שיטות חדשות, תכנים חדשים

הצגת משפטים מתמטיים והוכחותיהם – הצמחה במקום הצנחה, חלק ב'

מאת **ניצה מובשוביץ־הדר**, הטכניון

בחלקו הראשון של מאמר זה נוסחו שני משפטים מתמטיים ונידונו דרכים שבהן ניתן להציגם לתלמידים. בחלק זה מתוארות מספר הוכחות עבור כל אחד ממשפטים אלה

3 הצגות שונות של ההוכחות

נתחיל בשלוש הצגות שונות של משפט סאנדארם

3.1 הוכחה פורמלית

טבלה 2:
הנפה של סאנדארם

4	7	10	13	16	19	22	25
7	12	17	22	27	32	37	42
10	17	24	31	38	45	52	59
13	22	31	40	49	58	67	76
16	27	38	49	60	71	82	93

השורה הראשונה בטבלה 2 כוללת את כל איברי הסדרה החשבונית המתחילה ב 4,7,10 אותה סדרה יוצרת גם את הטור הראשון את השורות האחרות משלימים כך שכל אחת מהן תהווה סדרה חשבונית, וכך שההפרשים בשורות השונות יהיו השלמים האי זוגיים 3,5,7,9,11, לפי הסדר

טענתו של סאנדארם היא

אם המספר n מופיע בטבלה, אז $2n + 1$ אינו מספר ראשוני
אם n **אינו** מופיע בטבלה, אז $2n + 1$ הוא מספר ראשוני
(כלומר, n מופיע בטבלה **אם ורק אם** $2n + 1$ מספר ראשוני)

הונסברגר (1970, עמ' 5–84) מביא את ההוכחה שלהלן

הוכחה:

נמצא תחילה נוסחה לאיברי הטבלה
המספר הראשון בשורה ה־n־ית הוא $4 + (n - 1)3 = 3n + 1$

גודל ההפרש של הסדרה האריתמטית המופיעה בשורה ה־n הוא $2n + 1$ לפיכך, המספר ה־m־י בשורה ה־n־ית הוא

$$3n+1+(m - 1)(2n + 1) = (2m + 1)n + m$$

משום כך, אם n מופיע בטבלה, קיים זוג מספרים שלמים m ו־n כך ש־ $n = (2m + 1)n+m$, ולכן

$$2n + 1 = 2(2m + 1)n + 2m + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$$

הוא מספר פריק

נותר עוד להוכיח שאם n אינו בטבלה אז $2n + 1$ הוא ראשוני, או לחילופין, אם $2n + 1$ אינו ראשוני, אז n בטבלה נניח, אם כן, ש־ $2n + 1 = ab$, כאשר a, b הם שלמים הגדולים מ־1 מאחר ו־ $2n + 1$ הוא אי־זוגי, גם a,b חייבים שניהם להיות אי־זוגיים נסמן $a = 2p + 1, b = 2q + 1$
כך ש־

$$2n + 1 = ab = (2p + 1)(2q + 1) = 2p(2q + 1) + 2q + 1$$

ו־ $n = (2q + 1)p + q$

אבל פירושו של דבר ש־n מופיע בטבלה בתור המספר ה־q בשורה ה־p נסיק מכאן ש־n מופיע בטבלה האינסופית שמייצגת טבלה 2, אם $2n + 1$ אינו מספר ראשוני

כל שלב בהוכחה ברור הנפה של סאנדארם, יש להודות, היא תקפה, ובכל זאת השיטה שבה הגיע הסטודנט ההודי לרעיון מיוחד זה נשארת מסתורית לחלוטין חוששתני שקוראים רבים חשים אכזבה מסוימת לאחר שעקבו בזהירות אחרי כל שלבי ההוכחה, שכן בידיהם אין עדיין שום תשובה לשאלה, כיצד מתקשרות הסדרות החשבוניות שבטבלה אל תכונת הראשוניות הוכחה זו לא החכימה אותנו המתח שנוצר על ידי ההצגה ההצהרתית המפתיעה, לא פורק
נתחיל מחדש, ונראה אם הגישה הבאה מתירה את הבעיה

3.2 הוכחה מגשרת־פערים

1 הטענה שאנו רוצים להוכיח מתייחסת למספרים האי־זוגיים נחליף, אם כן, כל מספר n שמופיע בטבלה 2 בערך המתאים k, המקיים $k = 2n + 1$ (ר, טבלה 3) כתוצאה משינוי זה, בטענה שיש להוכיח יחול השינוי הבא מספר אי־זוגי k מופיע בטבלה 3 (זוהי טבלה אינסופית), אם ורק אם k אינו ראשוני

טבלה 3: השינוי בטבלה של סאנדארם

9	15	21	27	33	39	45	51
15	25	35	45	55	65	75	85
21	35	49	63	77	91	105	119
27	45	63	81	99	117	135	153
33	55	77	99	121	143	165	187

2 מאחר שכל מספר אי־זוגי שלם הוא מכפלה של שני אי־זוגיים שלמים, לוח הכפל של כל שני שלמים אי־זוגיים (טבלה 4) חייב להכיל את כל הראשוניים, פרט ל־2

טבלה 4: לוח הכפל של השלמים האי זוגיים החיוביים

\	1	3	5	7	9	11	13	15	17
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
3	3	9	15	21	27	33	39	45	51
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85
7	7	21	35	49	63	77	91	105	119
9	9	27	45	63	81	99	117	135	153
11	11	33	55	77	99	121	143	165	187

