

נא להכיר:

הצעת פתיחה לנושא **מספרים מרוכבים**

(הפעילות מבוססת על רעיונות של צופית הרבסט ושל חני בהלול)

מבוא:

לידתם של המספרים המרוכבים לא היתה קלה.

כאשר הופיע לראשונה, במאה ה- 16, הרעיון של שימוש בשורשים של מספרים שליליים לצורך פתרון משוואות, המתמטיקאים שיישמו טכניקות אלו לא התייחסו אל השורשים של מספרים שליליים כאל מספרים. חלפו כ- 300 שנה, עד אשר במאה ה- 19 זכו המספרים המרוכבים למעמד של מספרים בעיני קהילת המתמטיקאים.

את הקושי הכרוך בהוספת שורשים של מספרים שליליים אל תוך מערכת המספרים חווים גם התלמידים. הפעילות הבאה מפגישה את התלמידים עם המספרים המרוכבים באמצעות סיטואציה דמיונית: " 😊 טוען בעקשנות שהוא מספר שמקיים 1-=😊·😊 והוא מעוניין בקשר רציני עם מספרים ממשיים" . הסיטואציה הדמיונית מנטרלת את ההתנגדות לצרף לעולם המספרים מספר שאינו מקיים את חוקי המתמטיקה המוכרים ומאפשרת לתלמידים להתייחס לפעילות כאל תרגיל מחשבתי שבו כל הצעה מנומקת היא לגיטימית. כאשר 😊 אכן יקבל מעמד של מספר ויסומן כ- i, התלמידים כבר יכירו את חוקי הפעולות במספרים מרוכבים, ותכונות של קבוצת המספרים המרוכבים אותם יגלו תוך ניסיון לשמור על החוקים המתקיימים בקבוצת המספרים הממשיים.

מטרות הפעילות:

- ליצור סיטואציה שבה התלמידים חווים את המבוכה הקשורה בהוספת מספרים זרים ומוזרים, נוגדים את האינטואיציה ואת הכללים הידועים, אל תוך מערכת המספרים.
- לדון בהרחבה של קבוצת המספרים ובהשפעתה על קבוצת המספרים המקורית.
- לאפשר לתלמידים להגיע בעצמם לכללי 4 פעולות החשבון הבסיסיות במספרים מרוכבים, הנגזרים מהעיקרון של שמירת הכללים שמתקיימים בקבוצת המספרים הממשיים.
- להדגיש את חוקי הפעולות במספרים ממשיים.
- להדגיש את הסגירות של קבוצת המספרים המרוכבים ביחס ל- 4 פעולות החשבון הבסיסיות.

נא להכיר: 

טוען בטענות שהוא מספר שאקיים : ☺ • ☺ = -1

והוא מצוניין בקשר רציני עם מספרים מאשים.

נסו לתאר את:

1. $3 \cdot ☺ =$
2. $☺ - 0 =$
3. $☺ \cdot 1 =$
4. $☺ + ☺ =$
5. $3\,☺ + ☺ =$
6. $☺ - ☺ =$
7. $☺ + 1 =$
8. $☺^3 =$
9. $☺^4 =$
10. $(3 + ☺) \cdot (2 + 3☺) =$
11. $(3 + ☺) + (2 + 3☺) =$
12. $\frac{8}{2\,☺} =$
13. $(☺ + 1) \cdot (☺ - 1) =$
14. $(☺ + 1)^2$

נא להכיר – לתלמידים

מהלך הפעילות:

- התלמידים מקבלים את דף הפעילות.
- לאחר כ- 2 דקות, קרוב לוודאי שבעקבות שאלות של תלמידים, מקיימים דיון ראשוני **<u>קצרצר</u>**.
  - מדוע נהגנו לומר שאין שורש ריבועי למספר שלילי?

כל המספרים הממשיים, או במילים אחרות כל המספרים שעל ציר המספרים הם חיוביים, שליליים או אפס. לכן אין בקבוצת המספרים הממשיים מספר שאם נעלה אותו בריבוע התוצאה תהיה מספר שלילי.

  - מה נוכל לומר על ☺ ?

שאם הוא אכן מספר, הוא אינו יכול להיות מספר ממשי, כלומר הוא לא יכול "לגור על ציר המספרים".

  - איך נפרש את " ☺ מעוניין בקשרים רציניים עם מספרים ממשיים " ?

נחפש דרך להחיל את חוקי פעולות החשבון במספרים ממשיים על הפעולות שבין ☺ לבין מספרים ממשיים.

- עבודת זוגות/ קבוצות: התלמידים ינסו לתאר את הפעולות שבין ☺ למספרים הממשיים

על פי דף העבודה. אין צורך להיצמד לסדר התרגילים, וכדאי לציין את ההתלבטויות. לאחר פרק זמן ניתן לבחור תרגילים אחדים ולקיים דיון ביניים.

