על תופעות מספריות
ונוסחאות הכפל המקוצר

הערות ופתרונות למורה
כתה ט

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.

על תופעות מספריות ונוסחאות הכפל המקוצר

למורה

הפעילות שלפנינו מתרגלת ומחזקת את השימוש בנוסחאות הכפל המקוצר, תוך כדי התבוננות בתופעות מספריות יפות שהפענוח שלהן הוא בהישג ידם של תלמידים בכתה ט'.

בלימודי המתמטיקה בחטיבה העליונה יש חשיבות להבחנה בתבניות חוזרות, בגורמים משותפים, באפשרויות צמצום וכו'. לעתים ההבנה באפשרויות צמצום יכולה להפוך תרגיל ארוך ומיגע לתרגיל פשוט.

בכתה יוד, כשעוסקים בחקירת פונקציה רציונלית, צמצום שברים לעתים מגלה שהפונקציה שבידינו היא פשוטה יותר לגזירה, ולפעמים אף תתגלה לנו פונקציה מוכרת שאת תאורה הגרפי נוכל למצוא באמצעות שיקולים איכותניים. בהמשך, בפרק הפונקציות הטריגונומטריות, שילוב של פירוק לגורמים וזיהוי קשרים בין פונקציות טריגונומטריות יכול לפשט תרגילים באופן דרמטי. השימוש בנוסחאות הכפל המקוצר מסייע גם בפתרון תרגילים שונים בסדרות.

לצד כל אלה הפעילות מדגישה את כוחה של האלגברה ככלי להוכחה.

חשיבות גדולה יש גם לזיהוי השימוש בנוסחאות הכפל גם כשהן מופיעות בצורה סמוייה.

למשל, בתרגיל הראשון הקשר $5^2 = 4^2 + 4 + 5$

או בביטוי האלגברי $(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$

דורש מהתלמידים להבחין שהביטוי $a^2 + a + (a+1)$ שווה לביטוי המוכר: $a^2 + 2a + 1$.

כדי שהתלמידים יצליחו להתמודד עם התרגילים בעצמם, מופיעים לאורך כל הפעילות רמזים להשתמש בנוסחאות הכפל המקוצר. לעתים הרמז לא מופיע בסעיף הראשון, כדי לאפשר לפחות לחלק מהתלמידים לפענח בעצמם את הקשרים החבויים בתרגיל. חשוב לעודד את התלמידים להתייחס לרמזים המופיעים בהמשך התרגיל.

בנוסף, בסוף הקובץ, ניתן לראות שני תרגילים בנושא סדרות, מתוך בחינות בגרות ברמת 5 יחידות, שבהן זיהוי היכולת לפשט את הביטוי באמצעות הנוסחה להפרש ריבועים, מוביל לקיצור דרך משמעותי בפתרון ולחיסכון של זמן רב.

חלק המשימות בפעילות זו מעובדות מתוך NRICH

הערות ופתרונות

1. מקרה או תופעה?

התופעה העולה מן הדוגמאות (שהיא בגדר השערה עד שנסביר אותה): ריבוע של מספר טבעי שווה לריבוע המספר הקטן ממנו ב- 1 פלוס הסכום של שני המספרים.

נשים לב:

$$5^2 = 4^2 + 4 + 5$$

$$6^2 = 5^2 + 5 + 6$$

$$9^2 = 8^2 + 8 + 9$$

א. בדקו את התופעה בעזרת מספרים נוספים.

למשל $11^2 = 10^2 + 10 + 11$:

ב. רשמו ביטוי אלגברי לתופעה.

$(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$

ג. הסבירו את התופעה באמצעות נוסחת כפל מקוצר.

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \ = a^2 + a + a + 1$

ד. הסבירו את התופעה גם באמצעות האיור.

