מקרה או תופעה מתמטית?

הצעת פתיחה לנושא האינטגרלים

בהצעת פתיחה זו חישוב השטח מתחת לגרף של פונקציה הוא המוטיבציה לעסוק בפונקציות קדומות. להצעת פתיחה זו שלבים אחדים:

א. התלמידים מחשבים שטחים מתחת לגרפים של פונקציות במקרים בהם ניתן לחשב את השטח באמצעים גיאומטריים (משולש, טרפז). (בדף העבודה השטח מחושב כפונקציה של נקודות הקצה)

ב. מרכזים בטבלה על הלוח מבחר מתוצאות החישובים. תפקיד המורה לרשום את התוצאות בטבלה בדרך שתבליט את הקשר בין פונקצית השטח לבין פונקצית הגרף הנתון.

ג. מן החישובים עולה ההשערה כי גרף הפונקציה המקורית הוא הנגזרת של פונקצית השטח.

ד. על מנת לבדוק את ההשערה בונים את הנגזרת של פונקצית השטח. ההוכחה ש $S=\int_a^b f(x)dx$ נעשית בדרך המופיעה במרבית ספרי הלימוד, אולם שפת השיח במהלך ההוכחה עוסקת בבדיקת ההשערה שעלתה בעקבות דף העבודה. אימות ההשערה מפתיע תלמידים רבים.

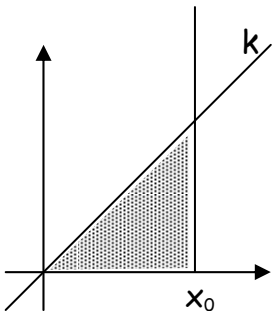
ה. אימות ההשערה יוצר מוטיבציה למצוא פונקציות קדומות של פונקציות מוכרות. לכן יש מקום לקחת פסק זמן לטיפול באינטגרל הלא מסויים לפני שעוברים לחישובי שטחים מורכבים.

לרעיון:

לקראת הוכחת הקשר בין פונקצית השטח לבין פונקצית הגרף הנתון, כדאי שהתלמידים יהיו מודעים לעובדה שלפונקציה יש נגזרת יחידה, אך קימות פונקציות רבות, נבדלות בקבוע, שלכולן אותן נגזרת. ניתן לעשות זאת בשלב לימוד הנגזרת. מידי פעם כאשר מחשבים נגזרת מתאים לשאול את התלמידים אם הם מכירים פונקציות נוספות שיש להן אותה נגזרת. זו הזדמנות להדגיש שהוספת קבוע משמעה הזזה אנכית, אשר אינה משנה את שיפועי הגרף ולכן הנגזרת נשמרת.

מקרה או תופעה מתמטית?

1. הביעו בעזרת x_0 את השטח המוגבל בין הישר k, ציר x, והישר $x=x_0$.

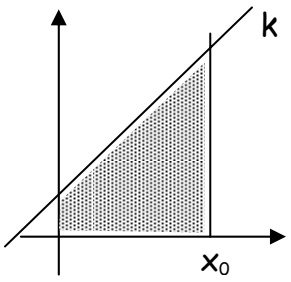


א. כאשר הישר k הוא גרף הפונקציה $y = 2x$

ב. כאשר הישר k הוא גרף הפונקציה $y = x$

ג. כאשר הישר k הוא גרף הפונקציה $y = ax$

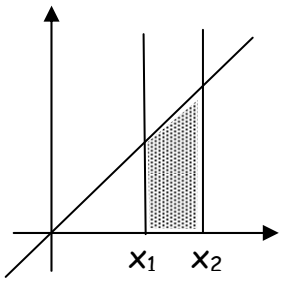
2. הביעו בעזרת x_0 את השטח המוגבל בין הישר k המשורטט, ציר x, ציר y והישר $x=x_0$.



א. כאשר הישר k הוא גרף הפונקציה $y = 5x+3$

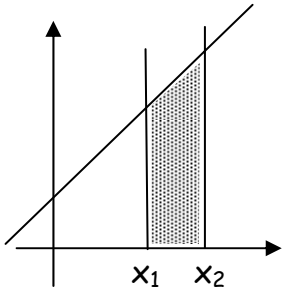
ב. כאשר הישר k הוא גרף הפונקציה $y = ax+b$

3. הביעו בעזרת x_1 ו- x_2 את השטח המוגבל בין הישר k, ציר x, ציר y והישרים $x=x_1$ ו- $x=x_2$



א. כאשר הישר הוא גרף הפונקציה $y = 2x$

ב. כאשר הישר הוא גרף הפונקציה $y = ax$



ג. כאשר הישר (שרטטו) הוא גרף הפונקציה $y = ax+b$

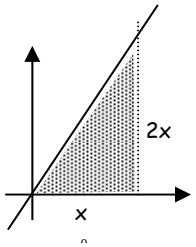
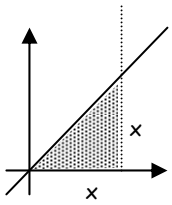
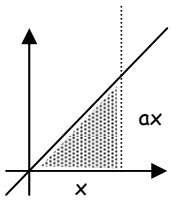
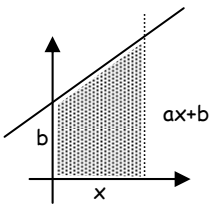
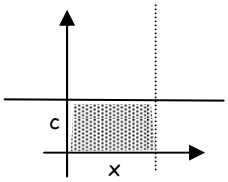
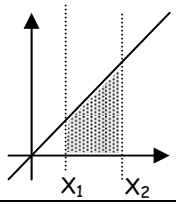
4. הביעו בעזרת x_0 את השטח המוגבל בין הישר $y=4$, ציר x , ציר y, והישר $x=x_0$.

