זהויות טריגונומטריות בשילוב גישת "מה אם לא...?"

השיעור מתוכנן לתלמידי חמש יחידות לימוד, בדרך כלל בכתה י"א ובשינויים קלים ניתן ללמד אותו גם לתלמידי 4 יחידות לימוד.

הזמן הדרוש: שיעור כפול (כשעה וחצי)

מטרות:

התלמידים יפתחו חלק ניכר מן הנוסחאות הטריגונומטריות הדרושות להם תוך למידה פעילה.

בנוסף להכרה של הזהות הטריגונומטרית, תשומת הלב מופנית גם לעובדה **שלא מתקיימת התכונה** $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$.

מבנה השיעור:

א. העמדת השאלה "האם $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$?" לדיון כיתתי.

ב. הוכחת הנוסחה $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ בעבודה עצמית מודרכת. שלב זה כולל את הוכחת משפט תלמי (Ptolemy) כמשפט עזר. הבחירה להתבסס על משפט זה נעשתה תוך מחשבה שבדרך זו המעבר להוכחת הנוסחה **להפרש זוויות** הוא פשוט יותר מאשר בדרכים המצויות בספרי הלימוד. **ניתן ללמד את משפט תלמי מראש כשלומדים דמיון משולשים, או במיוחד לקראת הפעילות הנוכחית.**

ג. הוכחת זהויות נוספות בעקבות העלאת שאלות בגישת "מה אם לא...?"

<u>חלק א'</u>

השיעור נפתח בשאלה:

האם נכון ש...

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta \quad ???$$

תמיד? לפעמים? אף פעם לא?

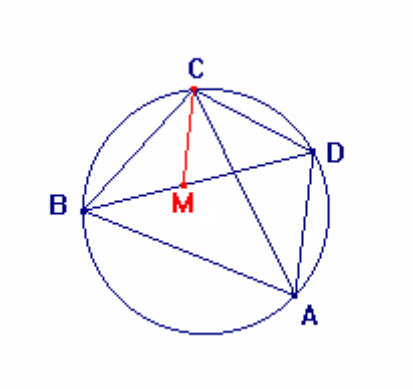
<u>חלק ב'</u>

לאחר דיון קצר עוברים להוכחת משפט תלמי, ולהוכחת הנוסחה:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

בעזרת ההדרכה שבדפים הבאים:

משפט תלמי (85-165 בערך)

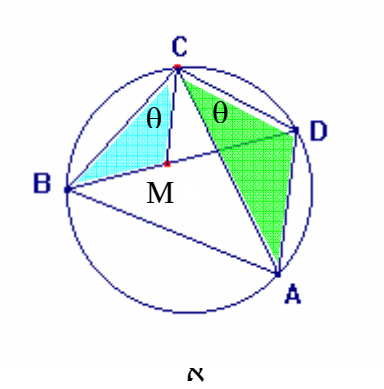


אם ABCD מרובע חסום במעגל אז

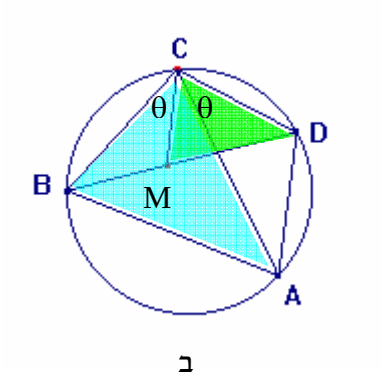
$$AB\cdot CD+CB\cdot AD=AC\cdot BD$$

הוכחה למשפט מסתתרת בשרטוט שלפניכם

להוכחת המשפט נוסיף בשרטוט נקודה M כך ש- $\angle BCM=\angle ACD$ וקטע CM.



