר משלב k לשלב $k + 1$. קופרמן מביא עוד דוגמה נוספת מאותו סוג:

קל להוכיח בעזרת אינדוקציה שלמה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \le 2-\frac{1}{n}$$

אבל אי אפשר להוכיח באינדוקציה את הטענה החלשה יותר (הנובעת, כמובן, מהקודמת) כי לכל n טבעי

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$$

שתי המשימות הבאות - משימות 4, 5, מיועדות לבדוק את יכולתם של התלמידים ליישם את עיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה בפתרון בעיות בלתי-שגרתיות. העבודה על משימה 4 משמשת גם רקע למשימה 10 שבהמשך.

משימה 4

שאלה לדיון: מהו התפקיד שממלא המשתנה הטבעי בהוכחות בעזרת אינדוקציה שלמה? כיצד מאתרים בבעיה משתנה n שעליו ניתן לבצע את תהליך ההוכחה באינדוקציה?

בעיה לפתרון:

א. ידוע כי בין n מטבעות שנראות זהות, יש אחת מזויפת (קלה יותר). מהו המספר הקטן ביותר של שקילות במאזניים שמאפשר להבטיח את גילויה של המטבע המזויפת?

ב. כדאי לך בשלב זה לחקור את הבעיה באופן אינדוקטיבי, על ידי סדרת מקרים פרטיים.

ג. איך אפשר להכליל את התוצאות של חלקים א' ו- ב' למספר כלשהו m של מטבעות, אשר מקיים: $3^{n-1}<m\le 3^n$ כאשר $n = 1, 2, 3,...$.

הערות:

את החקירה של מקרים פרטיים בחלק ב׳, אפשר להתחיל במספר קטן מאוד של מטבעות. למשל, כאשר יש שלוש מטבעות מספיקה שקילת מאזניים אחת. שמים מטבע אחת על כל כף ורואים, אם הכפות מאוזנות, אזי המטבע המזויפת היא השלישית. ואם לא, אז הקלה מבין השתיים היא המזויפת. עבור ארבע מטבעות נחוצות שתי שקילות, וכך גם עבור כל מספר של מטבעות עד תשע, כולל. כדי להיווכח בכך, צריך לחלק את המטבעות לשלוש קבוצות כך שבשתיים מהן יש מספר שווה של מטבעות, ומספר המטבעות בשלישית שונה לכל היותר באחד. חלוקה כזאת אפשרית לכל מספר של מטבעות (מדוע?). שמים את שתי הקבוצות שוות המספר על שתי כפות המאזניים ורואים: אם הן מתאזנות, המטבע המזויפת נמצאת בקבוצה השלישית. ואם לא, המטבע המזויפת נמצאת בקבוצה הקלה יותר. בכל מקרה מספר המטבעות בכל קבוצה הוא שלוש או פחות, ולכן שקילה אחת נוספת תגלה את המטבע המזויפת. לעשר עד עשרים ושבע מטבעות נחוצות שלוש שקילות. השיטה היא דומה ונשענת באופן רקורסיבי על המקרה הקודם של ארבע עד תשע מטבעות. המחקר האינדוקטיבי מוביל להשערה שמספיקות בדיוק n שקילות כדי לגלות מטבע מזויפת בין m מטבעות כאשר m הוא מספר טבעי המקיים: $3^{n-1}<m\leq 3^n$. כדי להוכיח זאת, משתמשים בעיקרון האינדוקציה המתמטית השלמה. שלב הבדיקה כבר בוצע בחלק א׳. שלב המעבר אומר: נניח ש- k שקילות מספיקות לגילוי המטבע המזויפת מבין m מטבעות באשר $3^{k-1} < m < 3^k$ ונוכיח ש- $k+1$ שקילות מספיקות אם $3^k < m < 3^{k+1}$. מובן מאליו שהוכחת עובדה זאת היא הרבה יותר תובענית מבחינת המאמץ הקוגניטיבי מאשר הוכחה של טענה פשוטה, משום שמעורבים בה שני סוגים של מספרים טבעיים: n (או k) ו- m.

משימה 5

שאלה לדיון: האם הבדיקה עבור $n=1$ היא חלק הכרחי של ההוכחה באינדוקציה?

בעיה לפתרון:

א. הטענה: נסמן ב- $P(n)$ את תבנית הפסוק " $10^n - 7$ מתחלק ב- 9 ". הוכח, כי אם $P(n)$ נכונה עבור $n = k$, אזי היא נכונה עבור $n = k + 1$.

