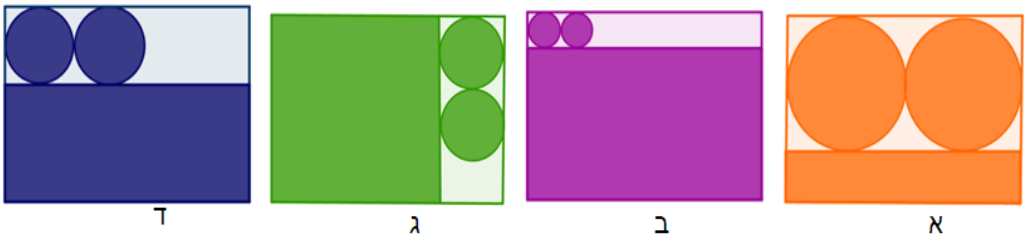
יום פאי שמח - פתרונות

2. מיכל הממתקים.



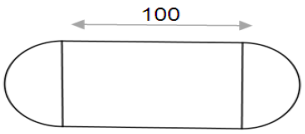
א. נתבונן בפריסה א':
נזכיר שמימדי הבריסטול הם 70×50 , אם כך רדיוס של העיגולים הוא: $r = 70:4 = 17.5$.
אורך היקף העיגול חייב לקיים: $2\pi r \le 70$, נציב $r = 17.5$, נקבל: $2\pi \cdot 17.5 \le 70 \Leftarrow \pi \le 2$.
לכן, המסקנה: מפריסה א' לא ניתן לבנות גליל.
נתבונן בשתי הפריסות ב' ו- ד':
חייב להתקיים: $2\pi r \le 70$, מכאן: $r \le 11.14$ ולפי העיגולים שבשרטוטים ב' ו-ד' ניתן לראות ש- $r < 17.5$, לכן, המסקנה: מפריסות ב' ו-ד' ניתן לבנות גליל.
נשארה פריסה ג'. לגבי העיגולים מתקיים: $4r < 50 \Rightarrow r < 12.5$
לגבי המעטפת קיימות שתי אפשרויות:
או $2\pi r \le 50 \Rightarrow r \le \frac{50}{2\pi} = 7.96$ (2). בשני המקרים מתקיים $r < 12.5$.
המסקנה היא: גם מפריסה ג' ניתן לבנות מלבן.

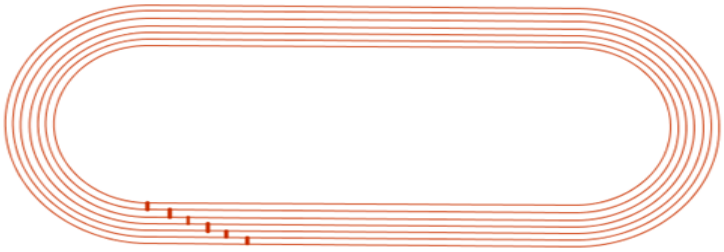
ב. כן ניתן לבנות גליל שבו גובה שווה להיקף העיגול. נתבונן בפריסה ג' . ניקח $2\pi r = h = 50$.
מכאן $r = 7.96$. לשני העיגולים נשארה רצועה ברוחב של 20. יש מספיק מקום לעיגול, כלומר $2r = 2 \cdot 7.96 = 15.92 < 20$.

ג. מהו הגליל בעל נפח הגדול ביותר? ברור שאם בוחרים בין שתי הפריסות ב' ו-ד', יש לבחור בפריסה ד'. נוסחת נפח הגליל היא: $V = \pi r^2 h$. לרדיוס גדול יותר נקבל נפח גדול יותר. ניקח, לדוגמה $r = 11.14$ (ראה סעיף א'), אז הגובה: $h = 50 - 2 \cdot 11.14 = 27.72$
והנפח: 10807 יחידות נפח. אם , לדוגמה $r = 8$ ו- $h = 34$ (ראה פריסה ב'), נפח הגליל יהיה :6836 יחידות נפח.
אפשר בהחלט לבצע חקירה בעזרת חשבון דיפרנציאלי. נרשום פונקצית נפח הגליל כפונקציה של רדיוס הבסיס: $y = \pi r^2 (50 - 2r)$ כאשר $r \le 11.14$.
נגזרת הפונקציה: $y' = 2\pi r(50 - 3r)$. לפונקציה מקסימום עבור $r = 16.67$ שלא מקיים את התנאי: $r \le 11.14$. לכן , הגליל בעל נפח הגדול ביותר, בין שתי הפריסות ב' ו-ד',הוא זה שיותר קרוב לפריסה ד'. הנפח המקסימלי: 10807 יחידות נפח.
כעת נפנה לפריסה ג'. נניח שגובהו הגליל שווה להיקף בסיסו. רדיוס העיגול $r = 7.96$ (כאה סעיף ב') ונפחו הגליל: $V = \pi(7.96)^2 \cdot 50 = 9952.8$.
המסקנה: על מנת שמיכל יכול כמה שיותר ממתקים יש לבנות אותו מפריסה ד'!