א

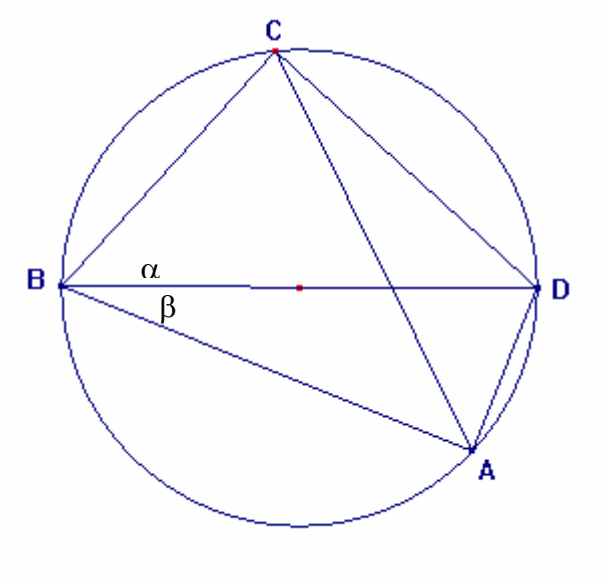


ב

נתבונן בשרטוט א':	נתבונן בשרטוט ב':
הוכיחו כי $\Delta CBM\sim\Delta CAD$	הוכיחו כי $\Delta CAB\sim\Delta CDM$
הסיקו:	הסיקו:
$BC\cdot AD=$	$AB\cdot CD=$
קיבלנו:	
$=AC\cdot BD$	$AB\cdot CD+BC\cdot AD=$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

בשרטוט שלפניכם המרובע ABCD חסום במעגל. האלכסון DB הוא קוטר של המעגל. אורך הקוטר יחידה אחת. מצאו בשרטוט קטע ששווה ל- $\sin(\alpha+\beta)$, ובטאו את $\sin(\alpha+\beta)$ באמצעות הסינוס והקוסינוס של α ושל β.



$$\sin(\alpha + \beta) = _____$$

<u>חלק ג': גילוי זהויות טריגונומטריות נוספות בגישת "מה אם לא?..."</u>

גישת "מה אם לא ...?" מציעה דרך מובנית להעמדת שאלות שמתקשרות לרעיון או למשפט מתמטי בו דנים. החקירה מתפתחת בשלבים:

<u>שלב א'</u>: נתבונן בזהות שזה עתה הוכחה, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ ונמנה תכונות שלה:

1. מדובר בפונקציה הסינוס.
2. הזהות עוסקת בסינוס של סכום
3. מדובר בסכום של שתי זוויות.
4. מדובר בזוויות חדות.

<u>שלב ב'</u>: נתבונן בכל אחת מן התכונות האלה ונשאל "מה אם לא...?"

מה אם לא...	**כיוונים לחקירה**
מה אם לא "**+**" ?	$\sin(\alpha-\beta)=?$
	$\sin(\alpha/\beta)=?$
	$\sin(\alpha\cdot\beta)=?$
מה אם לא **סינוס** ?	$\cos(\alpha+\beta)=?$
	$\tan(\alpha+\beta)=?$
מה אם לא "שתי זוויות"?	$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=?$
	$\sin(\alpha+\alpha)=?$
מה אם לא "זוויות חדות"	ניתן לחשוב על הרכבים רבים של צמדי זוויות.

<u>שלב ג'</u>: בחירת כיווני חקירה מתוך אלו שעלו, תוך וויתור על כיוונים אחרים.

העלאת שאלות מגוונות, בכלל זאת שאלות שאינן מתאימות לחקירה יכולה לחדד סוגיות שבדרך כלל לא מייחסים אליהן, כגון העובדה שלא הגדרנו כפל של זוויות ולכן אין טעם לחקור את הסינוס של מכפלת זוויות. זוהי הזדמנות לחזור ולהגדיר את הסכום של שתי זוויות. זו גם הזדמנות להציע לתלמידים (אם לא יציעו בעצמם) לבחון גם "שינויים משולבים" כגון $\cos(\alpha-\beta)$. בעל מנת להשיג שיעור מהנה, חשוב לא לבחור כיווני חקירה רבים מדי.

<u>שלב ד'</u>: עבודה בקבוצות.

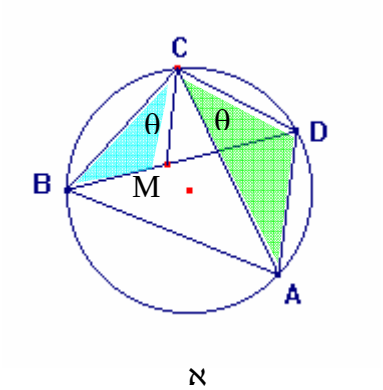
- רושמים על הלוח רשימה של זהויות טריגונומטריות אותן התלמידים יפתחו. למשל:

$\sin(\alpha-\beta)=$
$\cos(\alpha+\beta)=$
$\tan(\alpha+\beta)=$
$\cos(\alpha-\beta)=$
$\tan(\alpha-\beta)=$
$\sin(\alpha+\alpha)=$