ב. האם ניתן להסיק מחלק א׳ כי לכל n טבעי $10^n - 7$ מתחלק ב- 9?

ג. מה דעתך על התוצאות של חלקים א׳ ו-ב׳?

הערות:

תלמידים אשר ייגשו ישירות להוכחת הטענה המופיעה בחלק א׳ יצליחו בכך כי הטענה אכן נכונה לכל n שכן:

$$10^{k+1} - 7 = 10 \cdot 10^k - 7 = (1 + 9)10^k - 7 = (10^k - 7) + 9 \cdot 1$$

מאידך, אם הם ינסו לבדוק את נכונות הטענה בשביל $n=1$ או בשביל כל ערך אחר של n, הם יקבלו ש- 10^n-7 אינו מתחלק ב-9. בעיה זו מדגישה את תפקידו המכריע של שלב הבדיקה בתהליך ההוכחה באינדוקציה מתמטית. מה קורה כאשר משמיטים את שלב הבדיקה ומתרכזים רק בהוכחת משפט התנאי של שלב המעבר? מבחינה לוגית משפט התנאי ״אם **ה** (הנחה) אז **מ** (מסקנה)״ יכול להיות נכון, גם אם ההנחה שלו **אינה** נכונה. זהו הרעיון הקשה והחשוב של משפט שהוא נכון באופן ריק.

רעיון זה ניתן להמחיש בעזרת הדימוי של טור אבני דומינו, המסודרות כך שהרווחים בין כל שתי אבני דומינו סמוכות הם מספיק קטנים. במצב זה מובטח שכל אבן תיפול רק אם האבן שקדמה לה נפלה. אך יתכן בהחלט שאף אבן לא תיפול, פשוט מפני שהאבן הראשונה בטור זה לא הופלה מסיבה כלשהי.

רוס (Ross 1990) הציג משימה דומה, שגם בה טענה שנכונה באופן ריק ממלאת תפקיד מרכזי:

נסמן ב- $\mathrm{P}(n)$ את הטענה: n^2+5n+1 הוא מספר זוגי.

קל להוכיח שאם טענה זו נכונה עבור n כלשהו אזי היא נכונה גם עבור $n+1$ (איך?)

עבור אלו ערכים של n הטענה נכונה? מה הלקח שאפשר ללמוד כאן?

משימה 6

שאלה לדיון: האם הבדיקה עבור $n = 1$ היא תמיד קלה ופשוטה?

בעיה לפתרון:

א. האם לכל n טבעי מתקיים השוויון:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$$

ב. האם הטענה נכונה עבור $n = 6$?

ג. מהי חוות דעתך מה דעתך על התוצאות שקיבלת בחלקים א' ו- ב' ?

הערות:

משימה זו נבנתה בהשראת Knuth (1986) .

תלמידים שמנסים להוכיח את הטענה בחלק א' באמצעות אינדוקציה מתמטית שלמה, עלולים בהחלט לשגות ולעשות זאת כך:

עבור $n = 1$ $$\frac{3}{2}-\frac{1}{1}=\frac{1}{1\cdot 2}$$

בהנחה שהטענה נכונה עבור $n = k$, נבדוק עתה את נכונותה עבור $n = k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k}+\frac{1}{k(k+1)}=$$
$$\frac{3}{2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$\frac{3}{2}-\frac{1}{k+1}$$

מכאן נובע שהטענה נכונה **לכל** n טבעי.

אולם הבדיקה עבור $n = 6$ (המבוקשת בחלק ב') מראה מצד אחד:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{5}{6}$$

ואילו:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$$

ולכן **לא לכל** n טבעי הטענה נכונה.

התוצאות הסותרות של חלק א׳ וחלק ב׳ מעוררות את הצורך ללבן את הקונפליקט וליישב את הסתירה, על ידי מציאת השגיאה.

תלמידים, שיעבדו על כך, יכולים לגלות כי את הבדיקה יש לבצע עבור $n = 2$, שכן עבור $n = 1$ השוויון אינו מוגדר . יתרה מזו, עבור $n = 2$ אגף ימין שווה ל- $1 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}$ ואגף שמאל שווה ל- $\frac{1}{2}$. מכאן נובע שהשלב הבסיסי של ההוכחה באינדוקציה אינו נכון. במקרה זה ראוי לציין כי הבחירה של הערך $n = 6$ בחלק ב׳ היא שרירותית, ובאותה מידה אפשר היה לבדוק את השוויון עבור כל ערך אחר של n.

