מצאו את ההבדלים - פתיחה לנושא קמירות וקעירות של פונקציות.

<u>מטרת הפעילות</u>:

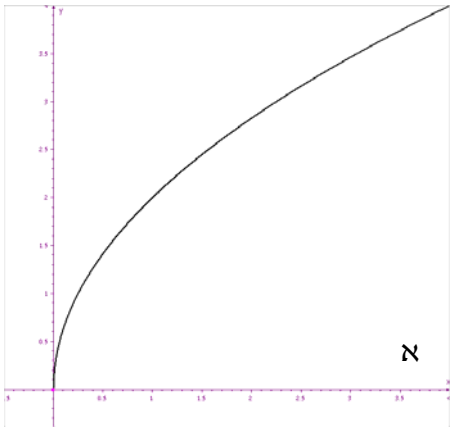
- ליצור מצב שבו התלמידים מרגישים צורך להעשיר את אוצר המילים המשמש אותם לתיאור פונקציות.
- להכיר את המושגים קמירות וקעירות. אם התלמידים אינם מכירים את מושג הנגזרת השניה ניתן להציגו במהלך הפעילות הזאת.
- להדגיש את קיומן של נקודות פיתול שבהן הנגזרת אינה מתאפסת.
- להרחיב ולהעמיק את הדיון בקשר שבין הפונקציה לנגזרת.

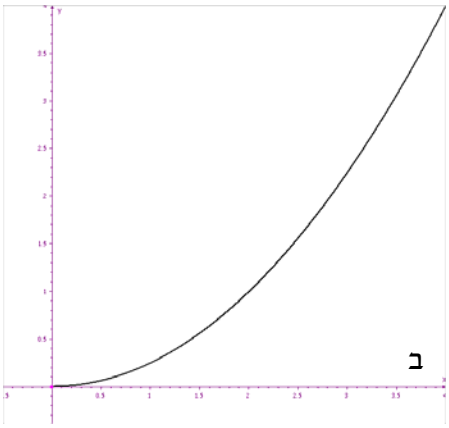
הפעילות מיועדת לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל.

הנחת העבודה היא שהתלמידים מכירים נגזרות של פונקציות טריגונומטריות.

אם התלמידים אינם מכירים נגזרות של פונקציות טריגונומטריות אפשר לדלג על הפעילות "מצאו את ההבדלים – ב' ", ולחזור אליה לאחר הוראת נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות.

מצאו את ההבדלים – א'



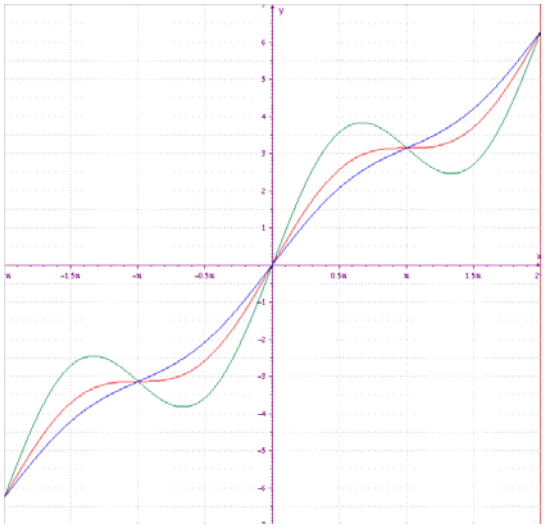


ערכו רשימה של תכונות משותפות לשתי הפונקציות המשורטטות ורשימה של הבדלים בין הפונקציות האלה

מצאו את ההבדלים – ב'

לפניכם 3 פונקציות ו- 3 גרפים:

$$f(x) = \sin x + x$$
$$g(x) = 2\sin x + x$$
$$h(x) = 0.5\sin x + x$$



א. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.

ב. האם צורת הגרף של אחת מן הפונקציות הפתיעה אתכם? אם כן – נסו לתאר מדוע.

ג. ערכו רשימה של תכונות משותפות ל- 3 הפונקציות ורשימה של הבדלים ביניהן.

מצאו את ההבדלים – ג'

נתונות 3 פונקציות:

$$k(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$$
$$l(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$
$$m(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$$

1. **לכל אחת מן הפונקציות:**

   א. מצאו תחומי עליה וירידה.

   ב. שרטטו את גרף הפונקציה באופן סכמתי.

2. **מה לפי דעתכם נועדו 3 הפונקציות האלו להדגים?**

3. **תנו "שם משפחה" ל- 3 הפונקציות.**

4. **(אתגר) נסו למצוא במשפחת הפונקציות שרשמתם 3 פונקציות אחרות שמדגימות את מה שהדגימו הפונקציות הנתונות.**

מצאו את ההבדלים - הערות, הארות והצעות למהלך העבודה

מצאו את ההבדלים - א'

המשימה מבליטה את ההבדל בין סוגי העקמומיות של פונקציות.

כאשר משתמשים באוצר המילים הנוכחי של התלמידים קל יותר לבטא את התכונות המשותפות של הפונקציות מאשר את ההבדלים ביניהן. מכאן עולה הצורך במושגים קמירות, קעירות ונקודת פיתול.

<u>הצעה למהלך הפעילות:</u>

- מחלקים לתלמידים את דף הפעילות "מצאו את ההבדלים (א)".
- משרטטים את שתי הפונקציות בפינת הלוח, במקום שמאפשר להשאיר אותן על הלוח בסיום הדיון, במטרה להתייחס אליהן שוב בעת הדיון בפעילות הבאה.
- התלמידים מתבקשים לערוך **לעצמם**, במשך כ- 3 דקות, רשימה של תכונות משותפות לשתי הפונקציות ורשימה של הבדלים בין הפונקציות.
- עורכים על הלוח את הרשימה. אם התלמידים אינם מתייחסים לנגזרות של שתי הפונקציות מעודדים אותם לכך.