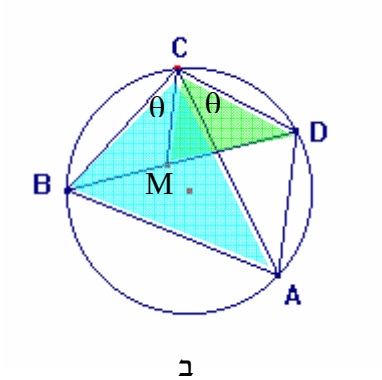
- התלמידים מנסים לפתח את הביטויים הטריגונומטריים הרשומים על הלוח, בזוגות או בקבוצות. מכוונים אותם להשתמש בזהויות כגון $\cos(\alpha+\beta)=\sin[90-(\alpha+\beta)]$ ובזהויות שהוכחו בשלב קודם).
- כאשר קבוצה מצליחה לפתח את אחד הביטויים הרשומים על הלוח היא באה ומשלימה על הלוח את אגף ימין.

<u>נספחים</u>:

א. השלמת ההוכחה של משפט תלמי:



א



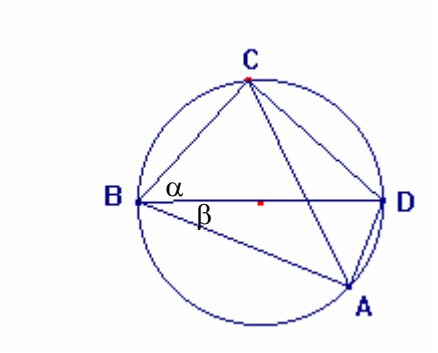
ב

נתבונן בשרטוט א':	נתבונן בשרטוט ב':
$\Delta CBM \sim \Delta CAD$ על פי:	$\Delta CAB \sim \Delta CDM$ על פי:
$\angle CAD=\angle CBM$; $\angle ACD=\angle BCM$	$\angle CDM=\angle CAB$; $\angle MCD=\angle BCA$
ולכן: $BC\cdot AD=AC\cdot BM$	ולכן: $AB\cdot CD=MD\cdot AC$
קיבלנו: $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BM+AC\cdot MD=AC(BM+MD)=AC\cdot BD$	

ב. הוכחת הזהות $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

על פי משפט תלמי $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

נשרטט מרובע חסום במעגל שבו **BD קוטר שאורכו יחידה אחת.**



נציב:

$$AC=\sin(\alpha+\beta)$$

$$BD=1$$

$$CD=\sin\alpha$$

$$AB=\cos\beta$$

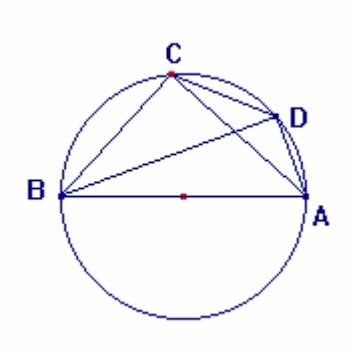
$$BC=\cos\alpha$$

$$AD=\sin\beta$$

ונקבל:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cdot 1=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

ג. בצורה דומה נוכיח את הזהות $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$



נשרטט מרובע חסום במעגל **שבו AB קוטר שאורכו יחידה אחת,**

על פי משפט תלמי $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$

הפעם נבחר $\angle ABC=\alpha$, $\angle ABD=\beta$,

נציב:

$$CD=\sin(\alpha-\beta)$$

$$AB=1$$

$$AC=\sin\alpha$$

$$BD=\cos\beta$$

$$BC=\cos\alpha$$

$$AD=\sin\beta$$

ונקבל:

$$\sin\alpha\cos\beta=1\cdot\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha$$