משימות 5,6 התמקדו בחשיבותו של שלב הבדיקה באינדוקציה שלמה. בת-שבע שכטר (1990) הצביעה על דרך אחרת כדי להדגיש עובדה זו:

קיימות טענות רבות אשר הן נכונות עבור כל המספרים הזוגיים ואילו עבור כל המספרים האי-זוגיים הן אינן נכונות. למשל, $a^n - b^n$ מתחלק ב- $a + b$, היא טענה כזאת.

כדי להוכיח שהטענה נכונה לכל n זוגי, בודקים תחילה את נכונותה עבור $n = 2$. בשלב השני המעבר מוכיחים שאם הטענה נכונה עבור $n = 2k$ (k כלשהו) אזי היא נכונה עבור $n = 2(k+1)$. לחילופין אפשר להוכיח את המעבר מ- k ל- $(k+2)$ עבור כל k (זוגי או אי-זוגי) ואז לעורר את השאלה של נקודת המוצא. למרות העובדה שהמעבר משלב k לשלב $k+2$ הוא נכון לכל k (זוגי או אי-זוגי), הצעד הבסיסי של האינדוקציה אינו מתקיים עבור $n = 1$ ולכן לא ניתן להוכיח באינדוקציה את נכונותה של הטענה עבור המספרים האי-זוגיים. לעומת זאת, עבור $n = 2$ הטענה נכונה ולכן, יחד עם שלב המעבר, מסיקים כי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $a + b$ לכל n זוגי. נקודת המוצא היא זאת שקובעת, אם כן, שהטענה נכונה.

משימות 7, 8, 9 מדגישות את האופי הכוללני של השלב השני (שלב המעבר) בהוכחה באינדוקציה. המעבר חייב להתקיים **לכל** k ללא יוצא מן הכלל, שאם לא כן "נשברת" שרשרת ההיסקים ממשפטי התנאי במקום מסוים וההוכחה כולה "נופלת".

משימה 7

שאלה לדיון: מה קורה כאשר המעבר מ- $n = 1$ ל- $n = 2$ אינו אפשרי?

בעיה לפתרון:

א. עליך להוכיח (באינדוקציה מתמטית שלמה) את הטענה: "לכל מספר טבעי n אם המקסימום של שני מספרים טבעיים שווה ל- n אזי מספרים אלה שווים זה לזה".

ב. נניח שהטענה בחלק א׳ אומנם נכונה. איך אפשר להסיק ממנה שכל המספרים הטבעיים שווים זה לזה?

ג. מה דעתך על התוצאות של חלקים א׳ ו- ב׳?

הערות:

משימה זו הוכנה בהשראת Ramsamajh (1988) . הוא כתב:

"ברשימה זו אוכיח כי כל שני מספרים שלמים חיוביים שווים זה לזה. מכאן נובע מיד כי כל המספרים השלמים החיוביים שווים זה לזה. ברור כי ההוכחה שגויה, אך הטעות מסתתרת כל כך יפה, שגילוי מקומה בהוכחה מהווה אתגר של ממש.

תהי $\mathrm{P}(n)$ הטענה הבאה: "אם המקסימום של שני מספרים שלמים חיוביים הוא n אזי המספרים האלה שווים זה לזה".

נוכיח שהטענה $\mathrm{P}(n)$ נכונה לכל n שלם חיובי:

עבור $n = 1$ הטענה נכונה, כי אם המקסימום של שני מספרים שלמים חיוביים הוא 1, אזי הם חייבים שניהם להיות שווים ל1-, כלומר הם שווים זה לזה.

נניח כי הטענה $\mathrm{P}(n)$ נכונה. יהיו u , v שני מספרים שלמים חיוביים שהמקסימום שלהם הוא n+1. אזי המקסימום של $\mathrm{u}-1$ ו- $\mathrm{v}-1$ הוא n. לפי ההנחה $\mathrm{u}-1 = \mathrm{v}-1$, ולכן $\mathrm{u} = \mathrm{v}$. לפיכך, הטענה $\mathrm{P}(n+1)$ נכונה לכל ערך של n שעבורו $\mathrm{P}(n)$ נכונה. $\mathrm{P}(1)$ נכונה גם כן, ולכן $\mathrm{P}(n)$ נכונה לכל n.

כעת ניקח שני מספרים שלמים חיוביים כלשהם x , y ויהי n המקסימום שלהם. $\mathrm{P}(n)$היא טענת אמת ולכן $x = y$. כך הוכחנו כי כל המספרים הטבעיים שווים זה לזה.

היכן השגיאה ?"

