כיכר טוב שוש:
בעיות ערך קיצון

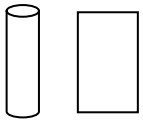
<u>הציוד הדרוש</u>:

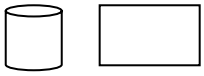
2 שקפים רגילים (A4) ודפי מדפסת אחדים באותו גודל.

שקית פופקורן או בייגלך.

פופקורן*

במשפחת אורן מאוד אוהבים פופקורן, וגם אוהבים להכין אריזות לכל מטרה. אתמול רצו בני המשפחה להכין מיכל גלילי משקף של מקרן שקפים ולמלא אותו פופקורן. יש שתי אפשריות לעשות זאת:

לאורך: 

לרוחב 

(חומר לתחתית הגליל יש להם בשפע)

הבעל, תמיר, (195 ס"מ), בטוח שהגובה הכי חשוב, ושהגליל הגבוה מכיל יותר פופקורן מאשר הגליל הרחב. סבתא רוחה בטוחה שהרוחב הכי חשוב, ושהכי הרבה פופקורן ייכנס לגליל הרחב, והבת שלוה צוחקת מכל העניין ואומרת להם שהם משתמשים באותו שקף, ואיך שלא יגלגלו אותו תיכנס בדיוק אותה כמות של פופקורן.

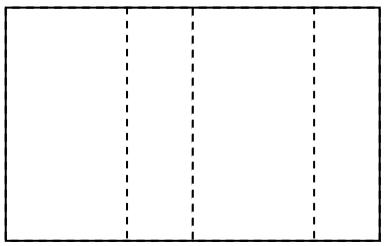
מה דעתכם???

---

* הרעיון לפעילות זו נשען על משימה דומה המתוארת בספר:

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000). *How Students (mis-)Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules.* NY: Teachers College Press.

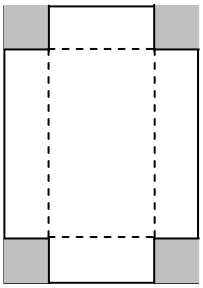
לפעמים מעוניינים בני המשפחה לקפל את השקף כך שתיווצר מעטפת של תיבה בעלת נפח מקסימלי.



קיפול אפשרי

א. מה יכול לגרום לאנשים להעדיף מיכל בצורת תיבה על פני מיכל בצורת גליל?

ב. מהו הנפח המקסימלי של תיבה אשר המעטפת שלה מתקבלת מקיפול של שקף בגודל A4? (ניר A4 גודלו 21ס"מ x 29.7ס"מ)



ליום ההולדת של בת הזקונים החליטו בני המשפחה להכין משקף A4 קופסה עם תחתית ולמלא אותה בשוקולד תוצרת בית.

לשם כך הם גוזרים מהשקף ריבועים בפינות , ומקפלים לאורך הקווים המרוסקים. מהי הכמות המקסימלית של שוקולד שניתן להכניס לקופסה?

בעיות ערך קיצון

<u>על הפעילות</u>:

הפעילות המוצעת כאן מציגה את הנושא של בעיות ערך קיצון בעזרת בעיות שמתקשרות לעולמם של התלמידים. האמצעים הדרושים הם פשוטים. שני שקפים של מקרן שקפים ומספר גליונות ניר או בריסטול באותו גודל, וכיבוד קל כגון פופקורן או בייגלעך.

בשלב הראשון מוצגת בפני התלמידים בעיה בה עליהם להשוות בין שני נפחים בעזרת אומדן או חישוב, ולקבוע אם אחד מהם גדול מהשני. מן הספרות ידוע שתלמידים רבים מבססים את ההשערה שלהם על כללים אינטואיטיביים שאינם מתאימים למקרה זה, ולכן צפוי שתלמידים שונים יעלו השערות שונות, תיווצר סקרנות לדעת מי צודק, והתשובה תפתיע לפחות חלק מן התלמידים.

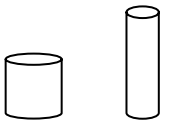
בדיקת ההשערה יכולה להיעשות באמצעים פיסיים - מילוי המיכלים בפופקורן, בייגלעך, או כל דבר אחר שמשאיר טעם טוב.

