ריבוע - קסם - לא - רגיל - בעיית החודש מס' 33

הוכן ע"י: **"קשר חם"**, המרכז הארצי ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי, שנה"ל תשנ"ז.

תקציר: בחומר עוסקים בריבוע קסם רגיל (ריבוע המורכב ממשבצות ובהם מספרים כך שהסכום בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון יהיה אותו הסכום) ובבניית ריבוע קסם לא רגיל (ריבוע המורכב ממשבצות ובהם מספרים כך שהסכום בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון יהיה סכום שונה). מצורף פתרון מפורט לבעיה.

מילות מפתח: חידה, חידות, ריבוע קסם רגיל, ריבוע קסם לא רגיל, פעולות חשבון, סכום, חיבור, מספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים מכוונים.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

ריבוע - קסם - לא - רגיל

בריבוע-קסם-רגיל בן תשע משבצות 3×3, רושמים כל אחד מהמספרים הטבעיים $1, 2, \ldots, 9$ באחת מתשע המשבצות כך שסכום המספרים בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון יהיה **אותו** סכום.

בריבוע-קסם-לא-רגיל 3×3, רושמים כל אחד מאותם תשעה מספרים באחת המשבצות כך שבכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון יתקבל **סכום שונה**.

נא לשים לב:

* הן בריבוע-קסם-רגיל והן בריבוע-קסם-לא-רגיל, רושמים כל אחד מהמספרים פעם אחת בדיוק.
* באופן דומה, ניתן להגדיר ריבוע-קסם-רגיל וריבוע-קסם-לא-רגיל, עם מספר משבצות גדול יותר.

1. האם ניתן לשנות ריבוע-קסם-רגיל 3×3, לריבוע-קסם-לא-רגיל?
   אם כן – כיצד? אם לא – מדוע?

2. האם ניתן לבנות ריבוע-קסם-לא-רגיל 4×4 תוך שימוש במספרים הטבעיים $1, 2, 3, \ldots, 15, 16$?

3. האם ניתן לבנות ריבוע-קסם-לא-רגיל 5×5 תוך שימוש במספרים הטבעיים $1, 2, \ldots, 24, 25$? אם כן – כיצד? אם לא – מדוע?

4. בריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל, רושמים בכל משבצת אחד מהמספרים $-1, 0, 1$ (לכן יש הכרח לרשום אותו המספר בכמה משבצות), כך שסכום המספרים בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון יהיה **שונה**.
   א. האם ניתן לבנות ריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל 3×3? אם כן – כיצד?
   האם לא – מדוע?
   ב. n מייצג מספר טבעי.
   האם ניתן לבנות ריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל $n\times n$? אם כן – כיצד?
   אם לא – מדוע?

ריבוע-קסם-לא-רגיל - פתרון

1. מהמספרים 9 , ... ,2 , 1 ניתן לבנות:
ריבוע-קסם-רגיל 3×3
בו "הסכום הקסום" הוא 15.
(לא יתכן סכום אחר – מדוע?)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

ריבוע-קסם-לא-רגיל 3×3

1	2	3
9	5	6
8	7	4

2. מהמספרים 16 , ... , 3 , 2 , 1 ניתן לבנות:
ריבוע-קסם-רגיל 4×4
בו "הסכום הקסום" הוא 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ריבוע-קסם-לא-רגיל 4×4

1	2	3	4
5	6	7	8
10	9	11	12
13	14	15	16

3. מהמספרים 1, 2, 3,..., 25 ניתן לבנות:
ריבוע-קסם-רגיל 5×5
בו "הסכום הקסום" הוא 65.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

ריבוע-קסם-לא-רגיל 5×5

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	15	14	13
17	16	18	19	20
21	22	23	24	25

4. א. בריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל 3×3 יש צורך בשמונה סכומים שונים: שלוש שורות, שלשה טורים ושני אלכסונים.
אולם מהמספרים 1 ,0 ,1- ניתן לקבל רק את שבעה הסכומים השונים הבאים:

(1) $(-1)+(-1)+(-1)=(-3)$

(2) $(-1)+(-1)+0=(-2)$

(3) $(-1)+0+0=(-1)$

(4) $(-1)+0+1=0$

(5) $0+0+1=1$

(6) $0+1+1=2$

(7) $1+1+1=3$

לכן לפי עקרון דריכלה(*) **לא** ניתן לבנות ריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל 3×3.

ב. בריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל $n\times n$ יש צורך ב- $2n+2$ סכומים שונים: n שורות, n עמודות ושני אלכסונים.
אולם מהמספרים 1 ,0 ,1- אפשר לבנות רק $2n+1$ סכומים שונים (שכל אחד מהם בן n מחוברים):

$$\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)+(-1)}_{\text{פעמים } n}=-n$$

$$\underbrace{(-1)+(-1)+\ldots+(-1)+(-1)}_{\text{פעמים } n-1}+0=-n+1$$

$$\vdots$$

$$0+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{פעמים } n-1}=n-1$$

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{פעמים } n}=n$$

לכן, לפי עקרון דיריכלה(*) **לא** ניתן לבנות ריבוע-קסם-מאוד-לא-רגיל $n\times n$.

(*) עקרון דיריכלה: כאשר מכניסים תשעה חפצים לשמונה תאים, לפחות בתא אחד יש שני חפצים או יותר.