3 על פי הגדרתם, כל המספרים הראשוניים (פרט ל־2) מופיעים בשורה הראשונה ובטור הראשון של לוח זה, ושום מספר ראשוני לא מופיע במקום אחר. בנוסף לכך, כל מספר אי־זוגי פריק חייב להופיע לפחות פעם אחת מחוץ לשורה ולטור הראשונים

4 מצד שני, אם נשמיט את השורה והטור הראשונים של טבלה 4, יהיה הנותר זהה לטבלה 3. הדבר נובע מכך, שכמו בכל לוח כפל של שלמים, גם טבלה 4 היא למעשה אוסף של שורות המהוות סדרות חשבוניות כאשר המספרים שבשוליים הם הפרשיהן בהתאמה

5 נסיק, אם כן, שטבלה 3 מכילה את כל המספרים השלמים הפריקים האי־זוגיים ואף לא ראשוני אחד. במלים אחרות: לכל שלם אי־זוגי k, אם k ראשוני אזי אין הוא מופיע בטבלה 3, ואם k אינו מופיע בטבלה 3, אזי הוא ראשוני. מ ש ל

עלי לציין כי מרבית התלמידים בקורס "בעיות אלמנטריות במתמטיקה", הנועד לפרחי־הוראה בטכניון, אהבו את ההוכחה הזאת יותר מקודמתה. הם העידו על עצמם שהפעם הבינו את ההגיון שבה יותר מאשר את זה שבהוכחה האחרת

הוכחה אחרונה זו מגשרת על פני הפער שיצרה הצגת המשפט בין הסדרות החשבוניות לבין המספרים הראשוניים. הגישור מתרחש בעת יצירת לוח הכפל של האי־זוגיים בשלב 4, שבו הצטלבו הסדרות החשבוניות והמספרים הראשוניים. להוכחה זאת אפשר לקרוא "הוכחה מגיבה", בהיותה מגיבה לגירוי שנוצר עם הצגת המשפט. בדרך כלל, מביאה הוכחה מגיבה את מקבליה לתחושה שהחכימו ממנה

דרך נוספת היא דרך הגילוי המודרך, שאליה נפנה בקטע הבא. איור 2 בסוף הקטע מציג השוואה בין ההצגות השונות של משפט 2 ובין הדרכים השונות להוכחתו

3.3 פיתוח "מלמטה למעלה" של ההוכחה (ושל המשפט)

נניח כעת שאין אנו יודעים מאומה על הנפה של סאנדארם. להלן סדרת מטלות המובילה בהדרגה לגילוי הנפה

המטרה: לגלות אלגוריתם שמסנן את המספרים הראשוניים מבין השלמים החיוביים

א עליך לשחזר את ההגדרה של מספר (טבעי) ראשוני ושל מספר (טבעי) פריק

ב איזו תכונה משותפת יש לכל המספרים הראשוניים פרט ל־2? (תשובה: כולם אי־זוגיים)

ג בהסתמך על הממצאים הקודמים, איך אפשר לנסח את המטרה ביתר פשטות? (תשובה: במטרה להפריד בין הראשוניים והפריקים, מספיק להפריד את הראשוניים האי־זוגיים מהפריקים האי־זוגיים)

ד עליך לבנות את לוח הכפל של המספרים האי־זוגיים עד 17 (תוצאה: טבלה 4). נא להתייחס ללוח זה כמייצג את הלוח האינסופי של כל הזוגות של שלמים אי־זוגיים

כעת, נחקור את תכונות הלוח

1 איזו תכונה משותפת לכל המספרים המופיעים בלוח האינסופי?

(תשובה: כולם שלמים אי־זוגיים, כיון שהמכפלה של שני שלמים אי־זוגיים היא בכל מקרה מספר אי־זוגי. בנוסף לכך מופיעים בטבלה כל האי־זוגיים, כי כל מספר אי־זוגי הוא מכפלה של זוג אחד לפחות של מספרים אי־זוגיים)

2 היכן מופיעים בלוח **כל** המספרים הראשוניים?

(תשובה: בטור ובשורה הראשונים)

3 היכן מופיעים **רק** מספרים פריקים?

(תשובה: בחלק המשלים של הלוח — כלומר בכל המקומות פרט לטור ולשורה הראשונים, שבהם מופיעים כאמור גם ראשוניים)

ה אם נשמיט את הטור והשורה הראשונים בלוח הכפל האינסופי של השלמים האי־זוגיים החיוביים, איזה שלמים יישארו? (תשובה: הלוח המוקטן יכיל את **כל** הפריקים האי־זוגיים **ורק** אותם)

ו התוכלו(י) לנסח את ממצאיך בצורת משפטי תנאי? עליך להשלים: אם שלם אי־זוגי k מופיע בלוח המוקטן, אז , אם שלם אי־זוגי k אינו מופיע בלוח המוקטן, אז

ז יהי k שלם אי־זוגי, אזי $k = 2n + 1$ עבור n שלם כלשהו. עליך לשנות את הלוח המוקטן כך שבמקום k יופיע הערך המתאים של n. לאחר מכן עליך לנסח מחדש את ממצאיך, הפעם לגבי n (תשובה: הלוח לאחר השינוי מתלכד עם טבלה 2 לעיל, והמשפט המתאים הוא משפטו של סאנדארם: אם n מופיע בטבלה אז $2n + 1$ אינו ראשוני, ולהיפך)

ח בהסתמך על ממצאיך בשלב ז, נא לתאר בדיאגרמת זרימה אלגוריתם שבעזרתו אפשר לקבוע לכל n שלם וחיובי, האם הוא ראשוני או פריק (לפירוט התשובה ר' Hadar and Hadass ,1983)