נסמן את צלע הריבוע הפנימי ב- n ואת צלע הריבוע החיצוני ב- n+1

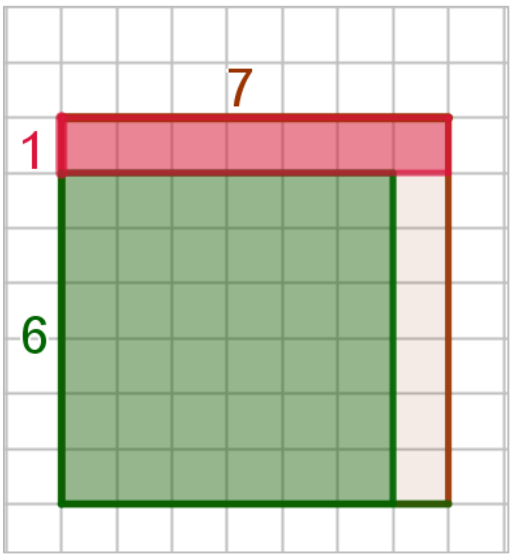
שטח הריבוע החיצוני שווה לסכום השטחים של הריבוע הפנימי ושני המלבנים המסומנים.

כיוון שרוחב המלבנים הוא יחידה אחת, סכום השטחים שווה **מספרית** לסכום אורכיהם, ומכאן :

$(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$

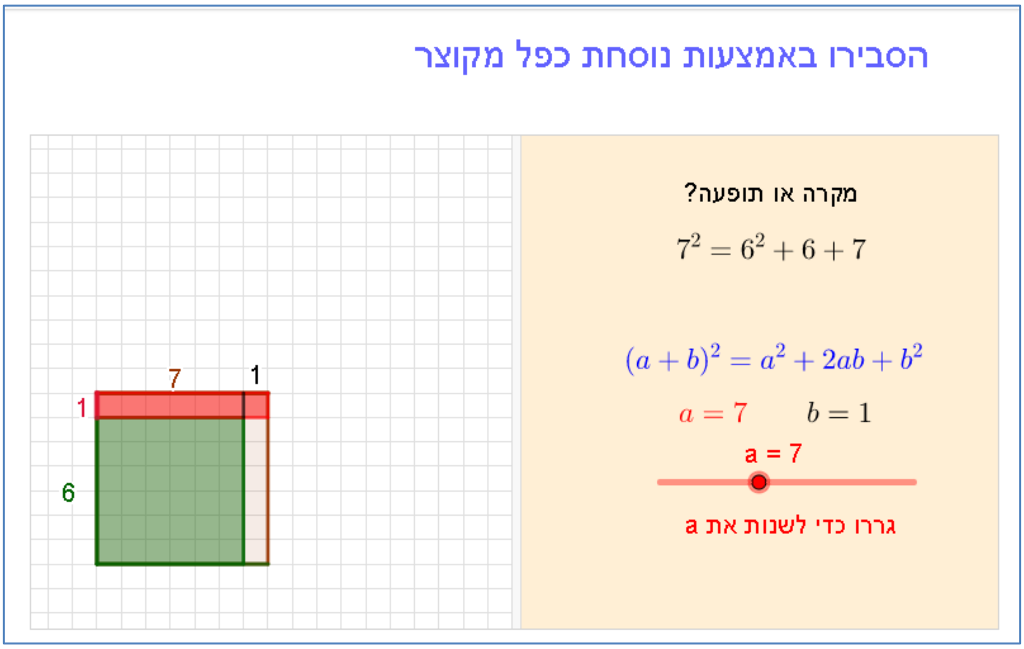
שזה בדיוק:

$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

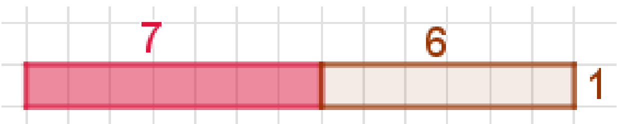


חלק מהמשימות בפעילות זו מעובדות מתוך NRICH
אפשר להיעזר ביישומון המציג דוגמאות נוספות של התופעה.
תוכלו להגיע אל היישומון גם באמצעות הקלדה "על תופעות מספריות ונוסחאות הכפל המקוצר" באתר GeoGebra או באמצעות סריקת הברקוד.

נתבונן במסך היישומון:
גרירת הנקודה על גבי סרגל הגרירה משנה את הערך של a - צלע הריבוע החיצוני.
אורך הצלע של הריבוע הפנימי, הירוק, קטן ב- 1 מאורך צלע הריבוע החיצוני.
כך מתקבלות דוגמאות נוספות לתופעה שהוסברה בסעיף הקודם.