יש לשער שתלמידים רבים ייבנו את ההוכחה בצורה דומה. לאחרים אפשר לתת את ההוכחה של ראמסאמאז'. בכל מקרה האתגר הוא למצוא את השגיאה.

משימה זו מדגישה את חשיבותו של השלב השני של האינדוקציה - שלב המעבר: אם $\mathrm{P}(k)$ אז $\mathrm{P}(k+1)$. מעבר זה חייב להיות נכון **לכל** k טבעי, בלי יוצא מן הכלל. תקלה באחד הערכים מביאה לשבירת השרשרת האינסופית של יישום כלל ההיסק למשפטי התנאי.

במשימה 7 שבירת השרשרת מתרחשת במעבר מ- $n = k$ ל- $n = k+1$. למשל מ- $k = 1$ ל- $k = 2$.

על פי שלב המעבר, אנו מניחים ש- $\mathrm{P}(1)$ נכונה, דבר שגם נבדק בשלב הבדיקה. בהמשך שלב המעבר אנו לוקחים שני מספרים שלמים חיוביים u , v שהמקסימום שלהם הוא 2, ומתבוננים ב- $u-1$ וב- $v-1$. הואיל ו- $\max(u,v) = 2$ יתכן שאחד מהם שווה ל- 1 והשני ל- 2 ואז $u-1 = 0$, $v-1 = 1$. המספר אפס אינו שלם חיובי ולכן לא נוכל להפעיל את $\mathrm{P}(1)$ כדי להסיק את $\mathrm{P}(2)$. אבל לא רק במקרה זה יש בעיה במעבר, אלא לכל k, אם שני מספרים u , v הם כאלה שהמכסימום שלהם הוא k+1 הרי אחת האפשרויות היא ש- $u = 1$, $v = k+1$ ואז $v-1$, $u-1$ הם זוג מספרים שהנחת האינדוקציה אינה תופסת לגביהם, אף כי המכסימום שלהם הוא k, שכן $u-1$ אינו מספר חיובי אלא אפס. כאן שבירת השרשרת נובעת לא מכך שמשפט-התנאי אינו נכון אלא מכך שלא לכל k מתקיים המעבר משלב k לשלב k+1 .

חשוב להבחין היטב בין הקושי הזה לבין הקושי הכרוך בטיפול במשפטי תנאי שנכונים באופן ריק, משום שההנחה שלהם שקרית. דבר זה הודגם במשימה 6. במשימה הנוכחית פשוט אין הנחה לגבי $n = 0$, שהרי הטענה לא טוענת מאומה לגבי המקרה של שלמים לא-חיוביים.

משימה 8

שאלה לדיון: האם יותר בטוח לבדוק את ההשערה גם עבור $n = 2$ (בנוסף ל- $n = 1$)?

בעיה לפתרון:

א. עליך להוכיח באינדוקציה מתמטית) את הטענה הבאה (באינדוקציה שלמה):

יהי a מספר חיובי כלשהו, אזי לכל n טבעי : $a^{n-1} = 1$.

ב. אם קשה לך להאמין שהמשפט שלעיל הוא נכון, מוכרחה להיות בהוכחה איזו שהיא טעות. מהי?

ג. מה דעתך על התוצאות של חלקים א׳ ו- ב׳?

הערות:

גם פיתוחה של משימה זו נעשה בהשראת Knuth (1986). הוא כתב: "בהוכחה הבאה חייבת להיות שגיאה. היכן הטעות?". הנה "ההוכחה" שהוא מציג לטענה המופיעה בחלק א׳ של משימה 8:

" עבור $n = 1$,

$$a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$$

נניח באינדוקציה כי הטענה נכונה עבור $1,2,3,...,n$ אזי עבור $n+1$ נקבל:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1}a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n+1$ ".

מוקד הקושי דומה למוקד הקושי במשימה הקודמת. כאשר בודקים את המקרה הפרטי של שלב המעבר עבור המעבר מ- $n = 1$ ל- $n = 2$ מקבלים:

$$a^{(1+1)-1} = \frac{a^0 \cdot a^0}{a^{-1}}$$

הנחת האינדוקציה אינה מתייחסת ל- a^{-1} המופיע במכנה, ולכן אין להניח כי $a^{-1} = 1$, ואי אפשר להסיק שעבור $n = 2$ הטענה נכונה.

אלכס קופרמן (1990) הציע דוגמה אחרת לאינדוקציה שגויה עם מוקד קושי דומה.

טענה:

הנגזרת הראשונה של $f(x) = x^{n-1}$ שווה באופן זהותי לאפס לכל n.