ברור לגמרי שסדרת המטלות שלעיל מתפתחת "מלמטה־למעלה", החל בידע קודם לגבי מספרים ראשוניים ופריקים, דרך האי־זוגיים ומכפלותיהם, וכלה בגילוי הנפה של סאנדארם. ראוי לציין שהמשפט מופיע **בסוף** התהליך, ובאותו רגע הוא כבר הוכח. סדרת המטלות היא, איפוא, סדרה בונה

הוכחה זו אמנם דומה מאוד לקודמת, אולם יש בין השתיים הבדל עקרוני. שלבים א׳-ו׳ בהוכחה זו מקבילים לשלבים 2-5 בהוכחה הקודמת, אולם שלב 1 שמופיע מיד לאחר הצגת המשפט, ופותח את ההוכחה הקודמת, מופיע בהוכחה זו כשלב ח׳, ורק כתוצאה מכך מוצג המשפט

עם סיום סדרה זו של מטלות המובילות לגילוי, נמצא שהתלמידים מבינים את הנפה של סאנדארם. הם יודעים משהו שלא ידעו בעבר. יתרה מזאת, בניגוד למצב שהתהווה בסיומה של ההוכחה הפורמלית, מרבית התלמידים מאמינים עתה בהוכחה, ואף שמחים אולי על כך שהשיגו אותה. ובכן, הם החכימו. על פי מאנין (Manin, 1977), זוהי אם כן גישה טובה להצגת המשפט וההוכחה. אבל האם התלמידים אף **מרגישים** חכמים יותר? האם הם מעריכים את המתמטיקה שלמדו? האם הם מרגישים שפיסת ידע זו היא משהו מאוד מיוחד? הידע החדש מעוגן היטב כל כך בידע הקודם, הוא נבנה בזהירות כזו בסדרת צעדים לוגיים, שנשאר מעט מאוד מקום להתפעלות. סטודנטים רבים נוטים לקחת את המוצר הסופי, היינו את המשפט ואת האלגוריתם שנגזר ממנו, כמעט כמובן מאליו. יתכן שהמורה יצטרך להצביע במפורש על ההישג המיוחד, כדי שהתלמידים יבחינו בחשיבותו

ניתן להוסיף בסוף סדרת הגילוי המודרך גם את המטלה הבאה: ״עירכו דיון קבוצתי בחשיבות הדבר שגיליתם״. כתוצאה מהדיון, עשויים התלמידים ללמוד להעריך את חשיבות הידע שקיבלו. אולם אין להשוות זאת עם ההערכה הנובעת מההצגה בצורת ״הנחתה מפתיעה״ שאחריה באה ההוכחה המגשרת על הפער, דוגמת זו שהוצגה קודם

התרשים שבאיור 2 מתאר את ההבדלים בין שלוש שיטות ההוכחה שהבאנו למשפט השני

נחזור למשפט הראשון — נבדוק שתי דרכים נוספות להצגת הוכחה

3.4 הוכחה מובנית

נחזור עתה אל משפט המטריצות שהצגנו בחלקו הראשון של המאמר (עלייה 9)

משפט

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$ מעל השדה R שאבריה $A_{i,j}$ מקיימים

$$\begin{cases} A_{i,j+1} - A_{i,j} = C_1 \\ A_{i+1,j} - A_{i,j} = C_2 \end{cases}$$

באשר C_1, C_2 הם קבועים רח, $i,j = 1,2,3,\ \ ,n$

אזי קיים מספר ממשי C_3 כך שעבור כל

$A_{i_1,j_1}, A_{i_2,j_2}, \ \ , A_{i_n,j_n}$,

שמקיימים

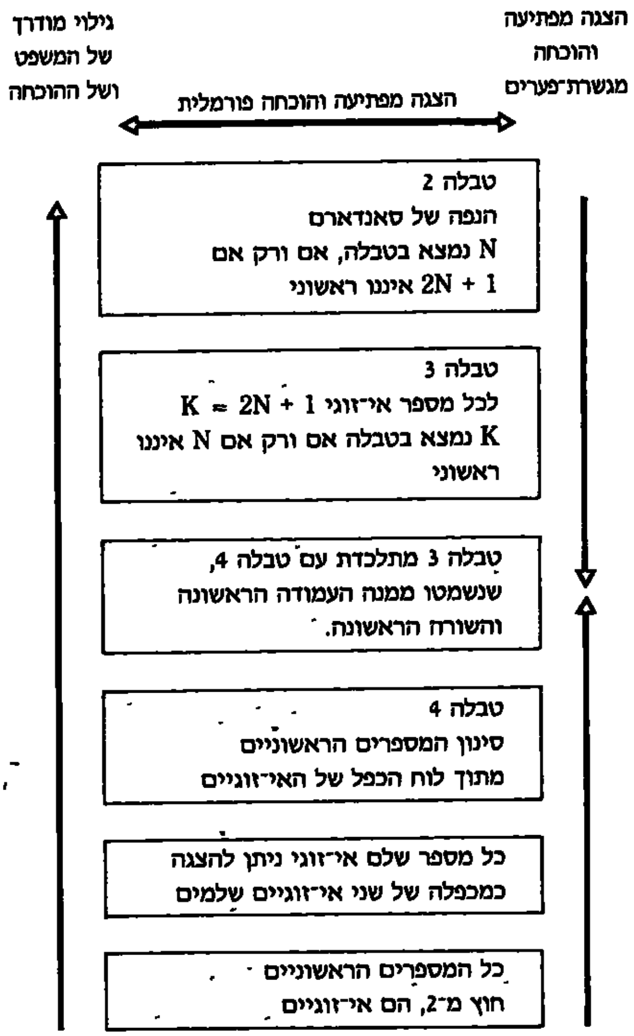
$r\neq s \Rightarrow i_r\neq i_s, j_r\neq j_s$