דרך נוספת להסביר את התופעה בעזרת היישומון, היא באמצעות הנוסחה של הפרש ריבועים: ההפרש בין הריבוע החיצוני לבין הריבוע הפנימי (הירוק) שווה לשטח המלבן המופיע למטה, והמורכב משני המלבנים שלצד הריבוע הפנימי. צלע אחת של המלבן שווה לסכום הצלעות של שני הריבועים, בדוגמה 7+6, והצלע השנייה שווה ל- 1.



לפניכם קישור ליישומון הדגמה המציג גם את ההסבר באמצעות הפרש ריבועים.

2.הפרשים מאולפים

זיו שיחק במחשבון ושם לב לכמה תוצאות מפתיעות:

i. $55^2-45^2=1000$

ii. $105^2-95^2=2000$

iii. $85^2-65^2=3000$

א. הסבירו מדוע קיבלנו בשלושת המקרים כפולה של 1000.

$$55^2-45^2=(55+45)(55-45)=100\cdot 10=1000$$

$$105^2-95^2=(105+95)(105-95)=200\cdot 10=2000$$

$$85^2-65^2=(85+65)(85-65)=150\cdot 20=3000$$

ב. כיצד קשורות תוצאות התרגילים בסעיף הקודם לנוסחה: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$?

בכל המקרים **נבחרו זוגות מספרים** שמכפלת הסכום שלהם בהפרש שלהם היא כפולה שלמה של 1000.

בשני המקרים הראשונים בחרנו זוג מספרים שסכומם כפולה של 100 והפרשם כפולה של 10, התוצאה היא כפולה של 1000.

נשים לב שבניגוד לתופעה שגילינו בתרגיל 1, המתקיימת לכל בחירה של מספרים עוקבים, הפעם התוצאה קשורה למספרים שבחרנו.

ג. מצאו זוגות נוספים של מספרים דו-ספרתיים שהפרש ריבועיהם הוא כפולה של 1000.

נוכל ליצור את המכפלה 4000 כ- $400\cdot 10$:

$$205^2-195^2=(205+195)(205-195)=400\cdot 10=4000$$

יכולנו להגיע אל המספרים 195 ו- 205 באמצעות ניסוי וטעייה או לפתור משוואה:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x-y=10 \end{cases}$$

$$2x=410$$

$$x=205$$

$$y=195$$

נוכל גם לצאת מהמכפלה $80\cdot 50=4000$:

$$65^2-15^2=(65+15)(65-15)=80\cdot 50=4000$$

למעוניינים במשימת חקר: נוכל לחפש את כל הזוגות של מספרים טבעיים שהפרש ריבועיהם 4000.

נחפש פירוקים שונים של 4000 לשני גורמים. $4000=2^5\cdot 5^3$

לכן:

$$4000=4000\cdot 1=2000\cdot 2=1000\cdot 4=800\cdot 5=400\cdot 10=$$
$$=200\cdot 20=160\cdot 25=125\cdot 32=100\cdot 40=80\cdot 50$$

כיוון שאנחנו מחפשים מספרים שלמים, רק מכפלות של שני מספרים זוגיים רלוונטיות.

בדרך זו נקבל שני זוגות נוספים שאינם מסתיימים ב- 5:

$70^2 - 30^2 = 4000$;$110^2 - 90^2 = 4000$

3. ספרות חוזרות

התבוננו בהפרשים הבאים:

i. $56^2 - 45^2 = 1111$

ii. $78^2 - 23^2 = 5555$

א. הסבירו את התופעה. (רמז: $1111 = 101 \cdot 11$, $3333 = 101 \cdot 33$)

$56^2 - 45^2 = (56+45)(56-45) = 101 \cdot 11 = 1111$

$78^2 - 23^2 = (78+23)(78-23) = 101 \cdot 55 = 5555$

ב. מצאו זוגות נוספים של מספרים דו-ספרתיים שהפרש ריבועיהם הוא מספר שכל ספרותיו שוות.