- פתרון התרגילים במליאת הכתה, ובחינת כל הצעה:
  - האם התוצאה היא מספר ממשי?
  - האם הוספנו למערכת המספרים שאנחנו פועלים בה כעת, מספרים נוספים מלבד ☺ ומספרים ממשיים?

- דיון מסכם שמדגיש:

- כל המספרים שהתקבלו כתוצאה מפעולות בין ☺ לבין מספרים מרוכבים שייכים לקבוצה $\{a+b☺\}$.
- הקבוצה $\{a+b☺\}$ סגורה לגבי 4 פעולות החשבון הבסיסיות.

- את השיעור הבא מומלץ לפתוח בסקירה היסטורית של גילוי המספרים המרוכבים. *

* לקריאה נוספת מומלץ להיעזר במקורות הבאים:

1. קוטלר, ד. (1996). *המספרים המרוכבים*. חוברת בסדרה ***לעשות מתמטיקה***. דפוס הטכניון, חיפה.
2. דוזורצ'ב, י., ויניצקי, ג., קופר, א. *תכנים הסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה*. דפוס הטכניון, חיפה.
3. ארבל, ב. (2005). *קיצור תולדות המתמטיקה*. הוצאת מכון מופ"ת, ת"א.

דיון בתרגילים

	התרגיל	פתרונות ונקודות לדיון
2	☺ - 0 =	מתוך רצון לשמור על מעמדו של האפס כאיבר ניטרלי ביחס לחיבור ולחיסור נקבע: ☺ = 0 + ☺ = ☺ - 0
3	☺ · 1 =	מתוך רצון לשמור על מעמדו של המספר 1 כאיבר ניטרלי ביחס לכפל נקבע: ☺ = ☺ ·1 = 1· ☺
6	☺ - ☺ =	מתוך רצון לשמור על הכלל על פיו ההפרש בין מספר לעצמו הוא אפס, נקבע 0 = ☺ - ☺.
1	3 · ☺ =	האם 3· ☺ יכול להיות מספר ממשי? על פי חוקי החילוף והקיבוץ 9-= (☺3)·(☺ 3). לכן לא ייתכן ש-3· ☺ מספר ממשי. נקרא למספר החדש 3☺. נדגיש כי כדי לבצע את פעולת הכפל בין ☺ ל- 3 נזקקנו למספר חדש.
4	☺ + ☺ =	התשובה האינטואיטיבית היא 2☺. זו הזדמנות לבקש ביסוס מתמטי ל- x+x=2x ולהתבסס על חוק הפילוג.
5	3 ☺ + ☺ =	התשובה 4☺ מבוססת על חוק הפילוג.

	התרגיל	פתרונות ונקודות לדיון
7	$\☺ + 1 =$	כמו במקרה 3, אין תשובה טבעית. $1 + \☺$ לא יכול להיות מספר ממשי. לו $1+\☺$ היה מספר ממשי אז גם $\☺$, אשר יכול להירשם כ- $\☺ = 1- (1+\☺)$, היה מספר ממשי, שהרי קבוצת המספרים הממשיים סגורה ביחס לפעולת החיסור. לכן כדי שנוכל לבצע פעולות חיבור וחיסור בין $\☺$ לבין מספרים ממשיים עלינו להוסיף מספרים מהצורה $a+\☺$.
8	$= \☺^3$	$\☺^3=\☺\cdot\☺\cdot\☺ = -1\cdot\☺ = - \☺$
9	$= \☺^4$	למשל: $\☺^4=(\☺\cdot\☺)\cdot(\☺\cdot\☺) = (-1)\cdot(-1) = 1$
10	$= (3 + \☺)\cdot(2 + 3\☺)$	נפעל על פי הכללים המקובלים של פתיחת סוגריים ונקבל תוצאות בהתאם. הדגש המרכזי בדיון הוא שגם הפעם התוצאה ניתנת לכתיבה בצורה $a+b\☺$ כאשר a ו- b מספרים ממשיים. במילים אחרות, קבוצת המספרים מהצורה $a+b\☺$ סגורה ביחס לפעולת הכפל .
11	$= (3+\☺)+(2 + 3\☺)$	הפעם פעולה על פי הכללים המקובלים מראה שקבוצת המספרים מהצורה $a+b\☺$ סגורה ביחס לפעולת החיבור.

	התרגיל	פתרונות ונקודות לדיון
12	$\frac{8}{2\☺} =$	התשובה האינטואיטיבית המתבקשת היא $\frac{4}{\☺}$ כיוון שאחת המטרות היא לתאר את כל התוצאות בצורה $a+b$ ☺ נבקש מהתלמידים לנסות להגיע לתשובה ללא מכנה. על ידי כפל המונה והמכנה ב- ☺ נקבל $\frac{4}{\☺} = \frac{4 \cdot \☺}{\☺ \cdot \☺} = \frac{4 \cdot \☺}{-1} = -4\☺$
13	$(\☺ - 1) \cdot (\☺ + 1) =$	נשים לב כי התשובה היא מספר ממשי: 2
14	$(\☺ + 1)^2$	$2\☺$