הוכחה: כאשר $n = 1$ הטענה מתקיימת כי $(x^0)' = 0$ ואכן הנגזרת של קבוע היא אפס. כעת נניח כי הטענה נכונה עבור $1, 2, 3, ..., k, k+1$ ונוכיח את נכונותה

עבור $k+2$, כלומר עבור הנגזרת של x^{k+1}: כלומר יש להוכיח כי הנגזרת של x^{k-1} שווה לאפס באופן זהותי.

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$$

לפי ההנחה: $x' = 0$, $(x^k)' = 0$ ולכן $(x^{k+1})' = 0$.

היכן השגיאה?

על המורים להיות מודעים לעובדה כי למידת יתר המדגישה שוב ושוב מוקד קושי זה, יכולה ליצור אצל תלמידים מסוימים את הרושם כי מקור הבעיה הוא תמיד במעבר מ- $n = 1$ ל-$n = 2$ ולכן למען הביטחון כדאי תמיד לבדוק לא רק את המקרה של $n = 1$ אלא גם את $n = 2$ ואולי לעוד ערכים אחדים. זוהי כמובן מסקנה מוטעית. משימה מס׳ 9 מהווה התנסות מצוינת להמחשת נקודה זו.

בספרות המתמטית ניתן למצוא עוד דוגמאות נוספות רבות המציגות הוכחות באינדוקציה המבוססות על הפעלה שגויה של שלב המעבר (ר׳ למשל פרק מצוין על האינדוקציה המתמטית בספר של Fendel and Resek (1990)). ברוב המקרים דנות משימות אלו בטענות שמלכתחילה ברור כי אינן נכונות. למשל, ההוכחה שאם בקבוצה כלשהי של נשים יש אשה אחת בהריון, אזי כולן בהריון. טענות אלו אינן דומות בדרך כלל לטענות מתמטיות אופייניות שמוכיחים אותן באינדוקציה. המשימות המוצגות לעיל נראות יותר טיפוסיות מבחינה מתמטית והן דומות בצורתן החיצונית לטענות שבדרך כלל מוכיחים באינדוקציה.

משימה 9

שאלה לדיון: האם איננו מניחים, בעצם, את מה שאנחנו רוצים להוכיח?

בעיה לפתרון:

א. לפניך קטע מתוך מאמר של המתמטיקאי אוסטין (Austin 1988):

״בעיה מוכרת מאד היא הבעיה לזהות מבין n מטבעות $(n \geq 2)$ שנראות זהות, מטבע אחת קלה יותר (מזויפת). לרשותך מאזניים פשוטים שבעזרתם אפשר להשוות משקלן של שתי קבוצות של מטבעות. הבעיה היא למצוא את המטבע המזויפת על ידי מספר שקילות מינימלי. אנשים מעטים יודעים כי ארבע שקילות בלבד, מספיקות לשם כך. נוכיח זאת באינדוקציה מתמטית.

עבור $n = 2$ מספיקה שקילה אחת.

כעת נניח כי עבור $n\ (\geq 2)$ קיים תהליך של ארבע שקילות לכל היותר שבעזרתו ניתן לגלות בין n מטבעות זהות את המטבע המזויפת.

כעת נניח שנתונות $n + 1$ מטבעות שאחת מהן מזויפת. נוציא הצידה את אחת המטבעות, נשארו . . . .״

עליך להשלים את הפתרון של אוסטין.

ב. האם התוצאה של חלק א׳ מתיישבת עם התוצאות של משימה 4?

ג. האם ההוכחה של אוסטין תופסת גם כדי להראות כי מספיקות 3 שקילות?

ד. מה עולה מהתוצאות של חלקים א׳ ו- ב׳? מה המסקנה מהם ומחלק ג׳?

הערות:

אוסטין ממשיך את פתרונו כך:

> ״נפעיל את התהליך על n המטבעות שנותרו, או שנמצא ביניהן את המטבע המזויפת או שלא. במקרה האחרון המסקנה היא שהמטבע המזויפת היא זאת שהוצאנו הצידה בהתחלה. התוצאה נובעת מאינדוקציה מתמטית״.

סביר מאוד להניח שתלמידים רבים יוכיחו את הטענה בצורה דומה לזאת של אוסטין. אחרי שיעברו על הסעיפים ב׳ ו- ג׳ של המשימה, הם יבינו כי חייבת להיות שגיאה בהוכחה, מפני שמצד אחד משימה 4 הבהירה שמספר השקילות הוא פונקציה של מספר המטבעות. מצד שני, ביצוע חלק ג׳ של המשימה הנוכחית יבהיר שההוכחה של אוסטין בעצם נכונה גם לשלוש שקילות, ואפילו לשתיים. בטענה האחרונה מספר השקילות אינו תלוי במספר המטבעות וכך ברור שחייבת להיות שגיאה בהוכחה של Austin.