לכל

$r,s = 1,2,3,\ \ ,n$

מתקיים:

$\sum_{k=1}^{n} A_{i_k,j_k} = C_3$



דיאגרמה 2: השוואה של שלוש שיטות להצגת הנפה של סאנדארם

הוכחה סדרתית מתפתחת באופן ישיר מהרישא של המשפט אל הסיפא שלו, ועוברת בדרך כלל תהליך ארוך למדי של יישום חוקי ההיקש התקפים. ההוכחה הפורמלית של הנפה של סאנדארם היא דוגמא אופיינית להוכחה כזאת. רק לעיתים נדירות ניתן לראות בתהליך כזה את הרעיון היסודי של ההוכחה. דבר זה נכון במיוחד כאשר מדובר בהוכחות ארוכות ומסובכות יחסית. ההוכחה המובנית מציגה תחילה את הלוגיקה של ההוכחה, ורק אחר כך מתייחסת לשאר הפרטים באופן דדוקטיבי. כפי שטען לירון (1983), בהוכחה מובנית נאותה, המשפט מוצג בתחילה

הוכחה מובנית מתפתחת מלמעלה־למטה. היא פותחת בסקירת המהלך הלוגי של ההוכחה על כל שלביה, ואחר כך ממלאת את הפרטים החסרים בכל שלב. לירון (Leron, 1983) טוען שהוכחה

מובנית היא ההוכחה ההולמת בכל מקרה שבו הצגת המשפט היא הצעד הפותח היא מגיבה יותר מן ההוכחה הסדרתית לחיפוש הטבעי של התלמיד אחר משמעות יחד עם זאת, מרגע שנכנסים להוכחת הפרטים בכל שלב, נשארת בעינה בעיית הבנתה של משמעות ההוכחה בפסקה הבאה נדגים את הקושי בפסקה שלאחריה נציע דרך להתגבר עליו

הוכחה מובנית למשפט המטריצות, שהוצג בתחילת המאמר, עשויה להיראות כמתואר להלן

תהי A מטריצה ריבועית כנדרש במשפט נתבונן ב־n איברים שלה $A_{i,j}$ המקיימים

$$r \neq s \implies i_r \neq i_s,\ j_r \neq j_s,\ r, s = 1, 2, \ldots, n$$

נוכיח ש

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i_k, j_k} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \quad (1)$$

כלומר, סכום n איברים שכל שניים מהם אינם באותו טור ובאותה שורה, שווה לסכום האיברים באלכסון הראשי

נגדיר

$$c_3 = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \quad (2)$$

הצירוף של (1) ו־(2) מוכיח את טענת המשפט יתר על כן, נראה ש

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i_k, j_k} = \frac{n}{2}(A_{1,1} + A_{n,n}) \quad (3)$$

כלומר סכומם של כל n גורמים כאלה תלוי בגודל n של המטריצה ובשני האלכסונים שלה

זהו תיאור של ההוכחה מ״מעוף הציפור״ הוא ברור ומתקבל על הדעת כעת נותר רק למלא את הפרטים החסרים חלק זה כולל את הטיפול האלגברי בתבניות ובאינדקסים של הביטוי המופיע באגף שמאל של (1) ושינוי שלהם עד לצורה המופיעה באגף ימין, תוך שימוש ברישא של המשפט לצורך המעבר (ראה לעיל בסעיף ״הצגה סימבולית״) טיפול זה יכול להתבצע באמנות על ידי המורה הוכחה מסוג זה מרשימה לרוב את המתמטיקאי המנוסה, שכן הסיפא של המשפט נובע כבמטה קסם מהרישא, אולם בקרב תלמידים חסרי ניסיון היא יוצרת מתח, כיון שרק לעיתים רחוקות הם יכולים להבין את המשמעות הטמונה בטיפול בסמלים בניגוד להצנחה מפתיעה של משפט, המיצרת מתח שההוכחה המגיבה עליה מרגיעה אותו, כאן אין למתח סיכוי רב להתפוגג

הוכחה מובנית מורידה את הבעיה הפדגוגית, המושרשת בכל הוכחה סדרתית, לרמת הפירוט שבאה אחרי הצגת מבנה ההוכחה ב״מבט מלמעלה״ כאשר הפרטים אינם טריביאליים, מופיעה גם בהוכחות מובנות אותה בעיה הקיימת בהוכחות סדרתיות בעיית הירידה אל משמעות ההוכחה האם יש אפשרות אחרת? בפיסקה הבאה נציע אלטרנטיבה אחת

3.5 הוכחה באמצעות דוגמא טיפוסית

לפנינו תחליף להוכחה מובנית שהוכיח את עצמו כמוצלח כשהוצג בפני פרחי־הוראה

נגביל את עצמנו לטבלה 1, שהיא גדולה די הצורך כדי לחשוב עליה כמייצגת המקרה הכללי שאין בו כל ייחוד אך הוא קטן דיו כדי לשרת כדוגמא קונקרטית במינוח של דייויד פים (Pimm, 1983) טבלה 1 היא דוגמא טיפוסית (generic example)

על גבי שקף של טבלה 1 נניח שמונה מעגלים שיקיפו שמונה איברים, על־פי בחירה שרירותית, שייצגו שמונה איברים **כלשהם** בטבלה 1 זאת באופן שאף שניים מהם אינם באותו טור ובאותה שורה כלומר נבחר אותם במיוחד כך שהמספר המוקף במעגל בשורה הראשונה לא יהיה הפינתי, אלא, למשל, החמישי נתייחס לצורך הדיון בהמשך לשמונה המספרים המסומנים במעגל בטבלה 5