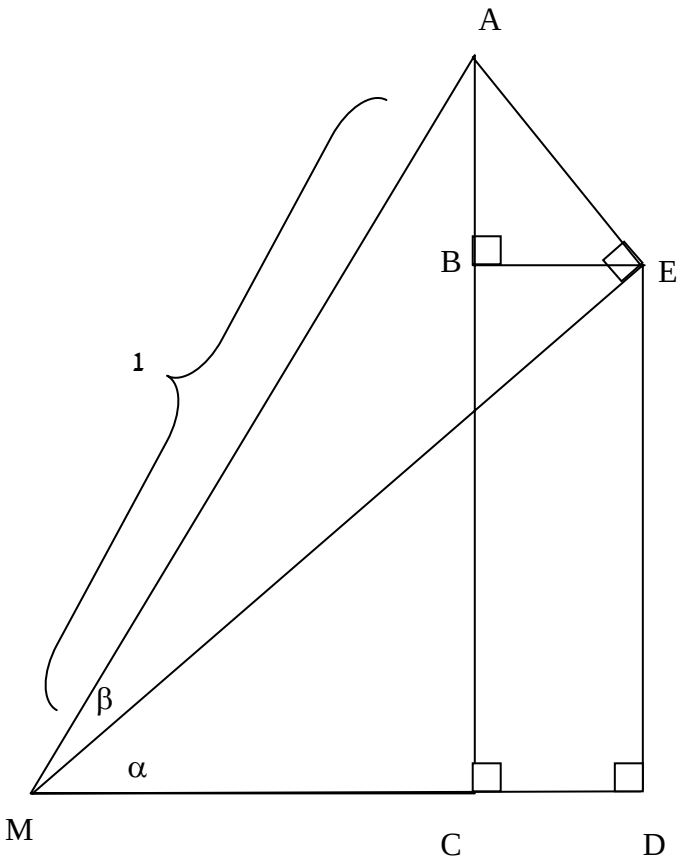
ואחרי 'העברת אגפים':

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

ד. דרך אחרת לגילוי מודרך של הזהות $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

היכן הנוסחה?

בשרטוט שלפניכם מסתתרת נוסחה $\sin(\alpha+\beta)=?$ נסו לגלות אותה.



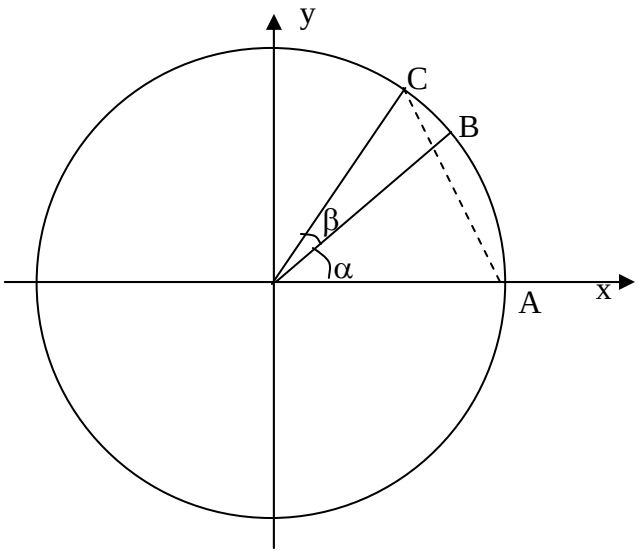
רמזים:

גלו זוויות נוספות ששוות ל- α

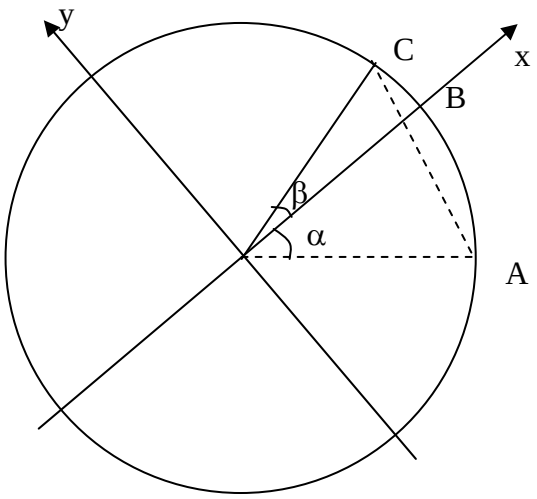
מצאו קטע השווה ל- $\sin(\alpha+\beta)=$ וחשבו את כל אחד מחלקיו.

ה. גילוי מודרך של הזהות $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=?$$



א



ב

בשני המעגלים הטריגונומריים שלפניכם מסומנות שלוש נקודות, A, B ו- C.

מיקומן של הנקודות A , B ו- C זהה בשני המעגלים

במעגל א' ציר x עובר דרך הנקודה A וציר y מאונך לו.

במעגל ב' ציר x עובר דרך הנקודה B וציר y מאונך לו.

א. האם השרטוט של מערכת צירים חדשה משפיע על המרחק שבין הנקודות בשרטוט?

ב. בכל אחד מן המעגלים בטאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C בעזרת α ו- β.

ג. בטאו את המרחק AC בכל אחד מן המעגלים.

ד. השוו בין הביטויים שמצאתם למרחק AC ומצאו ביטוי ל- $\cos(\alpha+\beta)$.

(רמז: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=?$)

$\cos(\alpha+\beta)=$ _____