התלמידים עשויים להרגיש שבמעבר משלב n לשלב n+1 הסתמך Austin על ההנחה כי קיים תהליך מיון ל- n מטבעות והרי זה בדיוק מה שצריך להוכיח, כלומר יש כאן מעגליות: מניחים מה שרוצים להוכיח. זוהי התקפה טיפוסית על העיקרון הלוגי עליו מבוססת האינדוקציה המתמטית, ואין צורך להוסיף כי התקפה זו חסרה כל בסיס.

השגיאה היא אכן במעבר משלב n לשלב n+1, אך להבדיל מהמשימה הקודמת, השגיאה אינה במקרה פרטי מסוים של שלב זה, אלא בשימוש בהנחת האינדוקציה באופן כללי, מבלי לבדוק כי ניתן להשתמש בה. לפי הנחת האינדוקציה קיים תהליך של ארבע שקילות לכל היותר לגילוי המטבע המזויפת הנמצאת בין כל n מטבעות, **במידה ויש כזאת**. אך כאשר מוציאים מטבע אחת מ- n+1 המטבעות ונשארים עם n מטבעות, כבר לא ידוע אם המטבע המזויפת נמצאת עדיין בין n המטבעות, ולכן לא ניתן להסתמך על הנחת האינדוקציה עבור n מטבעות כדי להוכיח ל- n+1. כאשר עוברים משלב n לשלב n+1 יש לבדוק בקפדנות האם ניתן להסתמך על הנחת האינדוקציה, אחרת ניתן להגיע לתוצאות פרדוקסליות כמו זו של Austin.

כדי להתגבר על הרושם כי בהוכחה אינדוקטיבית קיימת מעגליות מקובל לסמן את המשתנה הטבעי באות k ולהוכיח את השלב המעבר מ- $n = k$ לשלב $n = k+1$.

ראוי להדגיש שוב בהקשר זה שטענה לא ניתנת להוכחה באינדוקציה אלא אם כן בגוף הטענה מופיע המשתנה n. לעיתים טענה נראית כאילו היא ניתנת להוכחה באינדוקציה מפני שהיא פותחת במילים: ״כל מספר טבעי״ . הנה למשל דוגמה שמבהירה את הסכנה שבדבר:

טענה: ״כל מספר טבעי הוא מעניין (מעניין פירושו שיש לו תכונה ייחודית שלו)

הוכחה באינדוקציה: 1 הוא בוודאי מספר מעניין. הוא המספר הטבעי הראשון, הוא הנייטרלי לכפל, הוא היחיד שיש לו בדיוק מחלק אחד ועוד. למרות שזה מיותר, כאמור, נבדוק את הטענה גם ל-2. 2 שהוא מעניין. זאת מפני שהוא הזוגי הראשון, הראשוני הראשון, הראשוני והזוגי היחיד, ועוד.

עכשיו נניח שכל המספרים עד k הם מעניינים ונוכיח ש- $k+1$ הוא מעניין. ובכן, אם הוא מעניין - גמרנו, ואם הוא לא מעניין אז הוא הראשון והכי קטן שאינו מעניין וזה עושה אותו למעניין.
מסקנה: כל המספרים הטבעיים הם מעניינים . . .
בכך הושלמה הבדיקה של שתי ההנחות המאפשרת יישום של עקרון האינדוקציה השלמה והסקה בעזרת חוק ההיסק MP שאכן כל המספרים הטבעיים הם מעניינים...

משימה 10

שאלה לדיון: האם אפשר להשתמש באינדוקציה מתמטית כדי להוכיח טענות מסובכות מאלה שהוכחנו עד כה, הנוגעות למספרים הטבעיים?

בעיה לפתרון:

א. נגדיר סדרה a_n באופן הבא:

$$\begin{cases} a_1 = k & k \text{ טבעי קבוע כלשהו} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} & \text{אם } a_n \text{ זוגי} \\ a_{n+1} = 1 + a_n & \text{אם } a_n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

האם נכון שלכל k , a_n שווה 1 או 2 מפרט, אולי, למספר סופי של איברים בראש הסדרה (מומלץ לבדוק מקרים פרטיים אחדים תחילה)

ב. מהי חוות דעתך על התוצאות של חלק א'?