טבלה 5: דוגמה טיפוסית להוכחה של המשפט הראשון

10	11	12	13	14	15	16	17
19	20	21	22	23	24	25	26
28	29	30	31	32	33	34	35
37	38	39	40	41	42	43	44
46	47	48	49	50	51	52	53
55	56	57	58	59	60	61	62
64	65	66	67	68	69	70	71
73	74	75	76	77	78	79	80

טבלה 6: חילוף שומר־סכום של שני איברים מוקפים בעיגול בטבלה 5

(האיבר בשורה הראשונה והאיבר בעמודה הראשונה)

10	11	12	13	14	15	16	17
19	20	21	22	23	24	25	26
28	29	30	31	32	33	34	35
37	38	39	40	41	42	43	44
46	47	48	49	50	51	52	53
55	56	57	58	59	60	61	62
64	65	66	67	68	69	70	71
73	74	75	76	77	78	79	80

נעביר את העיגול המקיף את המספר בשורה הראשונה מהטור החמישי אל הטור הראשון. כעת יש בטור הראשון שני מספרים המוקפים במעגל, ובטור החמישי אין אף מספר מוקף במעגל. נעביר את העיגול שבטור הראשון בשורה הרביעית אל הטור החמישי באותה שורה. עכשיו יש לנו קבוצה חדשה של שמונה איברים, המקיימת את הדרישה שאף שניים מהם לא יהיו בני אותה שורה או אותו טור (ראה טבלה 6).

מה ההבדל בין סכומם של שמונת האיברים בקבוצה החדשה לבין סכום איברי הקבוצה המקורית? השינויים שביצענו אינם יכולים לחשפיע על הסכום כיוון שיש הפרש קבוע בין כל שני איברים סמוכים באותה שורה, והפרש זה קבוע בכל השורות. כלומר, באמצעות העברת המעגלים כמתואר לעיל חיסרנו והוספנו אותו מספר.

נטפל עתה באופן דומה באיברים המוקפים במעגל שבשורות ה־2 וה־8. התוצאה תהיה דומה. נקבל קבוצה חדשה של שמונה איברים עם התכונה הדרושה. עכשיו נמצאים כבר שניים מתוך שמונה האיברים באלכסון הראשי וסכום שמונת האיברים לא השתנה. נמשיך בשינוי של זוגות איברים באורח דומה עד שכל שמונת האיברים יימצאו על האלכסון הראשי. כפי שראינו, התהליך שומר על הסכום. בכך מסתיימת הוכחתה של טענה 1 לגבי הדוגמא הטיפוסית. התלמידים שהיו עדים לתהליך ההחלפות שומרות הסכום מבינים בנקל את הכללתו כך שבהמשך ניתן להביא הוכחה פורמלית של התהליך.

יתר על כן, העברתם של כל תאיברים בשמיניה המקורית בזה אחר זה אל האלכסון הראשי, תוך שימור הסכום, ממחישה לתלמידים שגם איברי האלכסון הראשי מהווים סדרה חשבונית, וההפרש הקבוע של סדרה זו שווה לסכום שני ההפרשים הקבועים: האחד של השורות והשני של הטורים. בכך נשלמת ההוכחה שסכום שמונת הגורמים הוא לא יותר מפי ארבע הסכום של הגורם הראשון והגורם האחרון באלכסון הראשי, כפי שנטען ב־3 לעיל. ממצא זה מסביר איך ומדוע עובדת תחבולתו של סטובר (ראה הפסקה על הצגה מפתיעה לעיל). מרבית התלמידים יכולים להמשיך מכאן ולהשלים בעצמם את הפרטים הפורמליים של הוכחת המקרה הכללי. ההוכחה הנשענת על מקרה טיפוסי היא, לפיכך, דרך נוספת של הוכחה מגשרת פערים.

3.6 דיון בהצגות שונות של הוכחות

לירון (שם, עמ' 185) קובע, בפרפרזה על דברי מאנין (שם): "הצגה טובה של הוכחה היא זו העושה את המאזין (או את הקורא) לחכם יותר". מעבר לכך היא טוענת, שהצגה טובה של הוכחה לא רק מחכימה את התלמיד, אלא אף מקנה לו את התחושה שהוא חכם.

לעיתים קרובות כשאנו עוקבים אחר הוכחה פורמלית — בייחוד כזו שסובלת מתסמונת של "הבה ונגדיר פונקציה" (Avital, 1973) — מרגיש התלמיד שהטיפול נעשה בדרכי עורמה. מקור ההוכחה נשאר מסתורי והתלמיד נשאר עם תחושה של משהו "לא סגור", של תסכול. תחושה שאיננו די חכם, ודאי שלא חכם כמי שמצא את ההוכחה ואפילו לא די חכם כדי להבין כיצד הגיע הממציא אל הרעיון. כך מתחזק אצלו כלפי המתמטיקה יחס של "לעולם לא אוכל להבין זאת, זה לא בשבילי". השפעתה של הוכחה מגשרת פערים היא הפוכה — היא מקנה תחושה שמחכימים, ולכן היא מעוררת הערכה כלפי החוכמה הטמונה בהוכחה מתמטית.

כפי שהזכרנו קודם, הוכחה מובנית ממקדת את הבעיה הפדגוגית שבהצגה משמעותית של הוכחה פורמלית דדוקטיבית בחלקיה הפנימיים של ההוכחה. כאשר חלקים אלה אינם פשוטים, מופיעות בהוכחות מובנות בעיות פדגוגיות הדומות לאילו שבהוכחות סדרתיות. בהוכחה באמצעות דוגמה טיפוסית טמון הפוטנציאל לפתור קשיים דידקטיים מסוג זה.