<u>תכונות משותפות שתלמידים מעלים:</u>

תחום, קבוצת תמונות, הפונקציות חיוביות, הפונקציות עולות (הנגזרות חיוביות), אין נקודות קיצון, אין תמונה שמתאימה ליותר ממקור אחד.

<u>הבדלים שתלמידים מעלים:</u>

אם נעביר קו בין קצות התחום, בפונקציה א' הוא יהיה מתחת לגרף ובפונקציה ב' מעל הגרף; השיפועים של פונקציה א' הולכים וקטנים לעומת השיפועים של פונקציה ב' שהולכים וגדלים (הנגזרת של פונקציה א' היא פונקציה יורדת לעומת הנגזרת של פונקציה ב' שהיא פונקציה עולה). המשיקים של פונקציה א' נמצאים מעל הגרף לעומת המשיקים של פונקציה ב' שנמצאים מתחת לגרף.

בשלב זה ניתן להגדיר את המושגים קמירות, קעירות ונקודת פיתול, או לחכות ולהביא את ההגדרות לאחר פעילות נוספת שמחדדת את הצורך בהרחבת אוצר המילים.

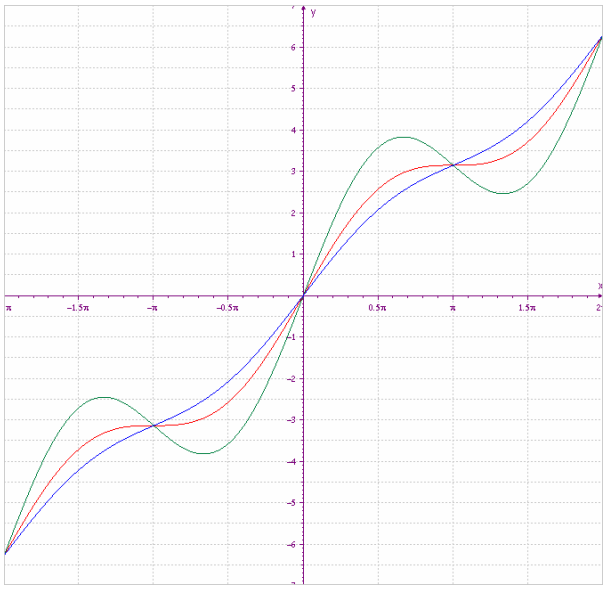
מצאו את ההבדלים - ב'

- על הפונקציות:

לפונקציה $g(x)=2\sin x+x$ יש נקודות מקסימום כאשר $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ונקודות מינימום כאשר $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

נגזרת הפונקציה $f(x)=\sin x+x$ מתאפסת כאשר $x=k\pi$, אולם כל הנקודות האלה הן נקודות פיתול תוך כדי עליה.

נגזרת הפונקציה $h(x)=0.5\sin x+x$ אינה מתאפסת כלל.



הצעה לדיון:

- נעלה שאלות:

האם h פונקציה לינארית?

האם יש לנו השערה כלשהי איך נראה גרף הפונקציה?

הנגזרת של הפונקציה h היא פונקציה מוכרת. מה נוכל לומר בעזרתה על הפונקציה h ?

לאילו תחומים חלקיים של כל הפונקציה h יש תכונות של פונקציה א' מן הפעילות הקודמת, ולאילו אזורים יש תכונות של פונקציה ב'?

- נגדיר:

  פונקציה שנגזרתה עולה בתחום מסוים (קטע, קרן או ישר) נקראת קמורה בתחום זה.

  פונקציה שנגזרתה יורדת בתחום מסוים (קטע, ישר או קרן) נקראת קעורה בתחום זה.

  נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות או להיפך.

- לכל אחת מן הפונקציות נמצא את התחומים החלקיים בהם היא קמורה, את התחומים החלקיים בהם היא קעורה ואת נקודות ההתפתלות בעזרת הפונקציה הנגזרת.

  התשובות לשאלות האלה משותפות לשלוש הפונקציות.

- נחפש את נקודות הפיתול ונגיע למסקנה שהנקודות החשודות כפיתול הן הנקודות בהן מתאפסת הנגזרת השניה.

- נדגיש שבניגוד למה שפגשנו בעבר, במרבית המקרים בנקודות הפיתול הנגזרת לא מתאפסת. נדגים בעזרת הפונקציות שחקרנו.

מצאו את ההבדלים - ג'



על הפונקציות:

לפונקציה $m(x)=x^3-5x^2+3x$ יש נקודת מקסימום

כאשר $x=\frac{1}{3}$ ונקודת מינימום כאשר $x=3$.

הנגזרת של הפונקציה l מתאפסת כאשר $x=1$. נקודה זו היא נקודת פיתול של הפונקציה.

הנגזרת של הפונקציה k אינה מתאפסת כלל.

לכל אחת מן הפונקציות יש נקודת פיתול אחת.

קל למצוא פונקציות נוספות ממשפחה זו שיש להן שתי נקודות קיצון ופונקציות ממשפחה זו שהנגזרת שלהן אינה מתאפסת כלל. פונקציה נוספת שבה הנגזרת מתאפסת אך הנקודה היא נקודת התפתלות היא $y=x^3+3x^2+3x$.