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

3. מרוץ הפאי





א. אורך כל אחת משתי הקשתות , הוא 100 מטר . רדיוס של קשת שהיא חצי מעגל $r=\frac{100}{\pi}$. אם אורך המלבן 100, אז אורכו המגרש $100+2r=100+\frac{200}{\pi}=163.67$ ורוחבו $2r=63.67$. לכן, מימדי המגרש הם: 163.67 על 63.67 מטרים.

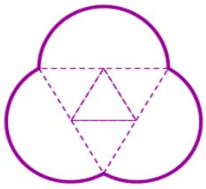
ב. אורך המסלול החיצוני 400 מטר. נחשב אורך המסלול הפנימי. הקטע הישר של המסלולים אינו משתנה ונשאר 100 מטר. אורך חצי המעגלים מתקצר ממסלול למסלול. רדיוס של חצי מעגל הפנימי שווה ל- $r-5$. אורך המסלול הפנימי:

$$2\left[\pi\left(r-5\right)+100\right]=2\left[\pi\left(\frac{100}{\pi}-5\right)+100\right]=400-10\pi=368.58$$

ג. ההפרש בין אורכי המסלולים הוא 10π, לכן נקודת הזינוק של רוני נמצאת ב- $10\pi=31.42$ מטרים קדימה לעומת נקודת הזינוק של ירדן.

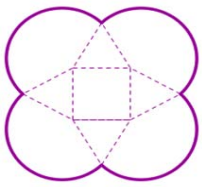
4. פרחי הפאי

א. פרח בעל שלושה עלי כותרת



כל עלה כותרת הוא חצי מעגל (הזווית המרכזית היא 180 מעלות) הבנוי על קוטר שאורכו 2. היקף הפרח: 3π.

ב. פרח בעל ארבעה עלי כותרת



הזווית המרכזית של כל עלה כותרת שווה ל-

$360°-\left(60°+90°+60°\right)=150°$ או ברדיאנים $\frac{5\pi}{6}$.

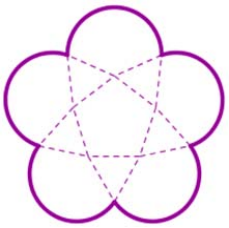
אורך צלע הריבוע הוא 1, מכאן, רדיוס הקשת גם הוא 1.

אורך הקשת שווה למכפלה של זווית מרכזית (ברדיאנים) ברדיוס, כלומר $\frac{5\pi}{6}$.

היקף הפרח: $4\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{10\pi}{3}$

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

ג. פרח בעל חמישה עלי כותרת



הזווית הפנימית במחומש שווה ל-$108°$.
הזווית המרכזית של כל עלה כותרת שווה ל-

$360°-\left(60°+108°+60°\right)=132°$ או ברדיאנים $\frac{11\pi}{15}$.

אורך צלע המחומש הוא 1, מכאן, רדיוס הקשת גם הוא 1.

אורך הקשת שווה למכפלה של זווית מרכזית (ברדיאנים) ברדיוס, כלומר $\frac{11\pi}{15}$.

היקף הפרח: $5\cdot\frac{11\pi}{15}=\frac{11\pi}{3}$

ד. פרח בעל שישה עלי כותרת

הזווית הפנימית במשושה שווה ל-$120°$.
הזווית המרכזית של כל עלה כותרת שווה ל-

$360°-\left(60°+120°+60°\right)=120°$ או ברדיאנים $\frac{2\pi}{3}$. היקף הפרח: $6\cdot\frac{2\pi}{3}=4\pi$

ה. פרח בעל n עלי כותרת

הזווית הפנימית במצולע בעל n צלעות שווה ל-$180°-\frac{360°}{n}$.

הזווית המרכזית של כל עלה כותרת שווה ל-

$$360°-\left[\left(180°-\frac{360°}{n}\right)+60°+60°\right]=60°+\frac{360°}{n}=60°\left(1+\frac{6}{n}\right)$$

או ברדיאנים $\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{6}{n}\right)$.

היקף הפרח: $n\cdot\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{6}{n}\right)=\pi\left(\frac{n}{3}+2\right)$

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -– הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8288073
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il