יש להבחין כמובן בין הוכחה של דוגמה טיפוסית לבין ההוכחה הכללית המלאה. הראשונה היא רק תהליך הוכחה במקרה פרטי — תהליך שניתן להכלילו למקרה הכללי. על־כן, לא מדובר כאן בתחליף להוכחה הכללית הפורמלית. ואולם, מבחינה פדגוגית, יכולה הוכחה של דוגמא טיפוסית למלא לעיתים את מקומה של ההוכחה הכללית. באיזו תדירות ראוי לעשות זאת? על שאלה זו צריך כל מורה להשיב לעצמו — לפי הפילוסופיה החינוכית שלו.

4. דיון מסכם

אף כי שני המשפטים המוצגים במאמר זה מעניינים מאוד, הצגותיהם השונות אינן מעוררות אותה מידה של עניין. כל ההוכחות המוצגות תקפות, אמנם, מבחינה לוגית, אך לא כולן עונות באותה מידה על צרכיהם האינטלקטואליים של התלמידים. שש דרכי הצגה של משפטים הובאו לעיל:

1. הצגה מפתיעה (של סכום קבוע של גורמים במטריצה ריבועית)
2. דרישה מפתיעה (של הנפה של סאנדארם)
3. הצגה סמלית (עם סכומים ומשתנים רבים)
4. הצגה מילולית (שתסביר או תחליף את ההצגה הסמלית)
5. "הצמחה" — התפתחות הדרגתית (של הנפה של סאנדארם דרך גילוי מודרך)
6. חקירה אינדוקטיבית (של מטריצות, שמספר הגורמים שלה גדל בהדרגה)

כן הובאו שש הוכחות שונות:

1. הוכחה פורמלית (כמו זו בספרו של הונסברגר)
2. הוכחה של גישור פער (כמו בנפה של סאנדארם)
3. הוכחה מובנית (למשפט של מטריצה ריבועית מלמעלה למטה)
4. הוכחה דרך דוגמא טיפוסית (הנלווית להוכחה מובנית)
5. "הצמחה" מלמטה למעלה (של הנפה של סאנדארם, שבה ההוכחה מקדימה את המשפט)
6. חקירה אינדוקטיבית (שבה מרמזים שהוכחות של מקרים מיוחדים ניתנות לעתים להכללה — ולעתים לא)

שני הסעיפים האחרונים נרשמו הן כהצגות משפטים והן כהוכחות מאחר והם מכילים גורמים של שניהם. נתייחס אליהם להלן בשם "שיטת הגילוי המודרך". נבדוק גם צמד נוסף של משפט והוכחה. מדובר בהוראת משפטים במתמטיקה בדרך של הצגה מפתיעה של משפט, על־ידי הצמחתו או הצגתו, המלווה בהוכחה מגשרת־פערים או בהוכחה על־ידי דוגמא טיפוסית. בשתי הצורות הצגות המשפטים הן הצגות מעוררות. בשתיהן מגיבות ההוכחות לגירוי המתעורר. לכן נציע לשיטה זאת את השם **שיטת התגובה לגירוי**.

4.1 "שיטת התגובה לגירוי" לעומת "הגילוי המודרך".

בדרך כלל, הן בשיטת "התגובה לגירוי" והן בשיטת "הגילוי המודרך" כלולים חלקים של עבודה עצמית של התלמיד, העלאת השערות ופתרון בעיות. אולם שתי הגישות מבוססות על תיאוריות שונות של למידה. בשיטת הגילוי המודרך מציג המורה שאלות ומעודד את התלמידים למצוא בעצמם את התשובות. בגישה של "תגובה לגירוי", מעודד המורה את התלמידים לשאול שאלות, ומספק להן תשובות המתבססות לעיתים (ועדיף כך) על הצעות התלמידים. תלמיד שיש לו שאלה "בוערת", הוא תלמיד קשוב לתשובה. ידוע, למשל, שהצגת שאלות היא אחת הדרכים המרכזיות ללימוד דברים חדשים. דבר מוזר או מסקרן מוביל את הילד לשאול מישהו בר־סמכא, לעיתים קרובות אחד ההורים. הילד קצר־רוח במצב זה ומעוניין בתשובה ישירה ומספקת, אשר תפיג את המתח שעורר בו הדבר הבלתי מובן. ניסיון להשיב לילד בשאלות מדריכות ייתקל במקרים רבים בתגובה חסרת־סבלנות.

גישת התגובה לגירוי מחקה תהליכי למידה אלה. מדובר כאן במוטיבציה של התלמיד בשלבי הלמידה השונים. התלמיד הוא זה שדורש תשובה. בגילוי מודרך המוטיבציה בשלבי הלמידה היא של המורה. המורה רוצה ללמד ושואל שאלות שעליהן הוא מצפה מהתלמיד להשיב כדי שזה יצבור ידע חדש. גילוי מודרך, בדרך כלל, מוביל למטרה כדאית בעיני המורה. התלמידים אינם תופשים תמיד מטרה זו. לעיתים קרובות אין המטרה ברורה לתלמיד. במקרים אחרים המטרה ברורה, אך מתעוררת תחושה של כפייה מצד המורה. אף אם התלמידים דנו במטרה, לא תמיד הם מרגישים בצורך להגיע אליה. בגישה המעוררת, לעומת זאת, נוצר הצורך להגיע למטרה בזמן ההצגה עצמה. המוטיבציה היא פנימית ובאה מהתלמיד, כשהמטרה ברורה ואף אישית. מכאן שההבדל בין שתי הגישות הוא גדול וטמון בגודל המוטיבציה הפנימית להסקת מסקנות.