<u>הערות</u>:

1. בפתיחה מומלץ לספר את סיפור הבעיה כסיפור "אישי", למשל:

   אני חייבת לשתף אתכם בויכוח שמתנהל אצלנו בבית: במשפחה שלנו מאד אוהבים פופקורן, ואנחנו גם אוהבים להכין בעצמנו אריזות. אתמול רצינו להכין מיכל משקף של מקרן שקפים ולשים בו פופקורן. ואז התחיל הוויכוח. יש שתי אפשריות לעשות זאת. [מדגימים]. הבעל שלי, מטר-תשעים גובה, בטוח שהגובה הכי חשוב, ושהגליל הגבוה מכיל יותר פופקורן מאשר הגליל הרחב. סבתא שלי בטוחה שהרוחב הכי חשוב, ושהכי הרבה פופקורן ייכנס לגליל הרחב. והבת שלי צוחקת מכל העניין ואומרת להם שהם משתמשים באותו שקף, ואיך שלא יגלגלו אותו תיכנס בדיוק אותה כמות של פופקורן.

2. הגליל הרחב מכיל יותר פופקורן. אם מביאים בחשבון שאורך השקף 30 ס"מ ורוחבו 21 ס"מ קל לחשב את הרדיוס ואת נפח הגליל בכל אחד מן המצבים.

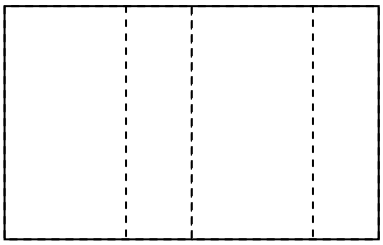


3. זה הזמן לספר שאחד התחומים בהם המתמטיקה עוסקת הוא אופטימיזציה. חיפוש הפיתרון הטוב ביותר מבין מספר פתרונות אפשריים.

4. למרות שכשמכינים מעטפת בצורת גליל מגיליון מלבני של בריסטול או שקף, הנפח המתקבל גדול יותר מאשר כאשר מכינים מאותו גיליון מלבני מעטפת לגוף בצורת

תיבה, יש לפעמים סיבות טובות להעדיף מיכלים שצורתם תיבה. למשל, מיכלים בצורת תיבה נצמדים טוב יותר זה לזה במקרר, קל יותר לסדרם בארגזים ולהובילם, נוח להצמיד להם תוויות ועוד (דברי תלמידים). הדיון בנושא זה גוזל דקה או שתיים, לא יותר, ומאפשר להציג את השיקול המתמטי כהיבט אחד של מערכת שיקולים שחלקם מתמטיים וחלקם אינם מתמטיים.

5. את הבעיה השניה ניתן לפתור באמצעים של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, או על ידי מציאת נקודת מקסימום של פרבולה. כדאי לדבר גם על המצבים המנוונים, $x=15$ ו- $x=0$ לכלול אותם בתחום הפונקציה, ולהתייחס למקסימום מוחלט בתחום סגור.



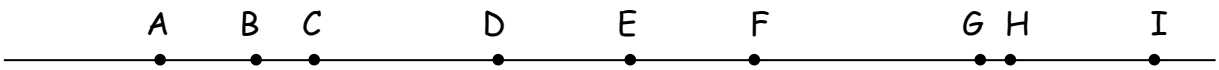
6. בעזרת אותו גיליון נייר אפשר להציג בעיה שגרתית שמופיעה בכל ספרי הלימוד, בעיה ג', ואנחנו כבר עם שתי רגלים בתוך הנושא.

נרעים:

בעיות ערק קיצון שאינן מבוססות חשבון דיפרנציאלי, אותן ניתן לשלב לפני תחילת הוראת הפרק במטרה לנרוע את רעיון האופטימיצית.

1. מועדונוער

תשעה יישובים ממוקמים לאורך כביש ישר באחד מאזורי הארץ המרוחקים. תורם נדיב מציע לתרום כסף למועדון נוער לרווחת ילדי היישובים האלה, אך מתנה את תרומתו בהקמת המועדון **במקום שבו סכום המרחקים של המועדון מתשעה היישובים יהיה מינימלי**. היכן יש לבנות את המועדון?