$67^2 - 34^2 = (67+34)(67-34) = 101 \cdot 33 = 3333$

הפתרון:

נחפש שני מספרים שסכומם 101 והפרשם 33:

$$\begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 33 \end{cases}$$

$2x = 134$

$x = 67$

$y = 34$

הערה:

לא נוכל לעשות זאת עם כל מספר המורכב מ- 4 ספרות שוות

את 2222 נוכל לכתוב כ- $101 \cdot 22$ או כ- $202 \cdot 11$. אבל בשני המקרים לא נוכל למצוא זוג מספרים **שלמים** המקיימים:

$$\begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 22 \end{cases}$$

או

$$\begin{cases} x + y = 202 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

4. חמסה חמסה

א. $15^2 = 225$ $35^2 = 1225$ $95^2 = 9025$ $175^2 = 30625$

ב. הסבירו באמצעות נוסחת כפל מקוצר מדוע כל הריבועים של מספרים המסתיימים ב- 5 מסתיימים ב- 25.

כל מספר המסתיים ב- 5 ניתן לרשום כ- $10x+5$ כאשר x מספר טבעי.

ריבוע המספר: $(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100(x^2+x) + 25$

5. שווה זהב

סוחר עשיר אסף מטבעות זהב. יום אחד נשאל "כמה מטבעות זהב יש לך?". הסוחר הסס לרגע וענה ברמיזה:

"אם אחלק את מטבעותיי לשני חלקים אז ההפרש ביניהם יהיה קטן פי 77 מהפרש הריבועים שלהם".

כמה מטבעות זהב לסוחר? 77.

נסמן את הגדול בין שני החלקים ב- g ואת החלק הקטן של המטבעות ב- k.

סכום המטבעות: $g+k$, הפרשם: $g-k$, הפרש הריבועים: g^2-k^2.

לדברי הסוחר: $\frac{g^2-k^2}{g-k} = 77$

אבל:

$$\frac{g^2-k^2}{g-k} = \frac{(g+k)(g-k)}{g-k} = g+k$$

וזהו סכום המטבעות: לסוחר 77 מטבעות.

6. חשבו ללא מחשבון

א.

$$33333333 \times 33333333 - 33333332 \times 33333334 =$$

$$= 33333333^2 - (33333333-1)(33333333+1) =$$

$$= 33333333^2 - (33333333^2 - 1) = 1$$

ב. $\frac{(5^{81})^2-(5^{79})^2}{(5^{80})^2-(5^{78})^2} = \frac{(5^{79})^2((5^2)^2-1)}{(5^{78})^2((5^2)^2-1)} = 5^2 = 25$

כדי להימנע מהוצאת גורם משותף עם חזקה כפולה נוח לפרק:

$$\frac{(5^{81})^2-(5^{79})^2}{(5^{80})^2-(5^{78})^2} = \frac{(5^{81}+5^{79})(5^{81}-5^{79})}{(5^{80}+5^{78})(5^{80}-5^{78})} =$$

$$= \frac{5^{79}(5^2+1)\cdot 5^{79}(5^2-1)}{5^{78}(5^2+1)\cdot 5^{78}(5^2-1)} = 25$$

ג. $\frac{1.8\cdot0.2+0.8\cdot1.8}{1.3^2-0.5^2} = \frac{1.8(0.2+0.8)}{(1.3+0.5)(1.3-0.5)} = \frac{1.8\cdot1}{1.8\cdot0.8} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$

נספח: דוגמאות לשאלות מתכנית הלימודים של כתה יוד ברמת 5 יח"ל העושות שימוש בטכניקות המודגשות בפעילות

שתי הדוגמאות הבאות מדגימות קיצור משמעותי של הפתרון באמצעות הנוסחה להפרש ריבועים.

חלק משאלה מתוך בגרות 5 יחידות שאלון ראשון מועד ב תשע"ד

2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ldots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, $a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_{n+2}$, מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n.

מתוך בגרות 5 יחידות שאלון ראשון קיץ תשע"ז

2. נתונה הסדרה $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

b_n ו־ c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}\ ,\ b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n.

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n.

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב־ A_n,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב־ B_n,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב־ C_n.

ב. הראה ש־ $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי־שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?