הבדל נוסף בין שתי הגישות טמון באופיה של ההפתעה המעורבת בהן, ובשלב שבו היא מופיעה. בגילוי המודרך, באה ההפתעה, אם בכלל, **בסוף** התהליכים. אם נעשה הדבר בתבונה, הוא יעודד את התלמיד לפעילות הבאה. בגישה המעוררת באה ההפתעה בהתחלה. עובדה זו מעודדת לפעילות בהוכחה על־ידי יצירת פער, או על־ידי הצגת הזמנה, לפעמים בצורת קונפליקט. יתר על כן, עידוד הפעילות הבאה מעודד את הפעילות הנוכחית.

ההבדל השלישי הוא באופן ההגבה הקיים בשתי הגישות. התגובה בסוף הגילוי המודרך היא ביטוי של התרגשות. זו התרגשות הנובעת מהכרה בחוכמתם של המתמטיקאים. במקרה של הגישה המעוררת הגבה, התגובה בסוף היא השתחררות מהמתח שיצרה ההפתעה, או הנאה מסיפוק הסקרנות האינטלקטואלית שטפחה ההפתעה.

ההבדל הרביעי הוא ביחס למתמטיקה הנובע משתי גישות אלה. על יחס זה דנו כבר בחלק של "ההתפתחות מלמטה".

הבדל נוסף מופיע בהקשר של בעיות הדורשות חשיבה מורכבת ומובילות לחקירה אינדוקטיבית. כל בעיה מסוג זה מייצגת, למעשה, אוסף של בעיות (אחת לכל ערך של n), שעבורן אנו מחפשים פתרון כללי (Hadar & Hadass, 1981a). בדיקה של מקרים מיוחדים היא דרך טובה להגיע להשערות או לבחון את קיומה של אחת מהן. ואולם, אין זה כך תמיד. למשל, החקירה שביצענו במשפט המטריצות אינה מתוחכמת דיה כדי להצדיק את השיעמום ואת ביזבוז הזמן הכרוכים בבדיקת מטריצה מסדר 4×4, או 5×5. מצד שני, בכדי לספק לתלמידים בסיס להשערה הכללית, חייב התהליך האינדוקטיבי להכיל יותר מאשר בדיקה של מטריצה אחת או של שתי מטריצות מסדר 3×3.

יתר על כן, תהליכי החקירה האינדוקטיבית מערבים בהוכחה סדרה של מקרים מיוחדים, שעשויים להציע לעתים רעיון כללי של הוכחה. לעתים, אך לא תמיד. לפעמים, להוכחות של מקרים מיוחדים, יש מעט מאד במשותף עם ההוכחה הכללית. ההוכחה למשפט המטריצה במקרה של 2×2 ו־3×3 (ראה את החלק של הצגה דרך חקירה אינדוקטיבית לעיל) לוקה בהגבלה זו.

טבלה 7: השוואה בין שיטת התגובה לגירוי ושיטת של הגילוי המודרך

הקריטריון	שיטת הגילוי המודרך	שיטת התגובה לגירוי
אופן ההצגה	הצעת משימה	גירוי מעורר
מוטיבציה פנימית	לא בהכרח קימת	טבועה
שלב ההפתעה	בסוף	בהתחלה
המטלה המעוררת	הבאה	הנוכחית
תגובת "אהה"	מהתרגשות	מהנאה והקלה
אופי ההוכחה	ליניארית, מלמטה	סגירת־פער
רמזים	מקרים פרטיים	מקרה טיפוסי
תפקיד התלמיד	חיפוש תשובות	הצגת שאלות
תפקיד המורה	להציג שאלות	לעורר תשובות ולענות
תפישת המטרה	מתקבלת מהמורה	אמורה להתעורר
התהליך	מודרך (מתישי)	מגיב לצורך
התלמיד בסיום	חכם יותר	מרגיש שהחכים
עמדות מתפתחות	הכרה בחשיבות	הערכת היופי והתבונה

סדרה של חקירה אינדוקטיבית עשוייה למנוע סיכונים אלה, וניתוח פעולות ההוראה יכול לסייע בכך (הדר והדס, Hadar & Hadass, 1981b) עם זאת, אין להיצמד לגילוי המודרך בכל מחיר

טיפול בדוגמה מייצגת (טיפוסית) כסיוע להוכחה היא דרך חילופית כך נהגנו, למשל, כאשר הסתכלנו במטריצה 8×8 המוצגת בטבלה 1 למרות שפנינו לדוגמה קונקרטית, לא מדובר כאן בחקירה אינדוקטיבית, המקרה של 8×8 הוא קטן מספיק כדי לשרת כמקרה פרטי, אך גם גדול דיו כדי שנתייחס אליו כמייצג ניתן לראות דרך הדוגמה הכללית השקופה והברורה את ההוכחה הכללית, כי אין כאן שום דבר המאפיין רק את המקרה של 8×8

טבלה 7 מסכמת בקצרה את ההבדלים שתוארו במאמר

4.2 הערות אחדות לסיום

אנדרהיל ((Underhill, 1986) מציע ארבעה היגדים שיסייעו בידינו לבחון את המתרחש בכיתות

1 **לדעת** פירושו להאמין
2 **ללמוד** פירושו להתפתח ולשנות אמונות
3 **להורות** פירושו לסייע לאחרים להתפתח ולשנות אמונות
4 **התנהגות** היא פעילות אנושית המכוונת על־ידי אמונות אופרציונליות

אם מקבלים את היגדיו של אנדרהיל, כי אז שיטת התגובה הנענית היא אחת הגישות ההולמות ביותר גישה של תגובה נענית דורשת יותר זמן ומאמץ תכנוני התכנון הוא כמו תרשים אדריכלי, שכולל שיקולים מתמטיים ופדגוגיים, בד בבד עם שיקולים אופרציונליים הזמן והמאמץ הנדרש שונה אצל תלמידים ומורים