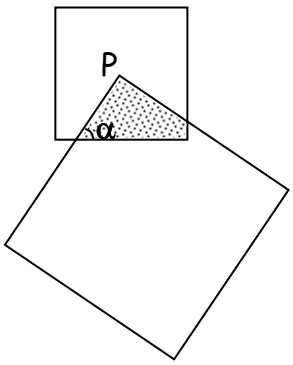


2. בריצה קלה

בחופשת הקיץ הקימו תלמידי בית הספר "חולות נודדים" 2 מחנות אוהלים בשטח חולי מצידו האחד של כביש ישר. בערב הכינו המדריכים הפתעה והביאו לתלמידים כתב חידה למשחק. התלמידים צריכים לצאת ממחנה A, לרוץ לכביש אל מכונית המדריכים, לקחת את כתב החידה ולרוץ אתו למחנה B. היכן צריכה מכונית המדריכים לעצור כדי שמסלול הריצה יהיה הקצר ביותר האפשרי?



3. ריבועים



בשרטוט שלפניכם שני ריבועים. הנקודה P היא מרכז הריבוע הקטן, וקודקוד של הריבוע הגדול.

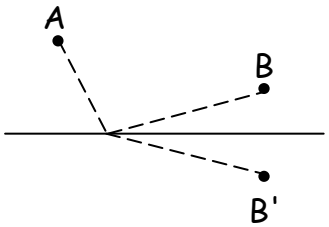
מה צריך להיות גודלה של הזווית α כדי שהשטח המשותף לשני הריבועים (השטח המנוקד) יהיה מקסימלי? מה גודל השטח המקסימלי?

גרעים – תשובות

מועדונוער

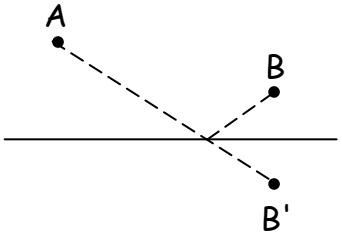
- לו היו רק שני יישובים, סכום המרחקים אזי ניתן למקם את המועדון בכל נקודה בקטע שבין שני היישובים. סכום המרחקים הוא המרחק בין היישובים
- לו היו שלושה ישובים אז יש למקם את המועדון ביישוב האמצעי. המרחק המינימלי גם הפעם הוא סכום המרחקים בין היישובים הקיצוניים.
- לו היו 4 יישובים ניתן למקם את המועדון בכל נקודה שבין שני הישובים האמצעיים (מדוע?).
- וכך כשמספר היישובים זוגי סכום המרחקים המינימלי מתקבל כאשר המועדון ממוקם בנקודה כלשהי בין שני היישובים האמצעיים וכשמספר הישובים אי זוגי יש למקם את המועדון ביישוב האמצעי.
- לפיכך יש לבנות את המועדון ביישוב E.

בריצה קלה



נתבונן בנקודה 'B, סימטרית לנקודה B ביחס לכביש.

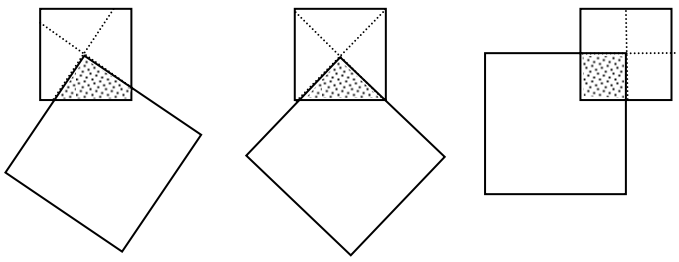
המרחק מכל נקודה על הכביש אל 'B שווה למרחק ממנה ל- B. לכן במקום לשאול מהו מסלול הריצה הקצר ביותר מ- A לכביש ומשם ל- B, נשאל מהו מסלול הריצה הקצר ביותר מ- A לכביש ומשם ל- 'B.



המסלול הקצר ביותר הוא הקטע 'AB.

המכונית צריכה לעצור **בנקודת המפגש של 'AB עם הכביש.**

ריבועים



בשאלה זו השטח המנוקד שווה **תמיד** לרבע מן הריבוע הקטן, ללא קשר לגודל הזווית. השטח המקסימלי הוא אם כן רבע השטח של הריבוע הקטן.