הערות:

בעיה זו מראה כי התכונה שמוכיחים לא חייבת להיות זה בכל המקרים. הסדרה הופכת להיות 1, 2 בכל מקרה, אבל לא תמיד מאותו מקום. בכל זאת הטענה ניתנת להוכחה באינדוקציה.

חשיבותו של עיקרון האינדוקציה המתמטית

ההיבטים המושגיים של אינדוקציה מתמטית שהוצגו במשימות שלעיל יכולים לשמש מקור למחשבה עצמית ו/או לדיון קבוצתי על הלוגיקה שמונחת ביסודה של ההוכחה באינדוקציה.
כידוע עיקרון האינדוקציה המתמטית מהווה חלק מתכניות לימוד בבתי-ספר תיכוניים ובמוסדות להשכלה גבוהה. לאור בעיות פילוסופיות ופדגוגיות המתעוררות בהוראת האינדוקציה המתמטית ערכו Lowenthal and Eisenberg (1992) בדיקה חוזרת על מקומו של פרק זה בתכנית הלימודים, והטילו ספק בחשיבותו.

ברצוני לסיים עבודה זו בציטוט מהנקין (Henkin, 1961) המתרכז בחשיבותה של האינדוקציה המתמטית. אני מקווה כי מילותיו של הלוגיקן הידוע הזה, שזכה ב-1990 בפרס של איגוד המתמטיקאים האמריקאי MAA עבור תרומתו לחינוך מתמטי[4], יסייעו לשכנע את המורים ואת עורכי תוכניות הלימודים, שלא לנטוש את הוראת הנושא הזה, אלא להיאבק ולחפש דרכי הוראה שיביאו ללמידה משמעותית שלו, למרות הקשיים הכרוכים בכך. הנה דבריו:

[4] פרטים נוספים על מפעלו של הנקין ניתן למצוא ב
American Mathematical Monthly, vol. 97, January 199

"Of what real good is this principle anyhow?" you may ask. Of course one answer is that it can be used to establish many general statements about positive integers. . . But perhaps you are not really interested in general statements about positive integers. You have heard that mathematics can be used to build bridges or guide rockets, and you may wonder if mathematical induction can be applied to problems in such domains.

As a matter of fact there are very few direct applications of mathematical induction to what we might call "engineering problems"; most of these arise in connection with computations in the elementary theory of probability. But in spite of this, mathematical induction is really of great importance to engineering, for it enters into the proofs of a great many of the fundamental theorems in the branch of mathematics we call analysis - and these theorems are used over and over by engineers.

And yet, to me, the true significance of mathematical induction does not lie in its importance for practical applications. Rather I see it as a creation of man's intellect which symbolizes his ability to transcend the confines of his environment.

After all, wherever we go, wherever we look in our universe, we see only finite sets: The eggs in a market, the people in a room, the leaves in a forest, the stars in a galaxy - all of these are finite. But somehow man has been able to send his imagination soaring beyond anything he has ever seen, to create the concept of an infinite set. And mathematical induction is his most basic tool of discovery in this abstract and distant realm.

To me, this conception gives to mathematical study a sense of excitement, and I hope that some of you will carry your study of mathematics to the point where you too can experience the unique excitement which mathematics affords to its devoted student." (p. 10).

רשימת מקורות

Austin Keith (1988): "A Paradox - Four weighing suffice", *The Mathematical Gazette*, Note no. 72.15, Vol. 72, no. 460, p. 113.

Ernest, P. (1984): "Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion", *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 15, pp. 173-179.

Eves, H. (1983): *Great Moments in Mathematics After 1650,* MAA Dolciani Mathematical Expositions, Vol. 7, The Mathematical Association of America.

Davis, P.J. (1981): "Are There Coincidences In Mathematics?", *American Mathematical Monthly,* Vol. 88, pp. 311-320.

Dubinsky, E. (1986): "Teaching Mathematical Induction I", *Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 5, pp. 305-317.

Dubinsky, E. (1990): "Teaching Mathematical Induction II", *Journal of Mathematical Behavior,* Vol. 8, No. 3, pp. 285-304.

Fendel, D. and Resek, D. (1990): *Exploration and Proof*, Addison Wesley, S.F.(pp. 191-193).

Fischbein, E., and Engel, I. (1989): "Psychological Difficulties in Understanding the Principle of Mathematical Induction", in G. Vergenaud et als. (Eds.): *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Paris, France, pp. 276-282.

Henkin, L. (1960): "On Mathematical Induction", *American Mathematical Monthly,* Vol. 67, no. 4, pp.323-338.