היחס בין המתמטיקאי היוצר לבין המורה למתמטיקה המעביר את ידיעותיו המתמטיות לאחרים, הוא כמו היחס בין מלחין לבין מבצע מוסיקה או בין כותב מחזות לבין שחקן השחקנים מקדישים זמן רב לשפר את הביצוע מורים למתמטיקה חייבים למצוא דרכי הוראה שיתאימו להבנתו של הקהל שלהם ניתן למצוא הקבלה בין משפטים מתמטיים והוראתם לבין המוסיקה המולחנת והמבוצעת משום כך ראוי להשקיע זמן ומאמץ בתכנון הצגת ההוכחה הצגה של תגובה נענית שובה את המאזינים בהפתעה, מעוררת מוטיבציה, ולבסוף גורמת למאזין ליהנות מ״המוסיקה״ ולהעריך את ״המלחין״ וה״מבצע״

4.3 שאלות פתוחות

משפט הוא כמו מבוך. הוכחתו של משפט נפתחת בתחילת המבוך ומגיעה למרכזו במבוך דו־מימדי ישרטטו אנשים רבים בו־זמנית קווים משני הקצוות, וימשיכו עד ששני העפרונות יתלכדו זהו תהליך של סגירת פערים בשלושה מימדים יש אפשרות להסתכל על המבוך ממעלה המדרגות. כך עושים גם בהוכחה מובנית בהוכחת משפטים עשויות דוגמאות כלליות לסייע להתגבר על האתגר באמצעות גישור הפער מורים למתמטיקה צריכים להציג משפטים כאתגר, ואת ההוכחה עליהם להציג כמציאת מוצא מהסבך — מהמבוך גישת התגובה לגירוי שהוצגה במאמר זה מציעה דרך לכך האם היא ניתנת ליישום בכל המשפטים וההוכחות? בשאלה זאת נגענו כבר בעבר בהקשר אחר (מובשוביץ־הדר, 1990)

האם הוראת משפטים בגישה של תגובה נענית אכן משפרת את ההוראה — מוקדם לשפוט כדי לענות לשאלה יש לבצע מחקר אמפירי

רשימת ספרות

מובשוביץ־הדר נ (1990) משפטים במתמטיקה כמקור להפתעות, מסרים — עלון למורי מתימטיקה, כרך ג׳ מס 3 עמ 24-47

רשימת ספרות

Avital, S [1973], Teaching a mathematical proof by exposition *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol 4 , pp 143-147.

Gardner, M [1956], *Mathematics, magic and mystery* Dover publications, New York

Hadar, N , Hadass, R [1981a], The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls *Educational Studies in Mathematics*, Vol 12, No 4, pp. 435-443

Hadar, N , Hadass, R [1981b], An analysis of teaching moves in the teaching of the sine theorem via guided discovery. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 12, No 1, pp 101-108

Hadar, N , Hadass, R. [1983], *Two sieves for prime numbers* UMAP unit #633; COMAP Inc., Lexington MA 02173

Honsberger, R [1970], *Ingenuity in mathematics* Mathematical Association of America, New Mathematical Library #23, p. 75 and pp. 84-5

Leron, U [1983], Structuring mathematical proofs *American Mathematical Monthly*, Vol 90, No 3, pp 174-185.

Manin, Yuri I [1977], *A course in mathematical logic*, Translated from Russian by Neal Koblitz Graduate Texts in Mathematics #53, Springer-Verlag New York Inc

Mason, John, with Leone Burton & Kaye Stacy, [1985], *Thinking Mathematically* Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, England

Movshovitz-Hadar, N School mathematics theorems — an endless source of surprise (accepted for publication).

Pimm, D [1983], against generalisation. mathematics, students, and ulterior motives In R. Hershkowitz (ed) *PME proceedings of the 7th international conference* Weizmann Institute, Israel.

Underhill, R.G [1986], Mathematics teacher education. a constructivist perspective. A paper presented to the discussion group on the Psychology of Training Practising Teachers of Mathematics, PME 10, London.

Zaslavsky, O , Movshovitz-Hadar, N [1986], Independent learning of College Mathematics. an inductive approach A guest editorial *Undergraduate Mathematics and its Application Journal* , Vol 7, No 4, pp 277-281

אמור מהר, מה הם כל הגורמים הראשוניים של המספר
9 412 343 607 359 262 946 971 172 136 294 514 357 528
981 378 983 082 541 347 532 211 942 640 121 301 590
.698 634 098 611 468 911 681

שאלה פשוטה לכאורה, אך מי שינסה להשיב עליה ״מהר״, ייכשל מתברר, שלמספר הענקי שני גורמים ראשוניים בלבד ואף הם, כמובן, מספרים גדולים מאד (אחד מהם בן 41 ספרות והאחר — 60 ספרות) אם יתבצע הפירוק בעזרת המחשב המהיר ביותר שנבנה עד כה, הקרוי מחשב־על, הוא יימשך כחודשיים המספר עלה לכותרות בזכות העובדה, שלאחרונה נמצאה דרך לזרז את פירוקו איש מחשבים מארה״ב פיתח אלגוריתם מורכב, המאפשר את ביצוע הפעולות הנדרשות בעזרת 50 מחשבים קטנים העובדים במקביל כתוצאה מן הרעיון המקורי התקצר התהליך כולו ל־26 ימים. ההישג הוא מרשים, אך לא די בו כדי לספק את אלה המחפשים מפתח למידע מסווג, המוצפן במחשב בעזרת מספרים קשים לפירוק