5. הביעו בעזרת x_0 את השטח המוגבל בין הישר $y=c$, ציר x ציר y, והישר $x=x_0$.

6. הביעו בעזרת x_1 ו- x_2 את השטח המוגבל בין הישר $y=c$, ציר x והישרים $x=x_1$ ו- $x=x_2$.

האם גילית חוקיות כלשהי?
נסו להרצות השערות.

טבלה לסיכום התוצאות

הישר	השטח	חישוב	תוצאה
y=2x		$S=\frac{x\cdot 2x}{2}$	$S=x^2$
y=x		$S=\frac{x\cdot x}{2}$	$S=\frac{1}{2}x^2$
y=ax		$S=\frac{x\cdot ax}{2}$	$S=\frac{1}{2}ax^2$
y=ax+b		$S=\frac{(b+ax+b)\cdot x}{2}$	$S=\frac{1}{2}ax^2+bx$
y=c		$S=c\cdot x$	$S=cx$
y=ax		$S=\frac{(ax_1+ax_2)\cdot(x_2-x_1)}{2}$	$S=\frac{1}{2}ax_2^2-\frac{1}{2}ax_1^2$

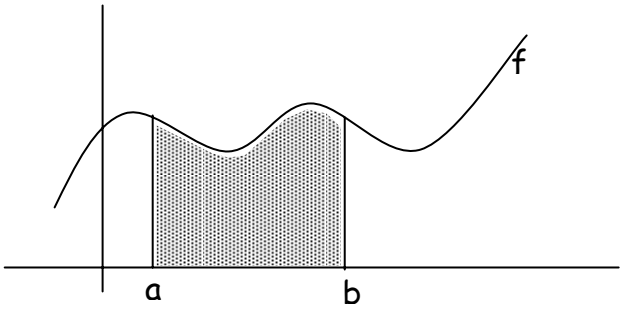
הַשְׁעָרוֹת (בשפה חופשית):

הקשר בין פונקצית השטח לבין הפונקציה התוחמת את השטח הוא קשר של פונקציה ונגזרת.

נגדיר:

פונקציה שנגזרתה היא פונקציה f נקראת **פונקציה קדימה של f** ומסומנת באות גדולה **F**.

ננסח שנית את ההשערה:



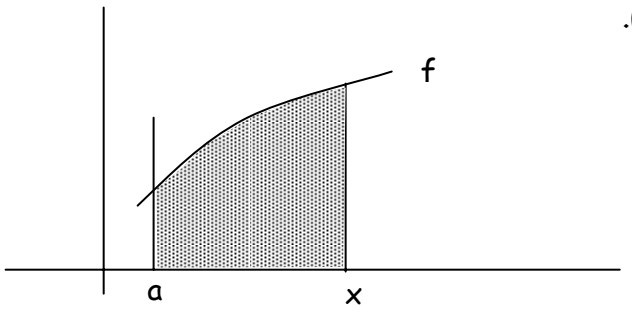
השטח מתחת לגרף הפונקציה שתחום בין הישרים $x = a$ ו- $x = b$ הוא: $F(b) - F(a)$

בְּדִיקַת הַהַשְׁעָרָה:

נבחן את ההשערה במקרה פשוט בקטע בו הפונקציה חיובית ועולה.

כדי שיהיה לנו משתנה אחד נגדיר פונקצית שטח S:

$S(x)$ מוגדר כשטח המוגבל בין גרף הפונקציה f, ציר x, ושני ישרים מאונכים לציר x העוברים דרך הנקודות a ו- x שעל ציר x. $(a<x)$.



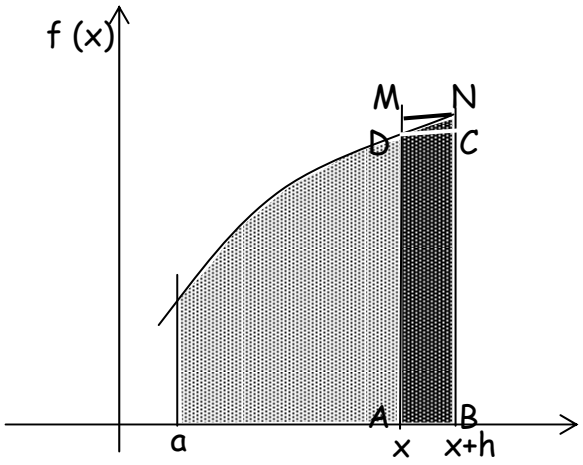
ניסוח מחודש של ההשערה: $S'(x) = f(x)$

האם יש לנו דרך לתאר את S? – בינתיים לא.

האם יש לנו דרך לתאר את S'?

נתמקד בנקודה x:

הנגזרת בנקודה x היא הגבול אליו שואפת מנת ההפרשים $\frac{S(x+h)-S(x)}{x+h-x}$ כאשר h שואף לאפס.



<u>נשים לב</u>:

- המונה של השבר הוא השטח הכהה
- המכנה הוא הקטע AB
- השטח הכהה אינו צורה גיאומטרית מוכרת
- השטח גדול מן המלבן $ABCD$
- השטח קטן מן המלבן $ABNM$

לפיכך:

$$\frac{S_{ABCD}}{h} < \frac{S(x+h)-S(x)}{x+h-x} < \frac{S_{ABNM}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{h\times f(x)}{h} < \frac{S(x+h)-S(x)}{h} < \frac{h\times f(x+h)}{h}$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{S(x+h)-S(x)}{h} < f(x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x) \le \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x) \le S'(x) \le \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

$$\Rightarrow f(x) \le S'(x) \le f(x)$$

ועל פי "כלל הסנדוויץ" :

$$\Rightarrow S'(x) = f(x)$$

השערתנו התאמתה!!!