Henkin, L. (1961): *Mathematical Induction,* MAA film manual no. 1, The Mathematical Association of America, Printed by Cushing Malloy, Inc., Ann-Arbor MI.

Knuth, D. E. (1986): *The Art of Computer Programming,* Vol. 1: Fundamental algorithms, Addison Wesley Publishing Company. p. 18, Ex. 2, 3.

Lowenthal, F. and Eisenberg, T., (1992): "Mathematical Induction in School: An Illusion of Rigor", *School Science and Mathematics,* Vol. 92, no. 5, pp. 233-238.

Movshovitz-Hadar, N. (1991): "The Falsifiability Criterion and Refutation by Mathematical Induction", in: Furinghetti Fulvia (ed.) *Proceedings of the 15th annual conference of PME The International Group on Psychology of Mathematics Education,* Assisi, Italy, Vol. 3 pp. 41-48.

Rising, G. R., Graham, J. H., Balzano, J. G., Burt, J. M., King, A .M. (1985): *Unified Mathematics* Book 3, Houghton Mifflin, Boston.

Ramsamujh, T.I.(1988): "A paradox - All positive integers are equal", The *Mathematical Gazette,* Note no. 72.14, Vol. 72, no. 460, p. 113.

Ross, K. A. (1990): *Elementary Analysis,* Springler Verlag, N.Y. (p. 4).

קופרמן, א. (1990): הערות אחדות על המיסטיקה של אינדוקציה מתמטית, הטכניון - המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, חיפה.

שכטר, ב. (1990): התנסויות אישיות בהוראת אינדוקציה מתמטית בבית-ספר תיכון, הטכניון - המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, חיפה.

תגובתו של עופר ליבה למאמר (עלי"ה 15, עמוד 89)

נהניתי מאוד לקרוא את המאמר של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר על האינדוקציה המתמטית (עלי"ה 13, עמ' 57-66). המסר העיקרי אשר משתקף ממנו הוא שצריך גם **להבין** את האינדוקציה ולא לבצע הוכחות באופן טכני, כפי שהדבר נעשה על-ידי רוב התלמידים (ואשר בא לידי ביטוי בין היתר בניסוחים כושלים). המשימות תורמות בהחלט לחידוד ההבנה, כפי שמבטיחה כותרת המשנה.

ברצוני להעיר ולהאיר על 2 נקודות במאמר:

א. בניסוח אקסיומות פיאנו, **לא** מקובל בספרות להגדיר את פונקציית העוקב כך: $S(n) = n + 1$, מן הסיבה הפשוטה שרק **לאחר** שנבטיח את קיום קבוצת הטבעיים (באמצעות האקסיומות) נוכל לעבור להגדרתה של פעולת החיבור (ושל פעולות אחרות). הגדרת פעולת החיבור למשל נעשית **ברקורסיה** (לאחר ביסוס **משפט הרקורסיה**) באופן הבא:
אם m מספר טבעי כלשהו

$m + 1 = S(m)$

$m + S(n) = S(m + n)$

(הגירסה הנ"ל היא כאשר 1 הוא המספר הטבעי הראשון, שהרי במקומות מסוימים 0 נחשב לראשון).

מגדירים באופן דומה את פעולת הכפל ופעולת החזקה במעריך טבעי. ראוי לציין שלאחר מכן מוכיחים את התכונות של הפעולות (קומוטטיביות וכו') **באינדוקציה**.

ב. אשר לדימוי (המצוין) של טור אבני הדומינו, הוא צריך לדעתי להיות מנוסח בצורה הבאה:

* **אם** האבן הראשונה נופלת.

* **ואם** (האבנים מסודרות בצורה כזו ש:) כאשר אבן כלשהי נופלת, היא מפילה את זו שעומדת אחריה. (בלשון האינדוקציה: אם האבן במקום k נופלת, היא מפילה את האבן במקום $k + 1$, וזאת בשביל k כלשהו)
אזי כל האבנים יפלו.

ברצוני להדגיש שכאשר הדימוי מוצג בצורה מדויקת, הוא מובן היטב לרוב התלמידים, וההקשר מקרב אותם להבנה טובה יותר של האינדוקציה.

מקורות

Enderton, Herbert. *Elements of Set Theory*, p. 70-71, 79-80. Academic Press, 1977.

Ayres, Frank. *Modern Algebra*, p. 30-31. McGraw-Hill, 1965.

Halmos, Paul. *Naive Set Theory*, p. 46-51, Springer-Verlag, 1974.